Contagem

Centro de Informática
UFPE

Conceitos Básicos de Contagem

Introdução

- Quantos números de celular podem existir em Pernambuco?
- Quantos computadores podem existir na Internet?
- Quantos carros podem ser emplacados no Brasil?
- Quantas vezes um algoritmo pode executar o mesmo laço?

Conceitos Básicos de Contagem

Princípios Básicos

Exemplo (Regra do Produto). Lanchonete MatemáticaD

- Bebida: Coca-cola, Guaraná e Água
- Comida: Misto, Hamburguer, Batata Frita e Sorvete

Conceitos Básicos de Contagem

Princípios Básicos

Exemplo (Regra do Produto). Lanchonete MatemáticaD

- Bebida: Coca-cola, Guaraná e Água
- Comida: Misto, Hamburguer, Batata Frita e Sorvete
- Quantas opções de compra existem se quisermos comprar exatamente 1 bebida e exatamente 1 comida?

Conceitos Básicos de Contagem

Princípios Básicos

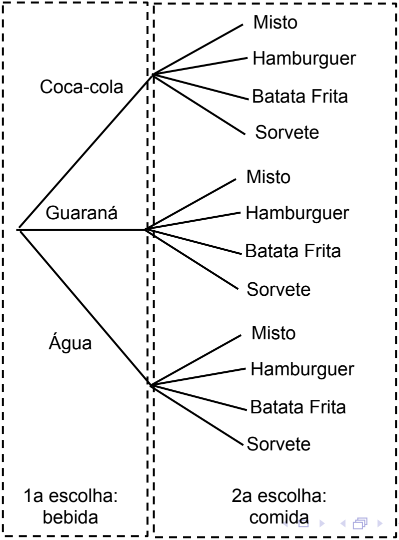
Exemplo (Regra do Produto). Lanchonete MatemáticaD

- Bebida: Coca-cola, Guaraná e Água
- Comida: Misto, Hamburguer, Batata Frita e Sorvete
- Quantas opções de compra existem se quisermos comprar exatamente 1 bebida e exatamente 1 comida?
- Temos que contar as opções em duas etapas:
  - Bebida
  - E, para cada bebida escolhida, contaremos quantas opções de comida temos

Conceitos Básicos de Contagem

Princípios Básicos

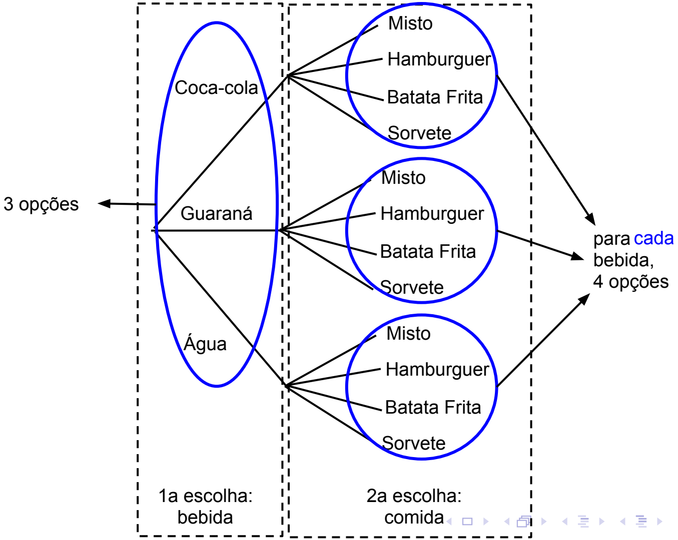
Exemplo. Lanchonete Matemática Discreta



Conceitos Básicos de Contagem

Princípios Básicos

Exemplo. Lanchonete Matemática Discreta



Conceitos Básicos de Contagem

Princípios Básicos

Exemplo. Lanchonete Matemática Discreta

- Bebida: Coca-cola, Guaraná e Água
- Comida: Misto, Hamburguer, Batata Frita e Sorvete
- Quantas opções de compra existem se quisermos comprar exatamente 1 bebida e exatamente 1 comida?
- Temos que contar as opções em duas etapas:
  - Bebida
  - E, para cada bebida escolhida, contaremos quantas opções de comida temos
  - (3 opções de bebida) $\times$ (4 opções de comida)
  - Resposta: $3 \cdot 4 = 12$

Conceitos Básicos de Contagem

Princípios Básicos

Regra do Produto

- Suponha que temos 2 tarefas t_1 e t_2 a serem executadas sequencialmente.
  Por exemplo, escolher bebida (t_1) e depois escolher comida (t_2).

Conceitos Básicos de Contagem

Princípios Básicos

Regra do Produto

- Suponha que temos 2 tarefas t_1 e t_2 a serem executadas sequencialmente.
  Por exemplo, escolher bebida (t_1) e depois escolher comida (t_2).
- Existem n_1 opções de fazer t_1.
  Por exemplo, existem 3 opções de escolha de bebida.

Conceitos Básicos de Contagem

Princípios Básicos

Regra do Produto

- Suponha que temos 2 tarefas t_1 e t_2 a serem executadas sequencialmente.
  Por exemplo, escolher bebida (t_1) e depois escolher comida (t_2).
- Existem n_1 opções de fazer t_1.
  Por exemplo, existem 3 opções de escolha de bebida.
- E, para cada uma das opções de fazer t_1, existem n_2 maneiras de fazer t_2.
  Por exemplo. Para cada bebida, existem 4 opções de comidas.

Conceitos Básicos de Contagem

Princípios Básicos

Regra do Produto

- Suponha que temos 2 tarefas t_1 e t_2 a serem executadas sequencialmente.
  Por exemplo, escolher bebida (t_1) e depois escolher comida (t_2).
- Existem n_1 opções de fazer t_1.
  Por exemplo, existem 3 opções de escolha de bebida.
- E, para cada uma das opções de fazer t_1, existem n_2 maneiras de fazer t_2.
  Por exemplo. Para cada bebida, existem 4 opções de comidas.
- Então, existem $n_1 \cdot n_2$ opções de fazer t_1 seguido de t_2.
  Por exemplo. Existem $3 \cdot 4$ opções de escolher bebida e depois comida.

Conceitos Básicos de Contagem

Princípios Básicos

Exercício.

- Temos 5 presentes para distribuir: 1 pendrive, 1 televisão, 1 mouse, 1 carro e 1 celular
- Fulano tem prioridade em escolher 1 presente primeiro.
- Sicrano pode escolher 1 presente depois de Fulano entre os presentes restantes.
- De quantas formas diferentes podemos distribuir os presentes entre Fulano e Sicrano?

Conceitos Básicos de Contagem

Princípios Básicos

Exercício.

- Placas de carro são definidas por 3 letras (entre 26 do alfabeto) e 4 números (de 0 a 9).
- Quantas placas podem ser montadas?
- Obs. Neste exercício, temos 7 tarefas a serem executadas sequencialmente: escolha da primeira letra (t_1), escolha da segunda letra (t_2), escolha da terceira letra (t_3), escolha do primeiro dígito (t_4), etc. Cada tarefa tem n_1, n_2, ..., n_7

Conceitos Básicos de Contagem

Princípios Básicos

Regra do Produto (estendido)

- Suponha que temos m tarefas $t_1, t_2, \ldots, t_m$ a serem executadas sequencialmente.
- Existem n_i opções de fazer t_i
- Então, existem $n_1 \cdot n_2 \cdot \ldots \cdot n_m$ opções de fazer $t_1, t_2, \ldots, t_m$ sequencialmente.

Conceitos Básicos de Contagem

Princípios Básicos

Exercício.

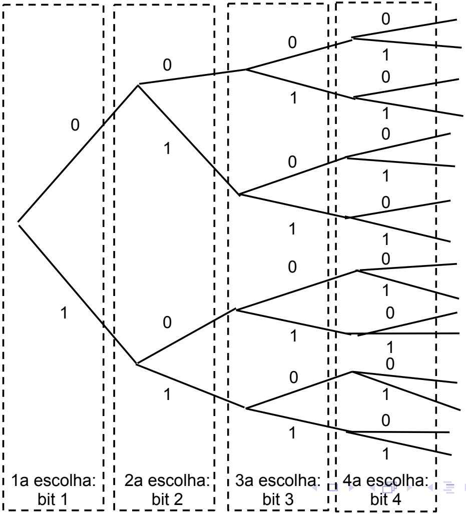
- Quantos strings de 4 bits existem?
- Obs. O maior desafio é transformar esse enunciado em um problema de execução de tarefas sequenciais com n opções cada.

Conceitos Básicos de Contagem

Princípios Básicos

Exercício.

- Quantos strings de 4 bits existem? $2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 = 2^4$



Conceitos Básicos de Contagem

Princípios Básicos

Exercício.

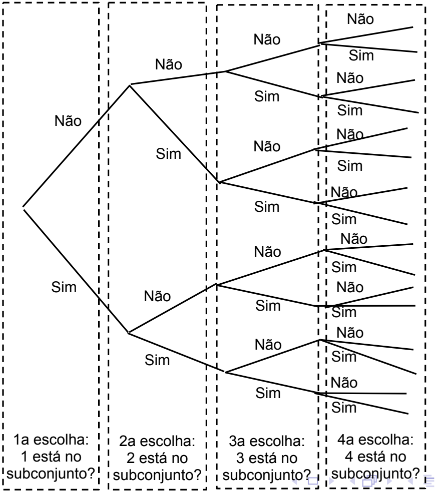
- Quantos subconjuntos o conjunto $\{1, 2, 3, 4\}$ possui?

Conceitos Básicos de Contagem

Princípios Básicos

Exercício.

- Quantos subconjuntos o conjunto $\{1, 2, 3, 4\}$ possui?



Conceitos Básicos de Contagem

Princípios Básicos

Exercício.

- Quantas funções $f : A \rightarrow B$ podem ser definidas sabendo-se que o domínio A tem m elementos e o contradomínio B tem n elementos?

Conceitos Básicos de Contagem

Princípios Básicos

Exercício.

- Quantas funções $f : A \to B$ podem ser definidas sabendo-se que o domínio A tem m elementos e o contradomínio B tem n elementos?
- Resposta: Para cada elemento do domínio, temos n escolhas no contradomínio: $n \cdot n \cdot \ldots \cdot n = n^m$.

Conceitos Básicos de Contagem

Princípios Básicos

Exemplo (Regra da Soma).

- Queremos selecionar 1 monitor para Matemática Discreta.
- Temos 20 candidatos de Engenharia da Computação e 15 candidatos de Sistemas de Informação.
- De quantas formas possíveis podemos selecionar este monitor?

Conceitos Básicos de Contagem

Princípios Básicos

Exemplo (Regra da Soma).

- Queremos selecionar 1 monitor para Matemática Discreta.
- Temos 20 candidatos de Engenharia da Computação e 15 candidatos de Sistemas de Informação.
- De quantas formas possíveis podemos selecionar este monitor?
- (20 opções em EC) $+$ (15 opções em SI) $=$ 35.

Conceitos Básicos de Contagem

Princípios Básicos

Regra da Soma.

- Suponha que temos 1 tarefa que possa ser executada de n_1 ou de n_2 maneiras (mas não ambos).
  Por exemplo, podemos selecionar 1 monitor de 20 maneiras (escolhendo alguém de EC) ou de 15 maneiras (escolhendo alguém de SI)

Conceitos Básicos de Contagem

Princípios Básicos

Regra da Soma.

- Suponha que temos 1 tarefa que possa ser executada de n_1 ou de n_2 maneiras (mas não ambos).
  Por exemplo, podemos selecionar 1 monitor de 20 maneiras (escolhendo alguém de EC) ou de 15 maneiras (escolhendo alguém de SI)
- Então, existem $n_1 + n_2$ maneiras de executar a tarefa.
  Por exemplo, existem $20 + 15$ maneiras de selecionar 1 monitor.

Conceitos Básicos de Contagem

Princípios Básicos

Exercício.

- Quantos números de celulares são possíveis nos formatos $8XXX-XXXX$ e $9XXX-XXXX$, onde $X \in \{0,1,2,3,4,5,6,7,8,9\}$?

Conceitos Básicos de Contagem

Princípios Básicos

Exercício.

- Quantos números de celulares existem nos formatos $8XXX-XXXX$ e $9XXX-XXXX$, onde $X \in \{0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9\}$?
- Resposta: $(10^7) + (10^7)$.

Conceitos Básicos de Contagem

Princípios Básicos

Exercício.

- Os nomes de variáveis da linguagem BASIC podem ter 1 ou 2 caracteres.
- O primeiro caractere tem que ser uma letra a, b, ..., ou z.
- O segundo caractere pode ser alfanumérico (letra minúscula ou número).
- Quantos nomes de variáveis são possíveis de declarar?

Conceitos Básicos de Contagem

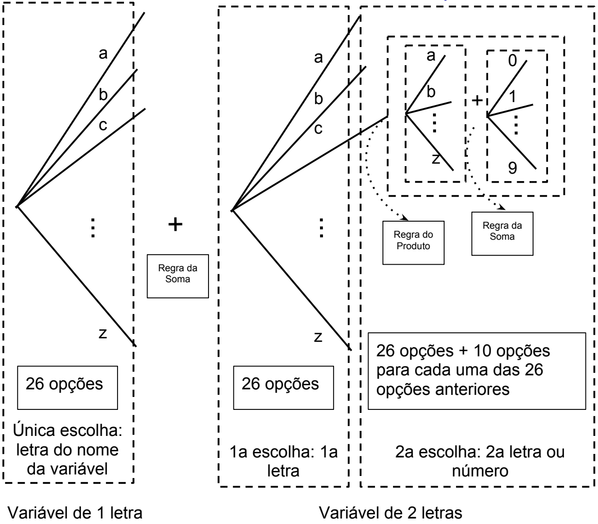
Princípios Básicos

Exercício.

- Os nomes de variáveis da linguagem BASIC podem ter 1 ou 2 caracteres.
- O primeiro caractere tem que ser uma letra a, b, ..., ou z.
- O segundo caractere pode ser alfanumérico (letra minúscula ou número).
- Quantos nomes de variáveis são possíveis de declarar?
- Resposta: Podemos declarar variáveis de 1 caractere ou 2 caracteres. Para variáveis de 1 caractere, temos 26 opções. Para variáveis de 2 caracteres, temos 26 opções para o primeiro caractere e $(26 + 10)$ opções para o segundo caractere: ou seja, temos $26 \cdot (26 + 10)$ opções. Total: $26 + (26 \cdot (26 + 10)) = 962$.

Conceitos Básicos de Contagem

Princípios Básicos



Resposta: 26 + (26 * (26 + 10)) = 962

Conceitos Básicos de Contagem

Princípios Básicos

Exemplo (Princípio da Inclusão-Exclusão).

- Queremos selecionar 1 programador para trabalhar na empresa MatemáticaD.
- Temos 12 candidatos formados em Engenharia da Computação e 10 candidatos formados em Sistemas de Informação. Destes, 5 pertencem a ambos os grupos, pois são formados nos dois cursos.
- De quantas formas possíveis podemos selecionar este programador?

Conceitos Básicos de Contagem

Princípios Básicos

Exemplo (Princípio da Inclusão-Exclusão).

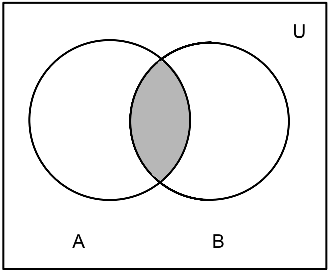
- Queremos selecionar 1 programador para trabalhar na empresa MatemáticaD.
- Temos 12 candidatos formados em Engenharia da Computação e 10 candidatos formados em Sistemas de Informação. Destes, 5 pertencem a ambos os grupos, pois são formados nos dois cursos.
- De quantas formas possíveis podemos selecionar este programador?
- $12 + 10 - 5 = 17$

Conceitos Básicos de Contagem

Princípios Básicos

Princípio da Inclusão-Exclusão

- Relembrando: $|A \cup B| = |A| + |B| - |A \cap B|$

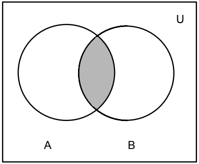


Conceitos Básicos de Contagem

Princípios Básicos

Princípio da Inclusão-Exclusão

- Uma tarefa pode ser feita de 2 maneiras: n_1 maneiras ou n_2 maneiras.
  Por exemplo, selecionar 1 programador entre os 12 formados em EC ou 10 formados SI.
- Algumas destas maneiras têm interseção entre si.
  Por exemplo, 5 candidatos são formados em EC e SI
- De quantas maneiras podemos realizar a tarefa? Temos que somar $n_1 + n_2$ e subtrair a quantidade de interseções.
  Por exemplo, $10 + 12 - 5$.



Conceitos Básicos de Contagem

Princípios Básicos

Exercício.

- Quantos strings de 8 bits podem ser criados seguindo o padrão *1bbbbbbb* ou *bbbbbb00* (ou ambos), onde $b \in \{0, 1\}$?

Conceitos Básicos de Contagem

Princípios Básicos

Exercício.

- Quantos strings de 8 bits podem ser criados seguindo o padrão *1bbbbbbb* ou *bbbbbb00* (ou ambos), onde $b \in \{0,1\}$?
- Resposta: $2^7 + 2^6 - 2^5 = 160$

Exercícios recomendados

- Seção 5.1: do 1 ao 38 (no mínimo)
- Discrete Mathematics and Its Applications
  Kenneth Rosen, 6a edição

1. Conceitos Básicos de Contagem

2. Princípio da Casa de Pombos

Princípio da Casa de Pombos

Introdução

- Tenho 9 casas e 10 pombos.
  Então, alguma casa tem pelo menos 2 pombos.

Princípio da Casa de Pombos

Introdução

- Tenho 9 casas e 10 pombos.
  Então, alguma casa tem pelo menos 2 pombos.
- Por que pelo menos 2 pombos e não exatamente 2 pombos?

Princípio da Casa de Pombos

Introdução

- Seja k um inteiro positivo.
- Suponha que pelo menos $k+1$ objetos têm que ser colocados em k caixas.
- Então, pelo menos 1 caixa contém pelo menos 2 objetos.

Princípio da Casa de Pombos

Introdução

Exemplo.

- Temos as salas de aula $D001$, $D002$, $D003$ e $D004$.
- Das 13:00 às 15:00 nas terças-feiras temos aulas de 6 disciplinas diferentes.
- Haverá pelo menos 1 sala alocada para pelo menos 2 turmas?

Princípio da Casa de Pombos

Introdução

Exemplo.

- Temos 60 alunos em Matemática Discreta.
- As médias finais do curso são valores inteiros de 0 a 10.
- Haverá alunos com médias iguais?

  O desafio é entender quem faz o papel das casas e quem faz o papel dos pombos.

Princípio da Casa de Pombos

Introdução

Exercício.

- Seja f uma função de A para B.
- Sabemos que $|A| > k$ e $|B| = k$.
- É possível f ser uma função sobrejetiva?
- É possível f ser uma função injetiva?

Princípio da Casa de Pombos

Introdução

Exercício.

- Seja f uma função de A para B.
- Sabemos que $|A| > k$ e $|B| = k$.
- É possível f ser uma função sobrejetiva?
- É possível f ser uma função injetiva?
- Resposta: Vendo as casas como sendo os k elementos de B e os pombos como sendo os pelo menos $k+1$ elementos de A, f pode ser sobrejetiva, mas não pode ser injetiva.

Princípio da Casa de Pombos

Introdução

Exercício.

- 400 pessoas estão presentes a uma peça de teatro.
- Qual a probabilidade de 2 delas fazerem aniversário no mesmo dia e mesmo mês (ignorando-se o ano de nascimento)?

Princípio da Casa de Pombos

Introdução

Exercício.

- 400 pessoas estão presentes a uma peça de teatro.
- Qual a probabilidade de 2 delas fazerem aniversário no mesmo dia e mesmo mês (ignorando-se o ano de nascimento)?
- Resposta: como há 366 dias de aniversário possíveis (considerando-se anos bissextos), há 366 casas. E, como temos 400 pombos, algum pombo compartilhará a mesma casa com outro pombo. Probabilidade: 100%.

Princípio da Casa de Pombos Generalizado

- N objetos são colocados em k caixas.
- Então pelo menos 1 caixa contém pelo menos

$$\lceil N/k \rceil$$

objetos.

Princípio da Casa de Pombos Generalizado

- N objetos são colocados em k caixas.
- Então pelo menos 1 caixa contém pelo menos

$$\lceil N/k \rceil$$

objetos.

- Exemplo. Entre 100 alunos de Matemática Discreta, pelo menos $\lceil 100/12 \rceil = \lceil 8,33\ldots \rceil = 9$ nasceram no mesmo mês.

Princípio da Casa de Pombos Generalizado

Exercício.

- Assuma que a nota em prova é um número inteiro de 0 a 10.
- Se temos uma sala com 21 alunos, pelo menos quantos alunos receberão a mesma nota?

Princípio da Casa de Pombos Generalizado

Exercício.

- Assuma que a nota em prova é um número inteiro de 0 a 10.
- Se temos uma sala com 21 alunos, pelo menos quantos alunos receberão a mesma nota?
- Resposta: $\lceil 21/11 \rceil = \lceil 1, \ldots \rceil = 2$

Princípio da Casa de Pombos Generalizado

Exercício.

- Assuma que a nota em prova é um número inteiro de 0 a 10.
- Quantos alunos são minimamente necessários para que pelo menos 2 deles tenham a mesma nota na prova?

Princípio da Casa de Pombos Generalizado

Exercício.

- Assuma que a nota em prova é um número inteiro de 0 a 10.
- Quantos alunos são minimamente necessários para que pelo menos 2 deles tenham a mesma nota na prova?
- Resposta: 12

Princípio da Casa de Pombos Generalizado

Exercício.

- Assuma que a nota em prova é um número inteiro de 0 a 10.
- Quantos alunos são minimamente necessários para que pelo menos 2 deles tenham a mesma nota na prova?
- Resposta: 12
- Quantos alunos são minimamente necessários para que pelo menos 3 deles tenham a mesma nota na prova?
- Quantos alunos são minimamente necessários para que pelo menos 4 deles tenham a mesma nota na prova?
- Quantos alunos são minimamente necessários para que pelo menos 5 deles tenham a mesma nota na prova?

Princípio da Casa de Pombos Generalizado

- Seja uma casa de pombos com k casas.
- O número mínimo de pombos para que pelo menos r pombos ocupem a mesma casa é

$$N = k \cdot (r - 1) + 1$$

Princípio da Casa de Pombos Generalizado

- Seja uma casa de pombos com k casas.
- O número mínimo de pombos para que pelo menos r pombos ocupem a mesma casa é

$$N = k \cdot (r - 1) + 1$$

- Exemplo: para que pelo menos $r = 2$ alunos tenham a mesma nota na prova ($k = 11$ casas), precisamos de uma turma com $N = 11 \cdot (2 - 1) + 1 = 12$ alunos

Princípio da Casa de Pombos Generalizado

- Seja uma casa de pombos com k casas.
- O número mínimo de pombos para que pelo menos r pombos ocupem a mesma casa é

$$N = k \cdot (r - 1) + 1$$

- Por que a fórmula funciona: se $N = k \cdot (r - 1)$ (ou seja, 1 unidade a menos que o N acima), poderíamos distribuir $(r - 1)$ pombos nas k casas. Falta 1 pombo para que alguma casa fique com r pombos. Ou seja, o número mínimo necessário para atingirmos r pombos em alguma casa é, de fato, $N = k \cdot (r - 1) + 1$.

Princípio da Casa de Pombos Generalizado

Exercício.

- Em uma sala com 50 alunos, pelo menos quantos têm o nome começando com a mesma letra do alfabeto?

Princípio da Casa de Pombos Generalizado

Exercício.

- Em uma sala com 50 alunos, pelo menos quantos têm o nome começando com a mesma letra do alfabeto?
- Resposta: $\lceil 50/26 \rceil = \lceil 1, \ldots \rceil = 2$

Princípio da Casa de Pombos Generalizado

Exercício.

- Suponha que uma gaveta tenha 12 canetas azuis e 12 canetas vermelhas.
- Suponha que retiremos as canetas da gaveta uma por uma aleatoriamente.
- Quantas canetas devemos tirar até conseguirmos pelo menos 2 canetas da mesma cor?

Princípio da Casa de Pombos Generalizado

Exercício.

- Suponha que uma gaveta tenha 12 canetas azuis e 12 canetas vermelhas.
- Suponha que retiremos as canetas da gaveta uma por uma aleatoriamente.
- Quantas canetas devemos tirar até conseguirmos pelo menos 2 canetas da mesma cor?
- Resposta: temos 2 casas de pombo: azul e vermelho. Quantas canetas (pombos) são minimamente necessárias para termos ao menos 2 canetas na mesma casa? $N = k(r-1)+1$, onde $k = 2$ (casas) e $r = 2$ (pombos por casa). Portanto, $N = 2(2-1)+1 = 2 \cdot 1 + 1 = 3$.

Exercícios recomendados

- Seção 5.2: do 1 ao 20 (no mínimo)
- Discrete Mathematics and Its Applications
  Kenneth Rosen, 6a edição