Estruturas Básicas: Conjuntos, Funções, Sequências e Somatórios

Centro de Informática
UFPE

Conjuntos
Introdução

- Uma matilha de cães
- Um cacho de uvas
- Uma quadrilha de ladrões

Estes são exemplos de *conjuntos*.

Conjuntos
Definição

- Um *conjunto* é um coleção *desordenada* de objetos.
- Exemplo. $\{1, 2, 3, 4\}$ denota o conjunto cujos *membros* ou *elementos* são 1, 2, 3 e 4.
- Um conjunto não tem ordem nem repetição: $\{1, 2, 3, 4\} = \{1, 2, 2, 3, 3, 3, 3, 4, 4, 4, 4\} = \{4, 3, 1, 2, 1, 3\}$.

Conjuntos
Notação

- $a \in A$ denota que o elemento a pertence ao conjunto A.
- E $a \notin A$ denota que o elemento a não pertence ao conjunto A.
- Formalmente: $a \notin A \equiv \neg(a \in A)$
- Tanto $a \in A$ quanto $a \notin A$ são proposições.

Conjuntos

Notação

ATENÇÃO

- $a \in A$ relaciona o elemento a com o conjunto A.

Conjuntos

Notação

ATENÇÃO

- $a \in A$ relaciona o elemento a com o conjunto A.
- Exercício. T ou F?
  - $2 \in \{1, 2, 3\}$
  - $4 \in \{1, 2, 3\}$
  - $0 \in \{1, 2, 3\}$

Conjuntos

Notação

ATENÇÃO

- $a \in A$ relaciona o elemento a com o conjunto A.
- Exercício. T ou F?
  - $2 \in \{1, 2, 3\}$
  - $4 \in \{1, 2, 3\}$
  - $0 \in \{1, 2, 3\}$
- Exercício. T ou F?
  - $\{5, 6\} \in \{\{1, 2\}, \{3, 4\}, \{5, 6\}\}$
  - $\{2, 3\} \in \{\{1, 2\}, \{3, 4\}\}$
  - $\{1, 2, 3\} \in \{0, \{\{\{1, 2, 3\}\}\}, 4\}$
  - $\{\{\{1, 2, 3\}\}\} \in \{0, \{\{\{1, 2, 3\}\}\}, 4\}$
- Em conjunto de conjuntos, os elementos estão sempre separados pelas vírgulas mais externas.
  - $\{2, 3\} \in \{\{1, 2\}, \{2, 3\}, \{3, 4\}\} \equiv T$
  - $\{\{2, 3\}, 4\} \in \{1, \{\{2, 3\}, 4\}, 5\} \equiv T$
  - $\{1, 2\} \in \{\{\{\{a, b, c\}, d\}, e\}, \{1, 2\}, 3\} \equiv T$

Conjuntos

Exemplos

- O conjunto das vogais: $\{a, e, i, o, u\}$
- O conjunto dos ímpares menores que 20: $\{1, 3, 5, 7, 9, 11, 13, 15, 17, 19\}$
- O conjunto dos naturais menores ou iguais a 100: $\{0, 1, 2, 3, \ldots, 100\}$

Conjuntos

Construtor de conjuntos (*set builder*)

- $A = \{x \mid x \textit{ é um inteiro positivo ímpar menor que } 20\}$
- Alternativamente,

$$A = \{x \mid (x \in \mathbb{Z}^+) \ \wedge \ ((x \ \mathbf{mod}\ 2) = 1) \ \wedge \ (x < 20)\}$$

Obs. x **mod** y calcula o resto da divisão de x por y.

Conjuntos

Construtor de conjuntos (*set builder*)

- De forma geral
$$S = \{x \mid P(x)\},$$
onde $P(x)$ é uma proposição.
- Ou seja,
$$\{x \mid P(x)\}$$
é "o conjunto contendo todos elementos x, tal que $P(x)$ seja verdade".

Conjuntos

Construtor de conjuntos (*set builder*)

Exemplo. Quatro formas de definir o mesmo conjunto.

- $A = \{1, 3, 5, 7, 9, 11, 13, 15, 17, 19\}$
- $A = \{x \mid x \textit{ é um inteiro positivo ímpar menor que } 20\}$
- $A = \{x \mid (x \in \mathbb{Z}^+) \ \wedge \ ((x \textbf{ mod } 2) = 1) \ \wedge \ (x < 20)\}$
- $A = \{x \mid P(x)\}$, onde $P(x) = ((x \in \mathbb{Z}^+) \ \wedge \ ((x \textbf{ mod } 2) = 1) \ \wedge \ (x < 20))$.

Conjuntos

Construtor de conjuntos (*set builder*)

Propriedade 1

- Seja $MD = \{x \mid x \; estuda \; Matematica \; Discreta\}$.
- Que conjunto é esse: $\{x \mid x \in MD\}$?

Conjuntos

Construtor de conjuntos (*set builder*)

Propriedade 1

- $\{x \mid x \in A\} = A$

Conjuntos

Construtor de conjuntos (*set builder*)

Propriedade 1

- $\{x \mid x \in A\} = A$
- Exemplos
  - $\{x \mid x \in MD\} = MD$
  - $\{x \mid x \in \{1, 2, 3\}\} = \{1, 2, 3\}$
  - $\{x \mid x \in (A \cup B) \cap (C \cup D)\} = (A \cup B) \cap (C \cup D)$

Conjuntos

Construtor de conjuntos (*set builder*)

Propriedade 2

- Fulano faz triatlon.

Conjuntos

Construtor de conjuntos (*set builder*)

Propriedade 2

- Fulano faz triatlon.
- Isso é logicamente equivalente a dizer que Fulano pertence à turma das pessoas que fazem triatlon (independente se Fulano faz triatlon ou não).

Conjuntos

Construtor de conjuntos (*set builder*)

Propriedade 2

- Fulano faz triatlon.
- Isso é logicamente equivalente a dizer que Fulano pertence à turma das pessoas que fazem triatlon (independente se Fulano faz triatlon ou não).
- Matematicamente:

$$\text{Fulano faz triatlon} \equiv \; Fulano \in \{x \mid x \; faz \; triatlon\}$$

Conjuntos

Construtor de conjuntos (*set builder*)

Propriedade 2

- $P(a) \equiv a \in \{x \mid P(x)\}$

Conjuntos

Construtor de conjuntos (*set builder*)

Propriedade 2

- $P(a) \equiv a \in \{x \mid P(x)\}$
- Se $a \in \{x \mid P(x)\}$, então $P(a)$ é verdade.
  E vice-versa: se $P(a)$ é verdade, então $a \in \{x \mid P(x)\}$
- Se $a \notin \{x \mid P(x)\}$, então $P(a)$ é falso.
  E vice-versa: se $P(a)$ é falso, então $a \notin \{x \mid P(x)\}$

Conjuntos

Construtor de conjuntos (*set builder*)

Propriedade 2

- $P(a) \equiv a \in \{x \mid P(x)\}$
- Se $a \in \{x \mid P(x)\}$, então $P(a)$ é verdade.
  E vice-versa: se $P(a)$ é verdade, então $a \in \{x \mid P(x)\}$
- Se $a \notin \{x \mid P(x)\}$, então $P(a)$ é falso.
  E vice-versa: se $P(a)$ é falso, então $a \notin \{x \mid P(x)\}$
- Exemplo. Seja $P(x) = x > 10$.

  $P(100) \equiv 100 \in \{x \mid P(x)\}$, assim como
  $P(2) \equiv 2 \in \{x \mid P(x)\}$
- Atenção: Conjuntos são comparados com $=$.
  Proposições são comparados com $\equiv$.

Conjuntos

Construtor de conjuntos (*set builder*)

Exemplo.

- Fulano faz triatlon.

Conjuntos

Construtor de conjuntos (*set builder*)

Exemplo.

- Fulano faz triatlon.
- Isso é o mesmo que dizer $P(Fulano)$, onde $P(x) =$ "x *faz triatlon*".

Conjuntos

Construtor de conjuntos (*set builder*)

Exemplo.

- Fulano faz triatlon.
- Isso é o mesmo que dizer $P(Fulano)$, onde $P(x) =$ "*x faz triatlon*".
- Pela Propriedade 2, isso é o mesmo que dizer $Fulano \in \{x \mid P(x)\}$.

Conjuntos

Construtor de conjuntos (*set builder*)

Exemplo.

- Fulano faz triatlon.
- Isso é o mesmo que dizer $P(Fulano)$, onde $P(x) =$ "x *faz triatlon*".
- Pela Propriedade 2, isso é o mesmo que dizer $Fulano \in \{x \mid P(x)\}$.
- Ou seja, $P(Fulano) \equiv Fulano \in \{x \mid P(x)\}$
  Na Propriedade 2, Fulano faz o papel da variável a.

Conjuntos

Alguns conjuntos úteis

- $\mathbb{N} = \{0, 1, 2, 3, \ldots\}$ (naturais)
- $\mathbb{Z} = \{\ldots, -2, -1, 0, 1, 2, \ldots\}$ (inteiros)
- $\mathbb{Z}^+ = \{1, 2, 3, \ldots\}$ (inteiros positivos)
- $\mathbb{Q} = \{p/q \mid p \in \mathbb{Z}, q \in \mathbb{Z}, e\ q \neq 0\}$ (racionais)
- $\mathbb{Q}^+ = \{x \in \mathbb{R} \mid x = p/q,\ \textit{para inteiros positivos p e q}\}$ (racionais positivos)

Conjuntos

Conjuntos de conjuntos

- $A = \{\mathbb{N}, \mathbb{Z}, \mathbb{Q}^+, \mathbb{R}\}$
- Cada elemento do conjunto A é um conjunto
- Quantos elementos A possui?

Conjuntos
Conjuntos de conjuntos

- $A = \{\mathbb{N}, \mathbb{Z}, \mathbb{Q}^+, \mathbb{R}\}$
- Cada elemento do conjunto A é um conjunto
- Quantos elementos A possui?
- Exercício. T ou F?
    - $\{1, 2\} \in \{\{1, 2\}, \{3, 4\}, \{5, 6\}\}$
    - $\{4, 5\} \in \{\{1, 2\}, \{3, 4\}, \{5, 6\}\}$
    - $1 \in \{\{1, 2\}, \{3, 4\}, \{5, 6\}\}$
    - $\{\{1, 2\}, \{3, 4\}\} \in \{\{1, 2\}, \{3, 4\}, \{5, 6\}\}$

Conjuntos

Igualdade

- 2 conjuntos são iguais se, e somente se, eles possuem os mesmos elementos.
- A e B são iguais, ou $A = B$, se, e somente se, $\forall x(x \in A \leftrightarrow x \in B)$

Conjuntos

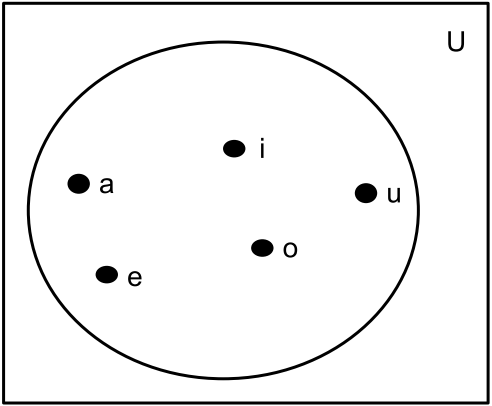
Conjunto Universo

- O *conjunto universo* U é o conjunto com todos os elementos que iremos trabalhar.
- Exemplo. Podemos definir o conjunto das letras do alfabeto português como nosso conjunto universo. As vogais são um subconjunto de U.

Conjuntos

Diagramas de Venn

Graficamente, podemos usar o diagrama de Venn para representar o conjunto das vogais.



Conjuntos
Definições

- *Conjunto vazio* é o conjunto sem elementos.
- É representado por $\emptyset$ ou $\{\}$.
- Propriedades:
  $x \in \emptyset \equiv F$
  $\emptyset = \{x \mid \mathrm{F}\}$

Conjuntos
Definições

Exercício.

- Prove que $\{x \mid (x \in A) \wedge (x \notin A)\} = \emptyset$

Conjuntos

Definições

ERRO COMUM

- Confundir igualdade de conjunto com equivalência proposicional.
- Exemplo. Prove que $\{x \mid (x \in A) \wedge (x \notin A)\} = \emptyset$.

$$
\begin{aligned}
& \{x \mid (x \in A) \wedge (x \notin A)\} & \\
\equiv\ & (x \in A) \wedge (x \notin A) & [??] \\
\equiv\ & (x \in A) \wedge \neg(x \in A) & [\text{Def. } \notin] \\
\equiv\ & \mathrm{F} & [\text{Leis da negação}] \\
=\ & \{x \mid \mathrm{F}\} & [??] \\
=\ & \emptyset & [\text{Def. } \emptyset]
\end{aligned}
$$

Conjuntos

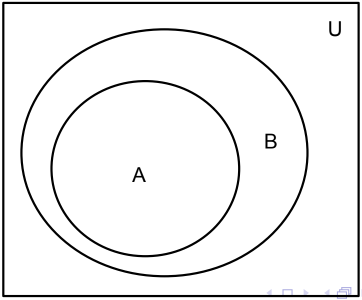
Definições

- Um conjunto com 1 elemento é chamado de *conjunto unitário* (*singleton*).
- Qual a diferença entre $\{\emptyset\}$ e $\emptyset$?

Conjuntos

Definições

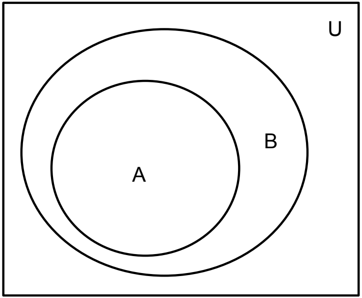
- A é um subconjunto de B, denotado por $A \subseteq B$, se, e somente se, $\forall x(x \in A \rightarrow x \in B)$.
- Exemplos.
  $\{1, 2\}$ é um subconjunto de $\{1, 2, 3, 4\}$.
  $\{1, 2, 3, 4\}$ é um subconjunto de $\{1, 2, 3, 4\}$.



Conjuntos

Definições

- Se $A \subseteq B$ e $A \neq B$, então podemos dizer que A é um *subconjunto próprio* de B, denotado por $A \subset B$.
- Formalmente: $\forall x(x \in A \rightarrow x \in B) \wedge \exists x(x \in B \wedge x \notin A)$
- Exemplos.
  $\{1, 2\}$ é um subconjunto próprio de $\{1, 2, 3, 4\}$.
  $\{1, 2, 3, 4\}$ não é um subconjunto próprio de $\{1, 2, 3, 4\}$.



Conjuntos

Notação

ATENÇÃO

- $a \in A$ relaciona o elemento a com o conjunto A
- $A \subseteq B$ relaciona o conjunto A com o conjunto B.

Conjuntos

Notação

ATENÇÃO

- $a \in A$ relaciona o elemento a com o conjunto A
- $A \subseteq B$ relaciona o conjunto A com o conjunto B.
- Exercício. T ou F?
  - $2 \subseteq \{1, 2, 3\}$
  - $2 \in \{1, 2, 3\}$
  - $\{2, 3\} \subseteq \{1, 2, 3\}$
  - $\{2, 3\} \in \{1, 2, 3\}$
  - $\{1, 2\} \subseteq \{\{1, 2\}, \{2, 3\}, \{4, 5\}\}$
  - $\{1, 2\} \in \{\{1, 2\}, \{2, 3\}, \{4, 5\}\}$
  - $\{\{1, 2\}, \{3, 4\}\} \subseteq \{\{1, 2\}, \{2, 3\}, \{4, 5\}\}$
  - $\{\{1, 2\}, \{3, 4\}\} \in \{\{1, 2\}, \{2, 3\}, \{4, 5\}\}$

Conjuntos

Propriedades.

- Para todo conjunto S
  - $\emptyset \subseteq S$
  - $S \subseteq S$

Conjuntos

Propriedades.

- Uma forma de mostrar que $A = B$ é mostrar que $(A \subseteq B) \land (B \subseteq A)$.

Conjuntos

Finito e infinito

- Um conjunto é *finito* se ele contém n elementos distintos onde $n \geq 0$.
- Um conjunto é *infinito* se ele não é finito

Conjuntos

Cardinalidade

- Para um conjunto finito, $|S|$ denota a *cardinalidade* de S: o número de elementos distintos de S.
- $|\{5, 2, 89\}| = 3$
- $|\{1, 1, 1, 1, 1, 2\}| = 2$
- $|\emptyset| = 0$
- $|\{\ \{1, 2, 3\}, \emptyset, \{5, 6, 7, \ldots\}\ \}| = 3$

Conjuntos
Cardinalidade

- Para um conjunto finito, $|S|$ denota a *cardinalidade* de S: o número de elementos distintos de S.
- $|\{5, 2, 89\}| = 3$
- $|\{1, 1, 1, 1, 1, 2\}| = 2$
- $|\emptyset| = 0$
- $|\{\ \{1, 2, 3\}, \emptyset, \{5, 6, 7, \ldots\}\ \}| = 3$
- Exercício. Calcule:
  - $|\{\mathbb{N}, \mathbb{Z}, \emptyset\}|$
  - $|\{0, 1, 2, \ldots, 100\}|$

Conjuntos

Conjunto das Partes (*Power Set*)

- O *conjunto das partes* de S é o conjunto que contém todos os subconjuntos de S.
- Notação: $\mathcal{P}(S)$
- Exercício. Quais são os subconjuntos de $\{0, 1, 2\}$?

Conjuntos

Conjunto das Partes (*Power Set*)

- O conjunto das partes de $\{0, 1, 2\}$:

$\mathcal{P}(\{0, 1, 2\}) = \{\emptyset, \{0\}, \{1\}, \{2\}, \{0, 1\}, \{0, 2\}, \{1, 2\}, \{0, 1, 2\}\}$

Conjuntos

Conjunto das Partes (*Power Set*)

Exercício.

- Qual é o $\mathcal{P}(\emptyset)$?
- Qual é o $\mathcal{P}(\{\emptyset\})$?
- Qual é o $\mathcal{P}(\{\emptyset, \{\emptyset\}\})$?
- Qual é o $\mathcal{P}(\{\emptyset, \{\emptyset\}, \{\emptyset, \{\emptyset\}\}\})$?

Conjuntos

Exercício. Seja $TURMA$ o conjunto de alunos desta sala. Suponha que a turma se dividiu em 5 grupos não vazios para fazer um trabalho. Seja $GRUPO1$ um dos grupos da turma. Qual modelo matemático abaixo melhor representa $GRUPO1$?

- $GRUPO1 \in TURMA$
- $GRUPO1 \in \mathcal{P}(TURMA)$
- $GRUPO1 \subseteq \mathcal{P}(TURMA)$
- $GRUPO1 = \{a \mid a \in TURMA\}$
- $TURMA \subseteq GRUPO1$

Conjuntos

Exercício. Seja *JOGADORES* o conjunto de todos jogadores de futebol do Brasil. Sejam *NAUTICO*, *SPORT* e *SANTA*, os conjuntos dos jogadores do Náutico, Sport e Santa Cruz, respectivamente. O que podemos afirmar a respeito destes conjuntos?

- $NAUTICO \in JOGADORES$
- $SPORT \subset JOGADORES$
- $(NAUTICO \cup (SPORT \cup SANTA)) \in JOGADORES$
- $(NAUTICO \cap (SPORT \cap SANTA)) \in \mathcal{P}(JOGADORES)$
- $(NAUTICO \cap (SPORT \cap SANTA)) = \emptyset$

Conjuntos

Tuplas

- Uma *tupla* é uma coleção *ordenada* de elementos.
- Notação: $(a_1, a_2, \ldots, a_n)$ é uma tupla cujo primeiro elemento é a_1, o segundo elemento é a_2, etc.
- Exemplo. $(1, 2, 3)$ é uma tupla com 3 elementos.
- Exemplo. $(3, 2, 1)$ também é uma tupla com 3 elementos, porém diferente de $(1, 2, 3)$. Por que?

Conjuntos

Tuplas

- As tuplas $(a_1, a_2, \ldots, a_n)$ e $(b_1, b_2, \ldots, b_n)$ são iguais se, e somente se, $a_1 = b_1$, $a_2 = b_2$, ..., $a_n = b_n$.

Conjuntos

Pares

- Pares: tuplas com 2 elementos.
- Neste caso, $(a, b) = (c, d)$ se, e somente se, $(a = c)$ e $(b = d)$.
- Exercício. Ache valores para a e b que satisfaçam a equação $(a, b) = (b, a)$.

Conjuntos

Produto Cartesiano

- O *produto cartesiano* é um operador de conjuntos.
- Sejam A e B conjuntos.
- $A \times B$ denota o *conjunto de todos os pares* (a, b) tal que $a \in A$ e $b \in B$.
- Formalmente: $A \times B = \{(a, b) \mid a \in A \wedge b \in B\}$

Conjuntos

Produto Cartesiano

- Sejam $A = \{a, b\}$ e $B = \{0, 1, 2\}$.
- $A \times B = \{(a, 0), (a, 1), (a, 2), (b, 0), (b, 1), (b, 2)\}$
- $B \times A = \{(0, a), (1, a), (2, a), (0, b), (1, b), (2, b)\}$

Conjuntos

Produto Cartesiano

- Sejam $ALUNOS = \{João, \ Maria\}$ e $DISCIPLINAS = \{Mat.Discreta, Álgebra, Lógica\}$.

$$\begin{aligned} ALUNOS \times DISCIPLINAS = \ & \{(João, \ Mat.Discreta), \\ & (Maria, \ Mat.Discreta), \\ & (João, Álgebra), \\ & (Maria, Álgebra), \\ & (João, Lógica), \\ & (Maria, Lógica)\} \end{aligned}$$

- $ALUNOS \times DISCIPLINA$ modela corretamente que disciplinas cada aluno está pagando, sabendo que João é do primeiro período e Maria, do segundo?

Conjuntos

Produto Cartesiano

- O *subconjunto* S de $ALUNOS \times DISCIPLINAS$ é mais realista:

$$\begin{aligned} S = \ & \{(João,\ Mat.Discreta), \\ & (João,\ Álgebra), \\ & (Maria,\ Lógica)\} \end{aligned}$$

- Um subconjunto de um produto cartesiano é chamado de *relação*.

Conjuntos

Produto Cartesiano

Propriedades

- $A \times \emptyset = \emptyset \times A = \emptyset$
- $A \times B$ é em geral diferente de $B \times A$
- $A \times B = B \times A$ somente quando
  - $A = \emptyset$ ou
  - $B = \emptyset$ ou
  - $A = B$

Conjuntos

Produto Cartesiano

- Generalizando produto cartesiano para n conjuntos:

$$A_1 \times A_2 \times \ldots \times A_n = \\ \{(a_1, a_2, \ldots, a_n) \mid a_1 \in A_1 \;\wedge\; a_2 \in A_2 \;\wedge \ldots \wedge\; a_n \in A_n\}$$

Conjuntos

Produto Cartesiano

- Qual o produto cartesiano $A \times B \times C$, onde $A = \{a, b\}$, $B = \{0, 1, 2\}$ e $C = \{x\}$?

Conjuntos

Produto Cartesiano

- Qual o produto cartesiano $A \times B \times C$, onde $A = \{a, b\}$, $B = \{0, 1, 2\}$ e $C = \{x\}$?
- $A \times B \times C = \{(a, 0, x), (a, 1, x), (a, 2, x), (b, 0, x), (b, 1, x), (b, 2, x)\}$

Conjuntos

Quantificadores, domínios e conjuntos

- Podemos definir e restringir o domínio de um quantificador utilizando conjuntos.
- Exemplo. $\forall x \in \mathbb{R}(x^2 \geq 0)$
- Exemplo. $\exists x \in \mathbb{Z}(x^2 = 0)$

Conjuntos
Conjunto Verdade

- Seja $P(x)$ um predicado no domínio D.
- O *conjunto verdade* relaciona predicados com conjuntos.
- É o conjunto com todos os elementos x tal que $P(x)$ é verdade.
- Definição: $\{x \in D \mid P(x)\}$

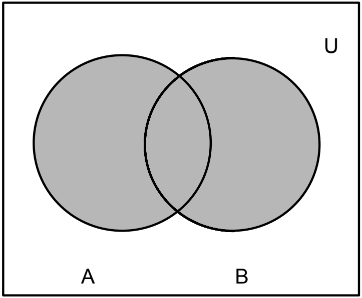
Conjuntos
Conjunto Verdade

- Seja $P(x) = (x > 0) \wedge (x < 2)$ no domínio dos naturais $\mathbb{N}$.
- O conjunto verdade de P é $\{x \in \mathbb{N} \mid (x > 0) \wedge (x < 2)\}$.
- Ou seja, o conjunto verdade de P é $\{1\}$.

Operadores de Conjuntos

União

- A *união* de 2 conjuntos A e B é o conjunto que contém elementos que pertençam à A ou B (ou ambos).
- $A \cup B = \{x \mid x \in A \;\vee\; x \in B\}$
- Exemplo. $\{1,2,3\} \cup \{4,5\} = \{1,2,3,4,5\}$
- Exemplo. $\{1,2,3\} \cup \{3,4\} = \{1,2,3,4\}$



Operadores de Conjuntos

União

- Propriedade da união

$$(x \in A \ \vee \ x \in B) \ \equiv \ (x \in (A \cup B))$$

Operadores de Conjuntos

União

Provar que $(x \in A) \vee (x \in B) \equiv x \in (A \cup B)$.

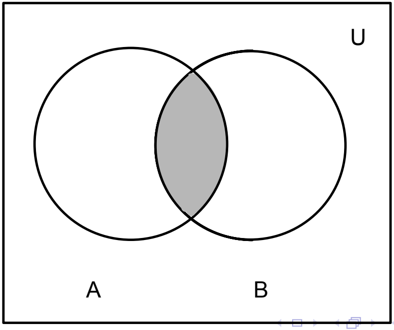
$$\begin{aligned} & (x \in A) \vee (x \in B) \\ & \equiv x \in \{x \mid x \in A \ \vee \ x \in B\} && \text{[Prop. 2]} \\ & \equiv x \in A \cup B && \text{[Def. } \cup \text{]} \end{aligned}$$

Quem faz o papel de a e $P(a)$?

Operadores de Conjuntos

Interseção

- A *interseção* de 2 conjuntos A e B é o conjunto que contém elementos que pertençam tanto à A quanto à B.
- $A \cap B = \{x \mid (x \in A) \wedge (x \in B)\}$
- Exemplo. $\{1, 2, 3\} \cap \{2, 3, 4, 5\} = \{2, 3\}$
- Exemplo. $\{1, 2, 3\} \cap \{1, 4, 5, 6\} = \{1\}$



Operadores de Conjuntos

Interseção

Propriedade da interseção

$$(x \in A \ \wedge \ x \in B) \ \equiv \ (x \in (A \cap B))$$

Operadores de Conjuntos

Interseção

Exercício.

- Prove que $(x \in A \ \wedge \ x \in B) \ \equiv \ (x \in (A \cap B))$

Operadores de Conjuntos

Conjuntos Disjuntos

- 2 conjuntos são *disjuntos* se a interseção entre eles é vazia.
- Exemplo. $\{1, 2, 3, 4\}$ e $\{5, 6, 7, 8, 9, 10\}$ são disjuntos.

Operadores de Conjuntos

Cardinalidade da União

Exemplos.

- Qual a cardinalidade de $A \cup B$?
- Podemos dizer que $|A \cup B| = |A| + |B|$?

Operadores de Conjuntos

Cardinalidade da União

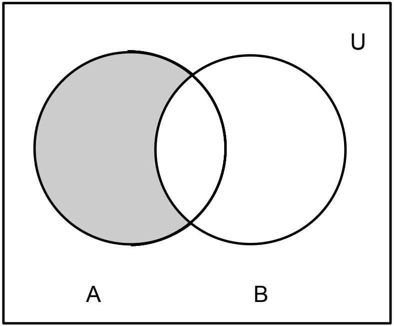
Exemplos.

- Qual a cardinalidade de $A \cup B$?
- Podemos dizer que $|A \cup B| = |A| + |B|$?
- Exemplo. $\{1, 2\} \cup \{2, 3\} = \{1, 2, 3\}$. Ou seja, $|\{1, 2\} \cup \{2, 3\}| \neq |\{1, 2\}| + |\{2, 3\}|$
- Os elementos da interseção $A \cap B$ foram contados 2 vezes!
- $|A \cup B| = |A| + |B| - |A \cap B|$

Operadores de Conjuntos

Diferença

- A *diferença* de A e B (ou o *complemento* de A em relação à B) é o conjunto que contém elementos de A que não estão em B.
- $A - B = \{x \mid x \in A \ \wedge \ x \notin B\}$
- Exemplo. $\{1, 2, 3, 4\} - \{2, 3\} = \{1, 4\}$



Operadores de Conjuntos

Diferença

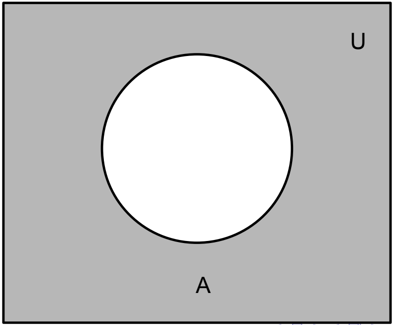
Propriedade

$$(x \in A \ \land \ x \notin B) \ \equiv \ (x \in (A - B))$$

Operadores de Conjuntos

Complemento

- O *complemento* de A, denotado por $\overline{A}$, é o conjunto $U - A$.
- $\overline{A} = \{x \mid x \notin A\}$
- Exemplo. Seja $A = \{x \in \mathbb{N} \mid x < 10\} = \{0, 1, 2, \ldots, 9\}$. $\overline{A} = \{x \in \mathbb{N} \mid x \geq 10\} = \{10, 11, 12, \ldots\}$



Operadores de Conjuntos

Complemento

Propriedade

$$(x \notin A) \equiv (x \in \overline{A})$$

Operadores de Conjuntos

Identidades

$A \cup \emptyset = A$ $A \cap U = A$	*Identidade*
$A \cup U = U$ $A \cap \emptyset = \emptyset$	*Dominação*
$A \cup A = A$ $A \cap A = A$	*Idempotência*
$\overline{(\overline{A})} = A$	*Complementação*
$A \cup B = B \cup A$ $A \cap B = B \cap A$	*Comutatividade*

Operadores de Conjuntos

Identidades

$A \cup (B \cup C) = (A \cup B) \cup C$ $A \cap (B \cap C) = (A \cap B) \cap C$	*Associatividade*
$A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C)$ $A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C)$	*Distributividade*
$\overline{A \cup B} = \overline{A} \cap \overline{B}$ $\overline{A \cap B} = \overline{A} \cup \overline{B}$	*De Morgan*
$A \cup (A \cap B) = A$ $A \cap (A \cup B) = A$	*Absorção*
$A \cup \overline{A} = U$ $A \cap \overline{A} = \emptyset$	*Complemento*

Operadores de Conjuntos

Identidades

Prove que $\overline{A \cup B} = \overline{A} \cap \overline{B}$.

Operadores de Conjuntos

Identidades

Prove que $\overline{A \cup B} = \overline{A} \cap \overline{B}$.

$$
\begin{aligned}
& \overline{A \cup B} & \\
&= \{x \mid x \notin (A \cup B)\} & \text{[Def. Complemento]} \\
&= \{x \mid \neg(x \in (A \cup B))\} & \text{[Def. } \notin\text{]} \\
&= \{x \mid \neg(x \in A \ \vee \ x \in B)\} & \text{[Prop. } \cup\text{]} \\
&= \{x \mid \neg(x \in A) \ \wedge \ \neg(x \in B)\} & \text{[De Morgan (lógica)]} \\
&= \{x \mid x \notin A \ \wedge \ x \notin B\} & \text{[Def. } \notin\text{]} \\
&= \{x \mid x \in \overline{A} \ \wedge \ x \in \overline{B}\} & \text{[Prop. Complemento]} \\
&= \{x \mid x \in \overline{A} \cap \overline{B}\} & \text{[Prop. } \cap\text{]} \\
&= \overline{A} \cap \overline{B} & [\text{Prop}_1]
\end{aligned}
$$

Operadores de Conjuntos

Identidades

Exercício. Prove que $A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C)$.

Operadores de Conjuntos

Identidades

Exercício. Dadas as premissas $((x \in D) \to ((x \in A) \wedge (x \in C)))$, $(\neg(x \in B) \to (x \in D))$ e $(x \in \overline{B})$, conclua que $x \in (A \cup E)$.

Operadores de Conjuntos

Identidades

- Algumas provas podem ser feitas usando apenas identidades de conjuntos.
- Não precisamos usar a notação de construtores de conjuntos.
- Não precisamos usar lógica proposicional.

Operadores de Conjuntos

Identidades

Provar que $\overline{A \cup (B \cap C)} = (\overline{C} \cup \overline{B}) \cap \overline{A}$.

$$
\begin{aligned}
& \overline{A \cup (B \cap C)} & \\
& = \overline{A} \cap \overline{(B \cap C)} & \text{[De Morgan]} \\
& = \overline{A} \cap (\overline{B} \cup \overline{C}) & \text{[De Morgan]} \\
& = \overline{A} \cap (\overline{C} \cup \overline{B}) & \text{[Comutatividade]} \\
& = (\overline{C} \cup \overline{B}) \cap \overline{A} & \text{[Comutatividade]}
\end{aligned}
$$

Operadores de Conjuntos

União e Interseção Generalizadas

- *União generalizada* é a união de n conjuntos:
- $\bigcup_{i=1}^{n} A_i \; = \; A_1 \cup A_2 \cup \ldots \cup A_n$
- Exemplo. Seja $A_i = \{i\}$.
  Qual o conjunto $\bigcup_{i=0}^{2} A_i$?

Operadores de Conjuntos

União e Interseção Generalizadas

- *União generalizada* é a união de n conjuntos:
- $\bigcup_{i=1}^{n} A_i \;=\; A_1 \cup A_2 \cup \ldots \cup A_n$
- Exemplo. Seja $A_i = \{i\}$.
  Qual o conjunto $\bigcup_{i=0}^{2} A_i$?
- $\bigcup_{i=0}^{2} A_i = A_0 \cup A_1 \cup A_2 = \{0\} \cup \{1\} \cup \{2\} = \{0, 1, 2\}$.

Operadores de Conjuntos

União e Interseção Generalizadas

- *Interseção generalizada* é a interseção de n conjuntos:
- $\bigcap_{i=1}^{n} A_i \;=\; A_1 \cap A_2 \cap \ldots \cap A_n$
- Exercício. Seja $A_i = \{i\}$.
  Qual o conjunto $\bigcap_{i=0}^{2} A_i$?

Operadores de Conjuntos

União e Interseção Generalizadas

- Notações:
- $\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i = A_1 \cup A_2 \cup \ldots \cup A_n \cup \ldots$
- $\bigcup_{i \in I} A_i = \{x \mid \exists i \in I(x \in A_i)\}$
- Exemplo. Sejam $I = \{10, 2, 35\}$ e $A_i = \{i, i+1\}$. $\bigcup_{i \in I} A_i = A_{10} \cup A_2 \cup A_{35} = \{10, 11\} \cup \{2, 3\} \cup \{35, 36\} = \{10, 11, 2, 3, 35, 36\}$

Operadores de Conjuntos

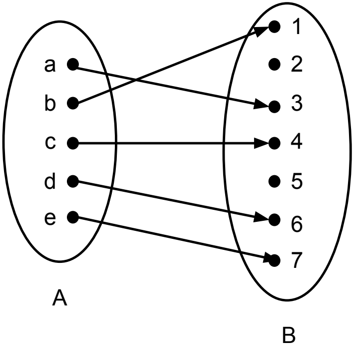
União e Interseção Generalizadas

- Notações:
- $\bigcap_{i=1}^{\infty} A_i = A_1 \cap A_2 \cap \ldots \cap A_n \cap \ldots$
- $\bigcap_{i \in I} A_i = \{x \mid \forall i \in I(x \in A_i)\}$
- Exercício. Sejam $I = \{1, 2, 3\}$ e $A_i = \{i, i+1, i+2\}$. Qual o conjunto $\bigcap_{i \in I} A_i$?

Funções

Introdução

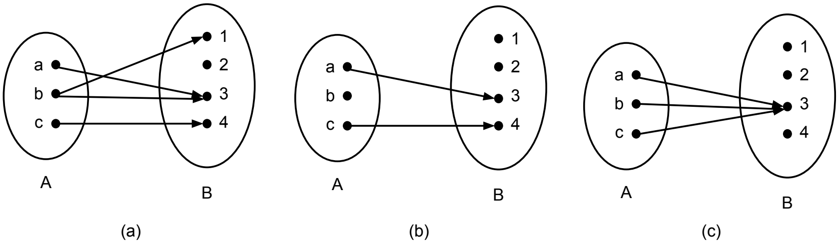
- Sejam A e B conjuntos *não-vazios*.
- Uma *função* f de A para B relaciona cada elemento de A com exatamente 1 elemento de B.



Funções

Introdução

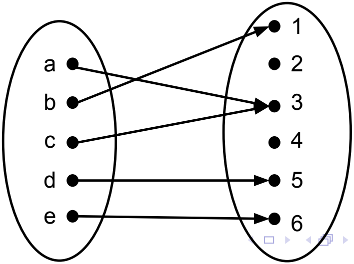
- Sejam A e B conjuntos *não-vazios*.
- Uma *função f* de A para B relaciona cada elemento de A com exatamente 1 elemento de B.
- Exercício. Estes diagramas representam funções?



Funções

Introdução

- Como saber se um mapeamento é uma função?
- Dica: pense no mapeamento como uma relação entre casais.
- O mapeamento f de A para B é uma função quando:
  - *Todos* elementos de A são casados; e
  - *Todos* elementos de A são monógamos.
- E quanto aos elementos de B? Não há restrição!! Podem ser casados (monógamos ou polígamos) ou solteiros.



Funções

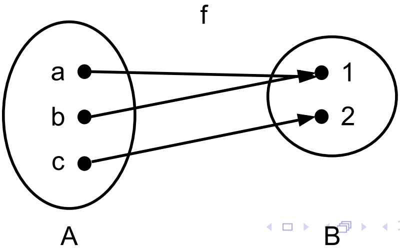
Introdução

- Uma função f de A para B é denotada por $f : A \to B$.
- Uma *relação* é qualquer subconjunto de $A \times B$.
- Exemplo. Sejam $A = \{a, b, c\}$ e $B = \{1, 2\}$.
  $A \times B = \{(a, 1), (a, 2), (b, 1), (b, 2), (c, 1), (c, 2)\}$.
  $R = \{(a, 1), (b, 1), (b, 2), (c, 2)\}$ é uma relação.

Funções

Introdução

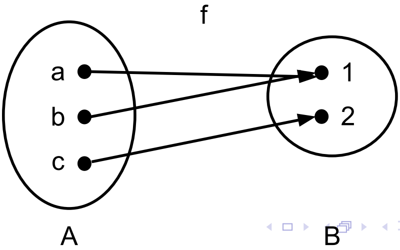
- Funções podem ser representadas por relações.



Funções

Introdução

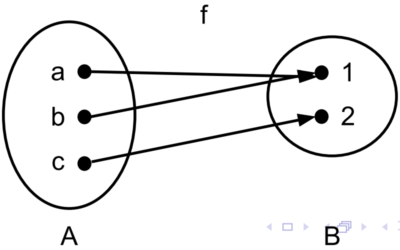
- Funções podem ser representadas por relações.
- Uma relação de A para B é uma função se ela contém exatamente 1 par (a, b) para cada elemento $a \in A$.



Funções

Introdução

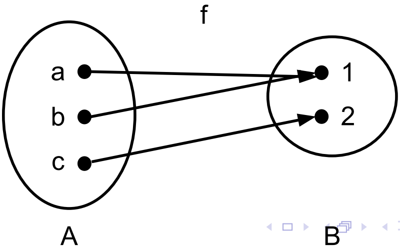
- Funções podem ser representadas por relações.
- Uma relação de A para B é uma função se ela contém exatamente 1 par (a, b) para cada elemento $a \in A$.
- Exemplo. $f = \{(a, 1), (b, 1), (c, 2)\}$ é uma função.



Funções

Introdução

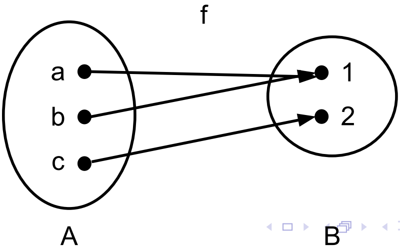
- Funções podem ser representadas por relações.
- Uma relação de A para B é uma função se ela contém exatamente 1 par (a, b) para cada elemento $a \in A$.
- Exemplo. $f = \{(a, 1), (b, 1), (c, 2)\}$ é uma função.
- Podemos também definir f listando seus mapeamentos: $f(a) = 1$, $f(b) = 1$ e $f(c) = 2$.



Funções

Introdução

- Funções podem ser representadas por relações.
- Uma relação de A para B é uma função se ela contém exatamente 1 par (a, b) para cada elemento $a \in A$.
- Exemplo. $f = \{(a, 1), (b, 1), (c, 2)\}$ é uma função.
- Podemos também definir f listando seus mapeamentos: $f(a) = 1$, $f(b) = 1$ e $f(c) = 2$.
- Dizemos que $f(a)$ é a *aplicação* de f em a, e seu resultado é b.



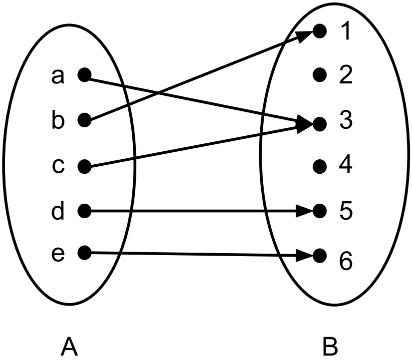
Exercício.

- Sejam $A = \{a, b, c\}$, $B = \{1, 2\}$,
  $A \times B = \{(a, 1), (a, 2), (b, 1), (b, 2), (c, 1), (c, 2)\}$,
  $R_1 = \{(a, 1), (b, 1), (b, 2), (c, 2)\}$,
  $R_2 = \{(b, 2), (c, 2)\}$,
  $R_3 = \{(a, 1), (b, 1), (c, 1), (c, 2)\}$,
  $R_4 = \{(a, 1), (b, 1), (c, 1)\}$ e
  $R_5 = \{(a, 1), (b, 2), (c, 1)\}$.
- $A \times B$ é uma função? E quais R_i são funções?

Funções

Introdução

- Seja f uma função de A para B.
- A é o *domínio* de f.
- Exemplo:

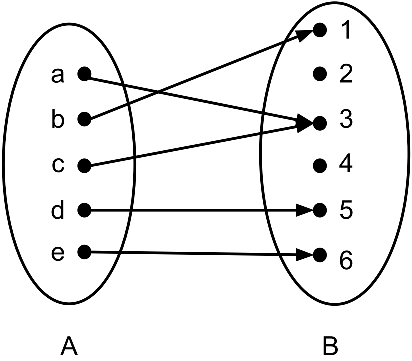


- O domínio de f é $A = \{a, b, c, d, e\}$.

Funções

Introdução

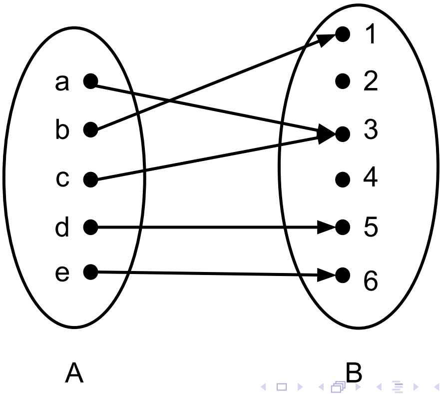
- B é o *contradomínio* de f.
- Exemplo:



- O contradomínio de f é $B = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$.

Funções
Introdução

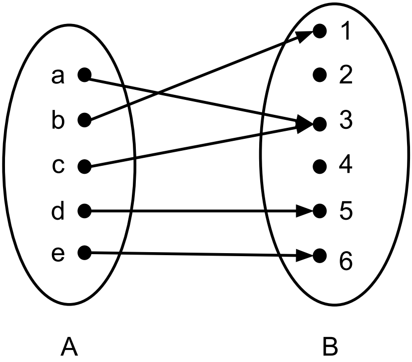
- Seja $f(x) = y$.
  - y é a *imagem* de x.
  - x é a *pré-imagem* de y.
- Exemplo:



Funções

Introdução

- O *conjunto imagem* (*range*) é o conjunto de todas as imagens de f.
- Exemplo:



- O conjunto imagem de f é $\{1, 3, 5, 6\}$.

Funções

Introdução

- Uma função é definida pelo seu domínio, contradomínio e mapeamento.
- Duas funções são iguais se elas têm o mesmo domínio, contradomínio e mapeamento.

Funções

Introdução

- Sejam f_1 e f_2 funções de A para $\mathbb{R}$. Definimos 2 novas funções chamadas de "$f_1 + f_2$" e "$f_1 f_2$".
- $(f_1 + f_2)(x) = f_1(x) + f_2(x)$
- $(f_1 f_2)(x) = f_1(x) f_2(x)$
- Exercício. Sejam $f_1(x) = x + 1$ e $f_2(x) = x^2 + 3$. Quem são $f_1 + f_2$ e $f_1 f_2$?

Funções

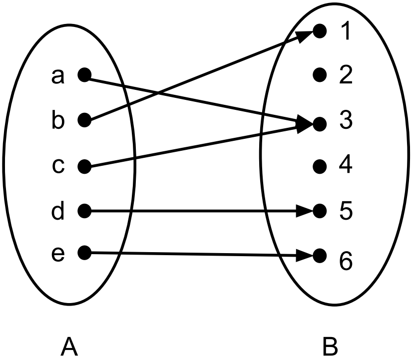
Introdução

- Sejam $f : A \to B$ e $S \subseteq A$.
- A *imagem de* S *sob* f é o conjunto $\{f(s) \mid s \in S\}$.
- Notação. $f(S) = \{f(s) \mid s \in S\}$.

Atenção. Esta notação é ambígua! $f(S)$ é o conjunto de todas imagens de S, e não o resultado da aplicação de f em S.

Funções
Introdução

- Sejam $f : A \to B$ e $S \subseteq A$.
- A *imagem de S sob f* é o conjunto $\{f(s) \mid s \in S\}$.
- Exercício. Seja f como abaixo:

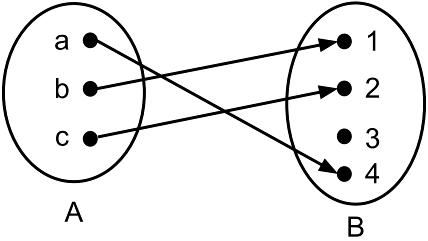


- Seja $S = \{a, c, d\}$. Quem é $f(S)$?

Funções

Injetivas e Sobrejetivas

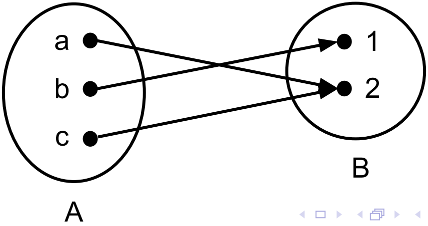
- A função $f : A \to B$ é *injetiva* (*one-to-one*) se e somente se $(f(a) = f(b)) \to (a = b)$.
- Ou seja, elementos de A se relacionam com elementos diferentes de B.
- Seguindo a analogia dos casais: f é injetiva se não há polígamos em B.



Funções

Injetivas e Sobrejetivas

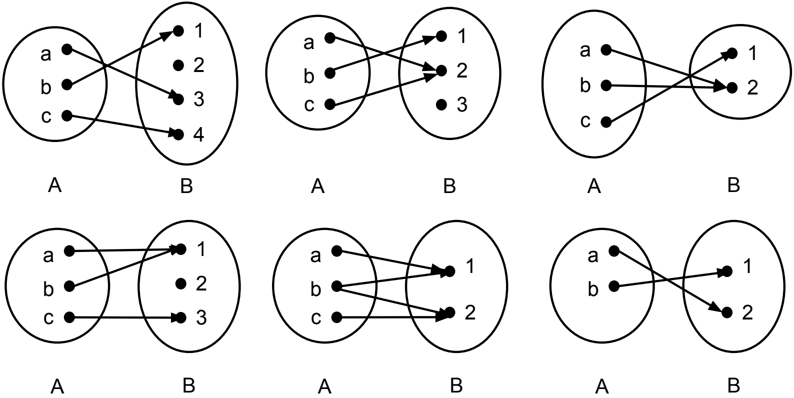
- A função $f : A \to B$ é *sobrejetiva* (*onto*) se e somente se para todo elemento $b \in B$, existe um $a \in A$ tal que $f(a) = b$.
- Alternativamente, o contradomínio é igual ao conjunto imagem.
- Ou seja, todos os elementos de B se relacionam com alguém de A.
- Seguindo a analogia dos casais: f é sobrejetiva se não há solteiros em B.



Funções

Injetivas e Sobrejetivas

Exercício. Defina se os mapeamentos são relações, funções, funções injetivas ou funções sobrejetivas.



Funções

Injetivas e Sobrejetivas

Exercício. Defina se os mapeamentos são relações, funções, funções injetivas ou funções sobrejetivas.

- Sejam A o conjunto dos carros de **Recife** e B o conjunto das placas dos carros do **Brasil**. Sejam $a \in A$ e $b \in B$. $f_1(a) = b$ se, e somente se, o carro a tem a placa b.
- Sejam A o conjunto dos atores que já atuaram em pelo menos um filme e B o conjunto das filmes. Sejam $a \in A$ e $b \in B$. $f_2(a) = b$ se, e somente se, o ator a atuou no filme b.
- Sejam A o conjunto dos alunos de EC e B o conjunto das idades dos alunos de EC. Sejam $a \in A$ e $b \in B$. $f_3(a) = b$ se, e somente se, o aluno a tem a idade b.

Funções

Injetivas e Sobrejetivas

Exercício. Defina se os mapeamentos são relações, funções, funções injetivas ou funções sobrejetivas.

- Sejam A o conjunto dos atletas e B o conjunto das medalhas de ouro olímpicas. Sejam $a \in A$ e $b \in B$. $f_1(a) = b$ se, e somente se, o atleta a ganhou a medalha b.
- Sejam A o conjunto das contas correntes e B o conjunto dos reais. Sejam $a \in A$ e $b \in B$. $f_2(a) = b$ se, e somente se, o saldo de a é b.
- Sejam A o conjunto dos celulares de 1 chip e com 1 chip inserido e devidamente habilitado e B o conjunto das operadoras de celulares existentes no mercado hoje. Sejam $a \in A$ e $b \in B$. $f_3(a) = b$ se, e somente se, o celular a utiliza a operadora b.

Funções

Injetivas e Sobrejetivas

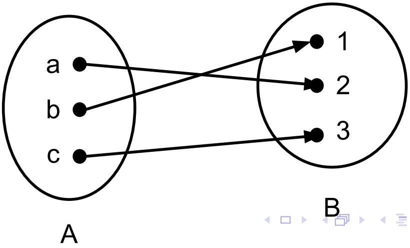
ATENÇÃO

- Injetividade e sobrejetividade são conceitos independentes.
- Ser ou não injetiva não implica em ser ou não sobrejetiva.
- Exemplos de justificativas erradas que aparecem em provas:
  - "$f(x)$ não é injetiva, portanto ela é apenas sobrejetiva." (ERRADO)
  - "$f(x)$ não é sobrejetiva, portanto ela é injetiva." (ERRADO)
  - "$f(x)$ é injetiva, portanto não é sobrejetiva." (ERRADO)
  - "$g(x)$ é sobrejetiva, portanto não é injetiva." (ERRADO)

Funções

Bijetivas

- Uma função $f : A \to B$ é bijetiva se ela é injetiva e sobrejetiva.
- É chamada *one-to-one correspondence* porque mapeia-se cada elemento de A em exatamente 1 elemento de B e todos elementos de B tem seu par.
- Analogia dos casais: f é bijetiva se B contém apenas monógamos (não há solteiros!).



Funções

Bijetivas

- Exercício. Faça o gráfico da função $g : A \to B$, onde $A = \{a, b, c, d, e, f\}$, $B = \{10, 20, 30, 40, 50, 60\}$ e $g(a) = 50$, $g(b) = 20$, $g(c) = 60$, $g(d) = 10$, $g(e) = 30$ e $g(f) = 40$.
- Esta função é bijetiva?

Funções

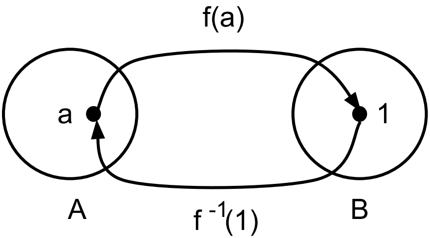
Bijetivas

- A *função identidade* de A é a função $\iota : A \to A$ tal que $\iota_A(x) = x$.
- É a função que mapeia x nele mesmo.
- É uma função bijetiva.

Funções

Inversa e Composta

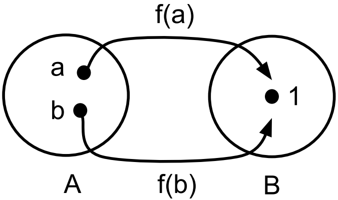
- Seja $f : A \to B$.
- A *função inversa* de f desfaz o que f faz.
- f^{-1} mapeia cada elemento $b \in B$ no elemento $a \in A$ tal que $f(a) = b$. Ou seja, $f^{-1}(b) = a$.



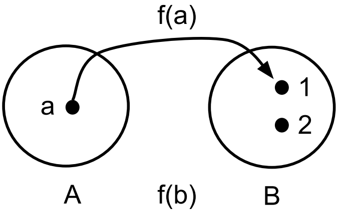
Funções

Inversa e Composta

- Funções inversas só existem para *funções bijetivas*.
- Por que?
- E se f não for injetiva?
- E se f não for sobrejetiva?



Não injetiva



Não sobrejetiva

Funções

Inversa e Composta

- Exercício. Seja $g : A \to B$, onde $A = \{a, b, c, d, e, f\}$, $B = \{10, 20, 30, 40, 50, 60\}$ e $g(a) = 50$, $g(b) = 20$, $g(c) = 60$, $g(d) = 10$, $g(e) = 30$ e $g(f) = 40$
- Esta função é invertível (possui inversa)?
- Se sim, defina a função g^{-1}. Senão, justifique.

Funções

Inversa e Composta

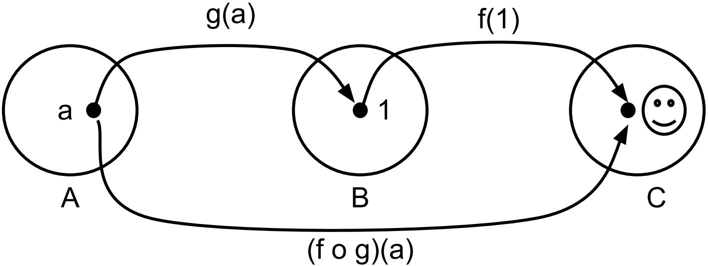
Exercícios.

- A função $f : \mathbb{Z} \to \mathbb{Z}$ definida como $f(x) = x + 1$ é invertível? E qual é sua inversa?
- A função $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definida como $f(x) = x^2$ é invertível? E qual é sua inversa?

Funções

Inversa e Composta

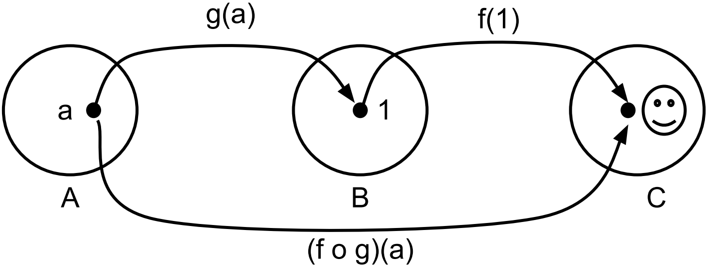
- Sejam $g : A \rightarrow B$ e $f : B \rightarrow C$.
- A *função composta* $(f \circ g)$ leva elementos de A para C.
- $(f \circ g)(a) = f(g(a))$.



Funções

Inversa e Composta

- Sejam $g : A \to B$ e $f : B \to C$.
- A *função composta* $(f \circ g)$ leva elementos de A para C.
- $(f \circ g)(a) = f(g(a))$.
- $(f \circ g)$ só existe quando o conjunto imagem de g é um subconjunto do domínio de f.



Funções

Inversa e Composta

Exercício.

- Sejam $f(x) = 3x + 8$ e $g(x) = x^2 + x - 3$.
- Qual a função $(f \circ g)(x)$?
- Qual a função $(g \circ f)(x)$?

Funções

Inversa e Composta

- Sejam $f : A \to B$ e $f^{-1} : B \to A$.
- Sabemos que
  - se $f(a) = b$, então $f^{-1}(b) = a$
  - e vice-versa.
- $(f^{-1} \circ f)(a) = f^{-1}(f(a)) = f^{-1}(b) = a$
- $(f \circ f^{-1})(b) = f(f^{-1}(b)) = f(a) = b$

Funções

Inversa e Composta

- Sejam $f : A \to B$ e $f^{-1} : B \to A$.
- Sabemos que
  - se $f(a) = b$, então $f^{-1}(b) = a$
  - e vice-versa.
- $(f^{-1} \circ f)(a) = f^{-1}(f(a)) = f^{-1}(b) = a$
- $(f \circ f^{-1})(b) = f(f^{-1}(b)) = f(a) = b$

- $(f^{-1} \circ f) = \iota_A$
- $(f \circ f^{-1}) = \iota_B$
- $(f^{-1})^{-1} = f$

Funções

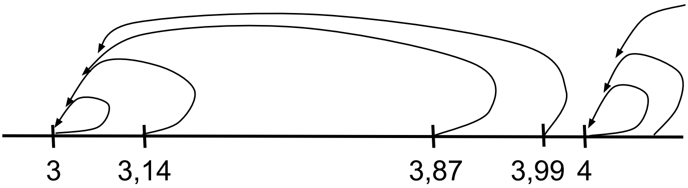
Gráficos das Funções

- O *gráfico* da função $f : A \to B$ é o conjunto dos pares $\{(a, b) \mid a \in A \ \land \ f(a) = b\}$.
- Em geral o termo *gráfico* é usado para se referir ao desenho dos pares (e não ao seu conjunto).

Funções

Algumas Funções Importantes

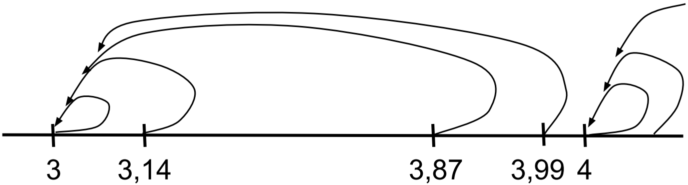
- Função *chão* (*floor*): $\lfloor x \rfloor$
- $\lfloor 3 \rfloor = 3$
- $\lfloor 3,14 \rfloor = 3$
- $\lfloor 3,99999999 \rfloor = 3$



Funções

Algumas Funções Importantes

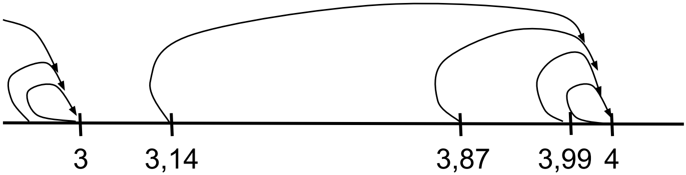
- $\lfloor x \rfloor$ é o maior inteiro menor ou igual a x.
- Exercício. Calcule $\lfloor 1/2 \rfloor$, $\lfloor -2 \rfloor$ e $\lfloor -1/2 \rfloor$.



Funções

Algumas Funções Importantes

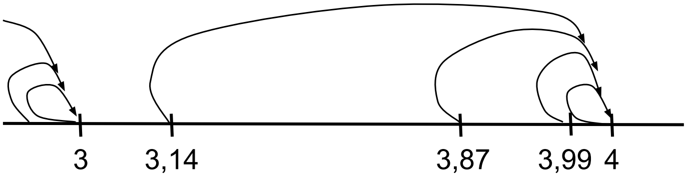
- Função *teto* (*ceiling*): $\lceil x \rceil$
- $\lceil 3 \rceil = 3$
- $\lceil 3,0000001 \rceil = 4$
- $\lceil 3,99999999 \rceil = 4$
- $\lceil 4 \rceil = 4$



Funções

Algumas Funções Importantes

- $\lceil x \rceil$ é o menor inteiro maior ou igual a x.
- Exercício. Calcule $\lceil 1/2 \rceil$, $\lceil -2 \rceil$ e $\lceil -1/2 \rceil$.



Funções

Algumas Funções Importantes

Exercício.

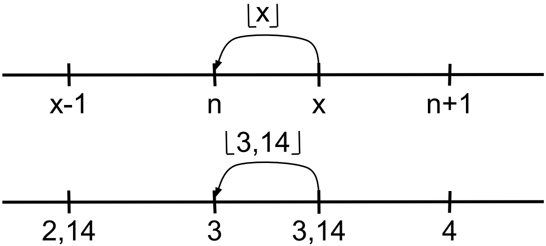
- Desenhe nos eixos x e y as funções chão e teto.
- Lembre-se: o eixo x é dos reais e o eixo y é dos inteiros.

Funções

Algumas Funções Importantes

Propriedades.

- $\lfloor x \rfloor = n$ se, e somente se, $n \leq x < n + 1$
- $\lfloor x \rfloor = n$ se, e somente se, $x - 1 < n \leq x$

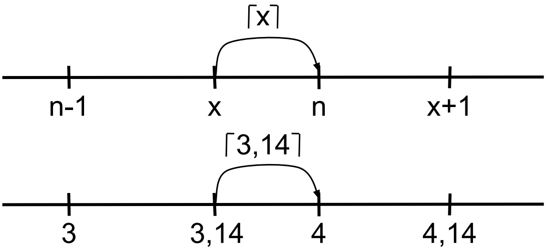


Funções

Algumas Funções Importantes

Propriedades.

- $\lceil x \rceil = n$ se, e somente se, $n - 1 < x \leq n$
- $\lceil x \rceil = n$ se, e somente se, $x \leq n < x + 1$

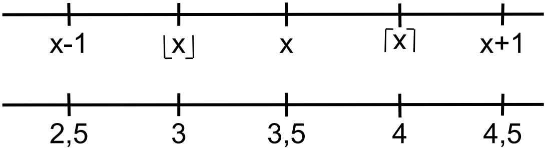


Funções

Algumas Funções Importantes

Propriedades.

- $x - 1 < \lfloor x \rfloor \leq x \leq \lceil x \rceil < x + 1$

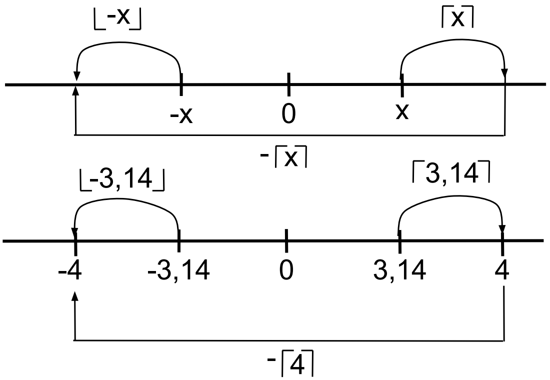


Funções

Algumas Funções Importantes

Propriedades.

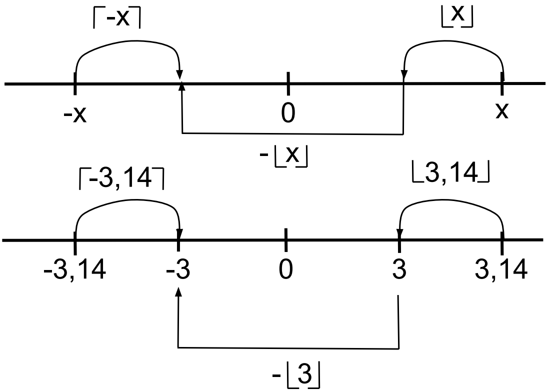
- $\lfloor -x \rfloor = -\lceil x \rceil$



Funções
Algumas Funções Importantes

Propriedades.

- $\lceil -x \rceil = -\lfloor x \rfloor$

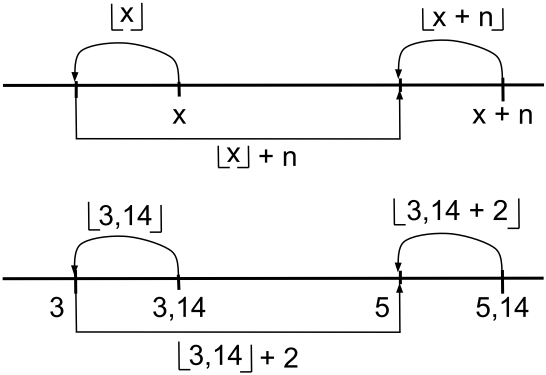


Funções

Algumas Funções Importantes

Propriedades. Seja n um número inteiro.

- $\lfloor x + n \rfloor = \lfloor x \rfloor + n$

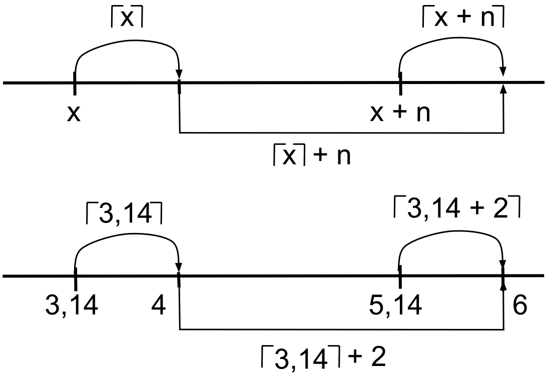


Funções

Algumas Funções Importantes

Propriedades. Seja n um número inteiro.

- $\lceil x + n \rceil = \lceil x \rceil + n$



Sequências e Somatórios

Cardinalidade

- Qual a cardinalidade de conjuntos infinitos?
- Definimos que A e B têm a *mesma cardinalidade* se, e somente se, existe uma bijeção de A para B.

Sequências e Somatórios

Cardinalidade

Tipos de cardinalidade

- Contável ou enumerável
  - Conjuntos finitos
  - Conjuntos infinitos com a mesma cardinalidade dos inteiros positivos ($\mathbb{Z}^+$)
  - Esta cardinalidade é denotada por $\aleph_0$ (*aleph null*)
- Não-enumerável (conjuntos que não são contáveis)

Sequências e Somatórios

Cardinalidade

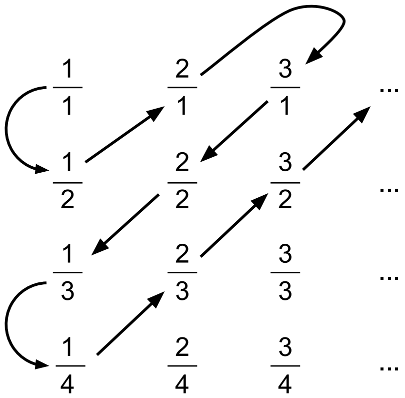
- Os ímpares positivos são contáveis.
- Existe uma função bijetiva entre os ímpares positivos e $\mathbb{Z}^+$: $f(n) = 2n - 1$.

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11
$\updownarrow$	$\updownarrow$	$\updownarrow$	$\updownarrow$	$\updownarrow$	$\updownarrow$	$\updownarrow$	$\updownarrow$	$\updownarrow$	$\updownarrow$	$\updownarrow$
1	3	5	7	9	11	13	15	17	19	21

Sequências e Somatórios

Cardinalidade

- Os racionais positivos também são contáveis.



Sequências e Somatórios

Cardinalidade

- Os reais são não-enumeráveis.
- Suponha que os reais são *enumeráveis*.
- Liste todos os reais entre 0 e 1. Use a função d_i para construir um novo real r_0 não pertencente à lista original e contradizendo, portanto, a suposição.

$$d_i = \begin{cases} 4 & se \ d_{ii} \neq 4 \\ 5 & se \ d_{ii} = 4 \end{cases}$$

r1 = 0, 2 3 7 8 4 1 0 2 ...

r2 = 0, 4 4 5 9 0 1 3 8 ...

r3 = 0, 0 9 1 1 8 7 6 4 ...

r4 = 0, 8 0 5 5 3 9 0 0 ...

r0 = 0, 4 5 4 4 ...

Sequências e Somatórios

Cardinalidade

- Para que estudar cardinalidade?

Sequências e Somatórios

Cardinalidade

- Para que estudar cardinalidade?
- Para uma certa linguagem, existem infinitos programas possíveis. Mas é um infinito enumerável.

Sequências e Somatórios

Cardinalidade

- Para que estudar cardinalidade?
- Para uma certa linguagem, existem infinitos programas possíveis. Mas é um infinito enumerável.
- Existem infinitas funções matemáticas. Mas é um infinito não-enumerável.

Sequências e Somatórios

Cardinalidade

- Para que estudar cardinalidade?
- Para uma certa linguagem, existem infinitos programas possíveis. Mas é um infinito enumerável.
- Existem infinitas funções matemáticas. Mas é um infinito não-enumerável.
- Portanto, nem toda função matemática pode ser computada.