

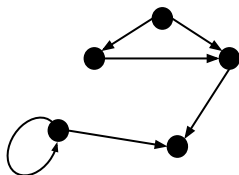
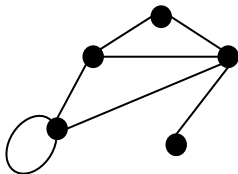
Grafos

Centro de Informática
UFPE

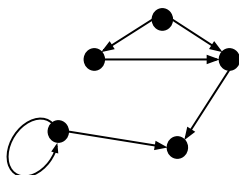
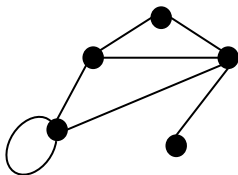
① Grafos

② Terminologia e Tipos Especiais de Grafos

- Um **grafo** G é composto pelo par (V, A) .
- V é um conjunto **não vazio** de **vértices** ou **nós**.
- A é um conjunto de **arestas**.

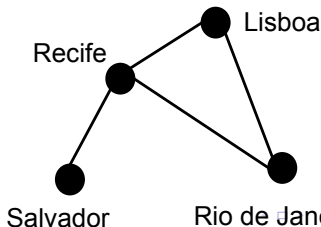


- Um **grafo** G é composto pelo par (V, A) .
- V é um conjunto **não vazio** de **vértices** ou **nós**.
- A é um conjunto de **arestas**.
- Cada aresta tem 1 ou 2 vértices associados, chamados de **terminais**.
- Uma aresta conecta seus terminais.



Grafo simples

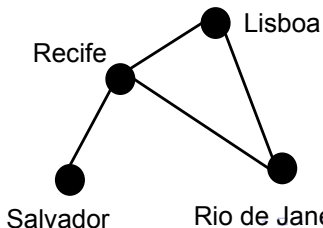
- Não dirigida (sem setas)
- A aresta não dirigida está associada a um conjunto de vértices
- Sem arestas paralelas (no máximo uma aresta por par de vértices)
- Sem laços ou *loops* (sem vértice conectado a ele mesmo)
- Exemplo: voos de ida-e-volta da companhia aérea Golaço:



Grafo simples

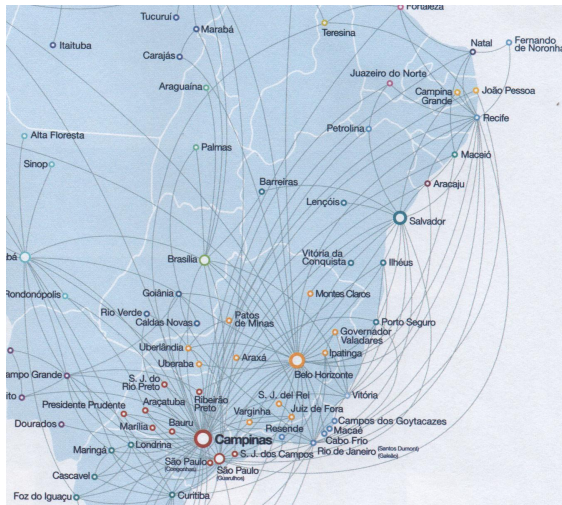
Exemplo.

- Matematicamente:

$$\left(\{ Recife, Lisboa, Rio de Janeiro, Salvador \}, \right. \\ \left. \{ \{ Recife, Lisboa \}, \right. \\ \left. \{ Lisboa, Rio de Janeiro \} \right. \\ \left. \{ Rio de Janeiro, Recife \}, \right. \\ \left. \{ Recife, Salvador \} \} \right)$$


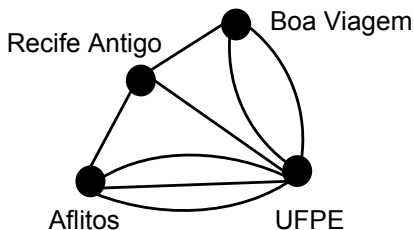
Grafo simples

Exemplo.



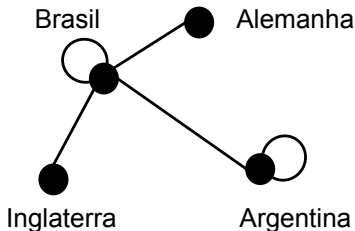
Multigrafo

- Não dirigida
- Arestas paralelas
- Sem laços
- Exemplo: rotas possíveis entre bairros.
Dizemos que $\{UFPE, Aflitos\}$ é uma aresta de **multiplicidade 3**.



Pseudografo

- Não dirigida
- Arestas paralelas
- Permite laços
- Exemplo. A aresta $\{x, y\}$ significa que x fez gol em y ou y fez gol em x . O laço representa um gol contra.



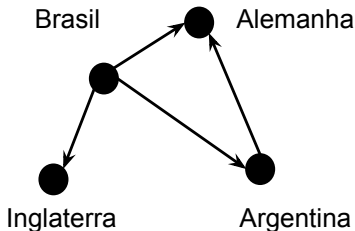
Grafos

Grafos e Modelos

- Um **grafo dirigido** ou **dígrafo** é aquele em que cada aresta tem uma direção (seta).
- A aresta dirigida está associada a um par ordenado.
- Dizemos que a aresta (u, v) começa em u e termina em v .

Grafo dirigido simples

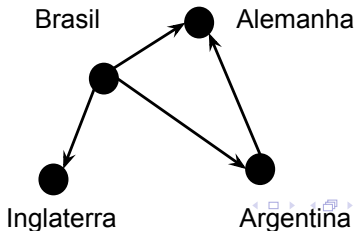
- Dirigido
- Sem arestas paralelas
- Sem laços
- Exemplo. A aresta dirigida (x, y) significa que x fez gol em y .



Grafo dirigido simples

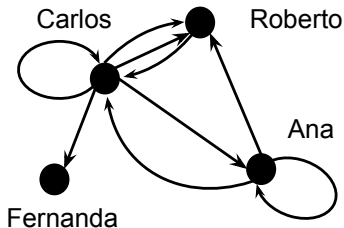
Exemplo.

- Matematicamente:

$$\left(\{ \text{Brasil, Inglaterra, Alemanha, Argentina} \}, \right. \\ \left. \{ (\text{Brasil, Inglaterra}), \right. \\ (\text{Brasil, Alemanha}), \\ (\text{Brasil, Argentina}), \\ \left. (\text{Argentina, Alemanha}) \} \right)$$


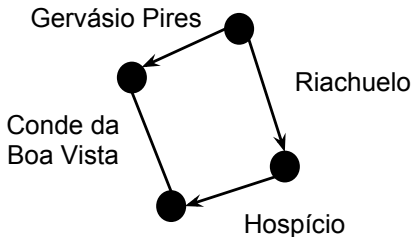
Multigrafo dirigido

- Dirigido
- Arestas paralelas
- **Permite** laços
- Exemplo. A aresta dirigida (x, y) significa que x mandou um email para y .



Grafo misto

- Arestas dirigidas e não dirigidas
- Arestas paralelas
- Permite laços
- Exemplo. A aresta $\{a, b\}$ é uma rua de mão dupla. A aresta (a, b) é uma rua de mão única (sentido a para b).



Grafos

Grafos e Modelos

Cuidado!

- A classificação (simples, multigrafo, pseudografo, etc) não é padrão!
- Varia de livro para livro.

Exercício. Faça um grafo representando

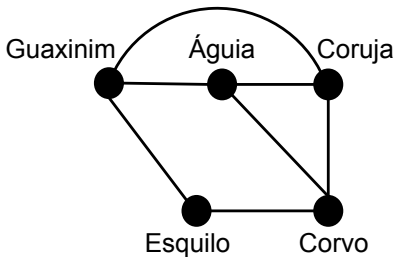
- seus amigos do Orkut (ou Facebook) (cada nó é uma pessoa);
- links entre website (cada nó é um site);
- chamadas de função em um programa (cada nó é uma função);

Exercício. Faça um grafo representando

- seus amigos do Orkut (ou Facebook) (cada nó é uma pessoa);
- links entre website (cada nó é um site);
- chamadas de função em um programa (cada nó é uma função);
- Curiosidade:
<http://www.cin.ufpe.br/~jmi/md/facebook.jpg>

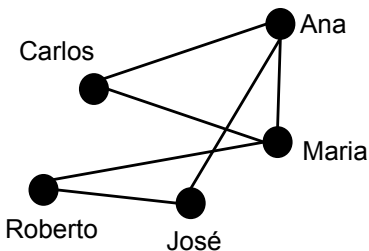
Grafo de Sobreposição de Nichos Ecológicos

- Cada vértice é uma espécie.
- A aresta $\{a, b\}$ significa que a e b competem pela mesma comida.



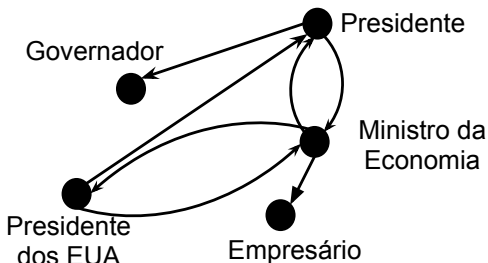
Rede Social

- Cada vértice é uma pessoa.
- A aresta $\{a, b\}$ significa que a conhece b .
- Quantos vértices tem o grafo que inclui todo mundo?



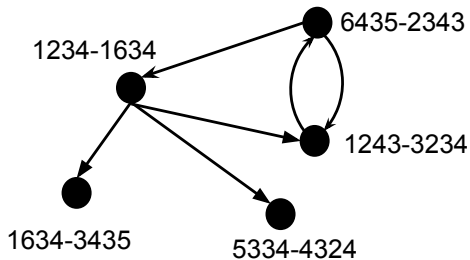
Rede de Influência

- Cada vértice é uma pessoa.
- A aresta (a, b) significa que a influencia b .



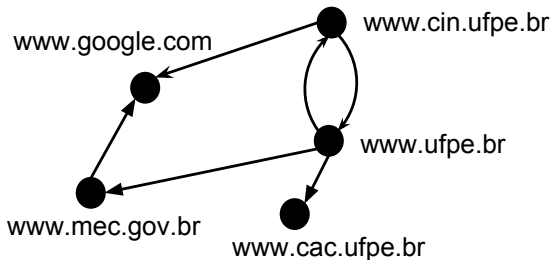
Grafo de Ligações

- Cada vértice é um telefone.
- A aresta (a, b) significa que a ligou para b .



Grafo Web

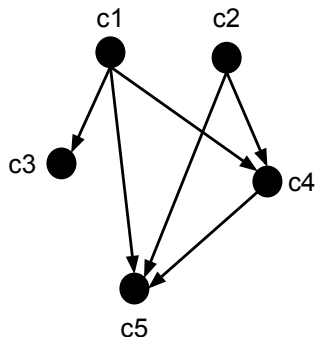
- Cada vértice é um site.
- A aresta (a, b) significa que o site a tem um link para o site b .



Grafo de Precedência

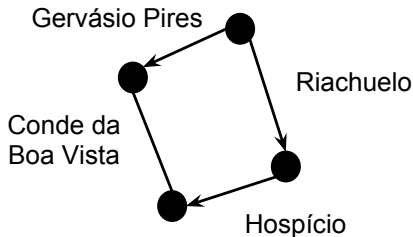
- Cada vértice é um comando de um programa.
- A aresta (a, b) significa que o comando a tem ser executado **antes** do comando b .

```
a = 0; // c1  
b = 1; // c2  
c = a + 1; // c3  
d = b + a; // c4  
e = d + 1; // c5
```



Mapa de Rua

- Cada vértice é uma esquina.
- A aresta $\{a, b\}$ é uma rua de mão-dupla.
- A aresta (a, b) é uma rua de mão única, sentido a para b .



Exercícios recomendados

Grafos

Terminologia e
Tipos
Especiais de
Grafos

Seção 9.1

- Fazer todos
- Discrete Mathematics and Its Applications
Kenneth Rosen, 6a edição

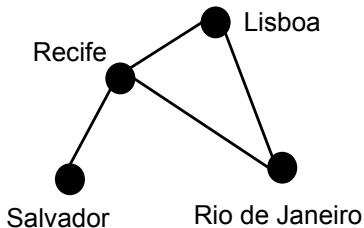
① Grafos

② Terminologia e Tipos Especiais de Grafos

Terminologia e Tipos Especiais de Grafos

Terminologia Básica

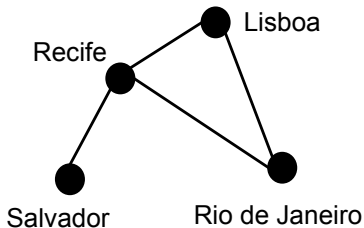
- Seja G um grafo não dirigido.
- Os vértices u e v são **adjacentes** se eles são os terminais de uma aresta.



Terminologia e Tipos Especiais de Grafos

Terminologia Básica

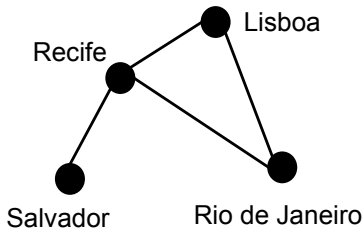
- Seja G um grafo não dirigido.
- Os vértices u e v são **adjacentes** se eles são os terminais de uma aresta.
- Quais são os vértices adjacentes abaixo?



Terminologia e Tipos Especiais de Grafos

Terminologia Básica

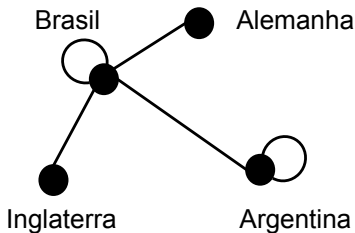
- Seja G um grafo não dirigido.
- Se uma aresta **conecta** 2 vértices $\{u, v\}$, dizemos que a aresta é **incidente** aos vértices.



Terminologia e Tipos Especiais de Grafos

Terminologia Básica

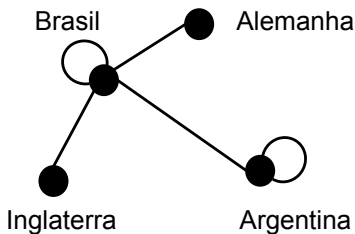
- Seja G um grafo não dirigido.
- O **grau** de um vértice é seu número de arestas incidentes.
- Laços têm grau 2.
- Notação: $deg(a)$ (do inglês: *degree*)



Terminologia e Tipos Especiais de Grafos

Terminologia Básica

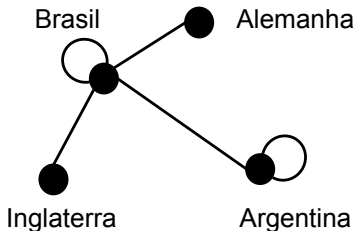
- Seja G um grafo não dirigido.
- O **grau** de um vértice é seu número de arestas incidentes.
- Laços têm grau 2.
- Notação: $deg(a)$ (do inglês: *degree*)
- Qual o grau dos vértices abaixo?



Terminologia e Tipos Especiais de Grafos

Terminologia Básica

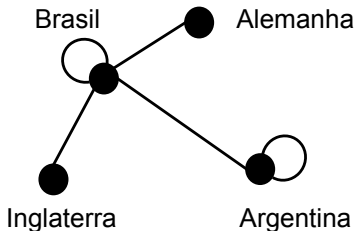
- Seja G um grafo não dirigido.
- Um vértice de grau 0 é chamado de **isolado**.
- Um vértice de grau 1 é chamado de **pendente**.



Terminologia e Tipos Especiais de Grafos

Terminologia Básica

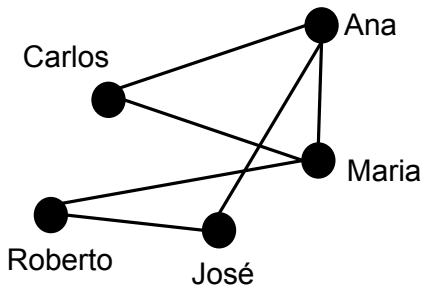
- Seja G um grafo não dirigido.
- Um vértice de grau 0 é chamado de **isolado**.
- Um vértice de grau 1 é chamado de **pendente**.
- Quais os vértices pendentes e isolados no grafo abaixo?



Terminologia Básica

Exercício.

- O que o grau de um vértice representa em um grafo como abaixo (de Rede Social)?
- O que vértices isolados representam? É possível existir vértices isolados no Facebook?
- O que vértices pendentos representam?



Terminologia Básica

Exercício.

- Suponha um grafo cujos nós são maratonistas e cuja aresta que liga a a b indica que a ganhou de b em exatamente uma maratona específica do passado. Por exemplo, se *Fulano* ganhou de *Sicrano* na maratona do Rio de 2009, então teremos uma aresta ligando *Fulano* a *Sicrano*.
 - Este grafo é dirigido ou não-dirigido?
 - O que arestas paralelas representam neste grafo?
 - Este grafo tem laços?

Terminologia Básica

Exercício.

- Suponha um grafo cujos nós são atores ou atrizes e cujas arestas ligam dois atores ou atrizes que atuaram juntos em um mesmo filme.
 - Este grafo é dirigido ou não-dirigido?
 - O que arestas paralelas representam neste grafo?
 - Este grafo tem laços?
 - Um nó deste grafo tem grau 1230. O que isto quer dizer?

Terminologia e Tipos Especiais de Grafos

Terminologia Básica

Teorema do Aperto de Mãos

- Seja $G = (V, A)$ um grafo não dirigido. Então

$$2|A| = \sum_{v \in V} \deg(v)$$

Terminologia e Tipos Especiais de Grafos

Terminologia Básica

Teorema do Aperto de Mãos

- Seja $G = (V, A)$ um grafo não dirigido. Então

$$2|A| = \sum_{v \in V} \deg(v)$$

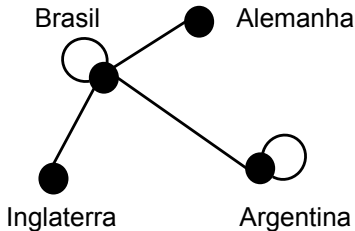
- Por que?
 - Cada aresta incide sobre 2 vértices.
 - Cada aresta contribui com $1 + 1$ na soma dos graus.
 - Então, a soma dos graus é o dobro do número de arestas.

Terminologia e Tipos Especiais de Grafos

Terminologia Básica

Exercício.

- Calcule a soma dos graus do grafo abaixo.
- Compare este número com a quantidade de arestas.



Terminologia e Tipos Especiais de Grafos

Terminologia Básica

Teorema.

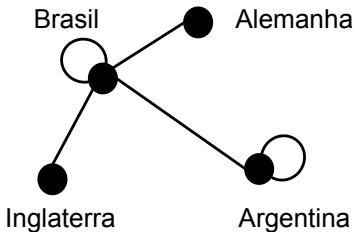
- Um grafo não dirigido possui um número par de vértices de grau ímpar.

Terminologia e Tipos Especiais de Grafos

Terminologia Básica

Teorema.

- Um grafo não dirigido possui um número par de vértices de grau ímpar.
- Verifique esta propriedade para o grafo abaixo.



Terminologia e Tipos Especiais de Grafos

Terminologia Básica

- Seja $G = (V, A)$ um **grafo dirigido**.
- Dada a aresta (u, v) , dizemos que
 - u e v são **adjacentes**
 - u é o **vértice inicial** de (u, v)
 - v é o **vértice terminal ou final** de (u, v)
- Note que os vértices inicial ou final de um laço são os mesmos. Exemplo, (u, u) é um laço. O vértice inicial é u e o final, u também.

Terminologia e Tipos Especiais de Grafos

Terminologia Básica

- Seja $G = (V, A)$ um **grafo dirigido**.
- Seja v um vértice.
- O **grau de entrada** $\deg^-(v)$ é o número de arestas que apontam para v .
- O **grau de saída** $\deg^+(v)$ é o número de arestas que partem de v .

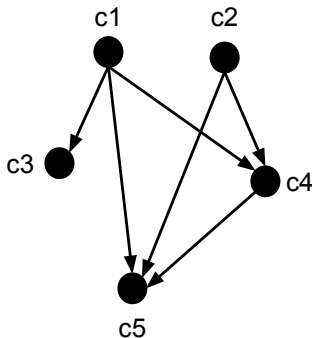
Terminologia e Tipos Especiais de Grafos

Terminologia Básica

Exercício.

- Calcule $deg^-(v)$ e $deg^+(v)$ para cada vértice v do grafo abaixo.

$a = 0$; // c_1
 $b = 1$; // c_2
 $c = a + 1$; // c_3
 $d = b + a$; // c_4
 $e = d + 1$; // c_5



Terminologia e Tipos Especiais de Grafos

Terminologia Básica

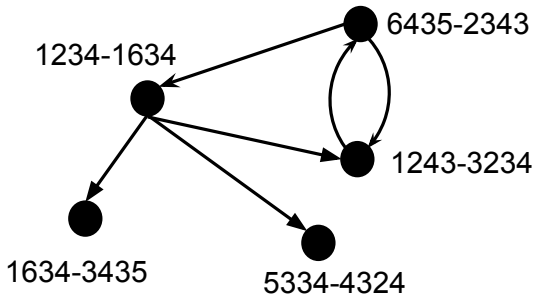
Teorema.

- Seja $G = (V, A)$ um grafo **grafo dirigido**.
- $$\sum_{v \in V} \text{deg}^-(v) = \sum_{v \in V} \text{deg}^+(v) = |A|$$

Terminologia Básica

Exercício.

- O que o grau de saída de um vértice representa em um grafo como abaixo (de ligação telefônica)?
- O que o grau de entrada de um vértice representa?
- Que pacotes de promoção são mais adequados para vértices com alto grau de entrada e baixo grau de saída?
- E para vértices com baixo grau de entrada e alto grau de saída?



Terminologia e Tipos Especiais de Grafos

Alguns Grafos Simples

K_n : Grafos Completos de n Vértices

- Cada vértice está conectado a outro vértice (distinto) por exatamente 1 aresta

Terminologia e Tipos Especiais de Grafos

Alguns Grafos Simples

C_n : Ciclos de n Vértices

- Sejam $v_1, v_2, v_3, \dots, v_{n-1}, v_n$ os vértices do grafo.
- O ciclo de n vértices possui as arestas

$$\{v_1, v_2\}, \{v_2, v_3\}, \dots, \{v_{n-1}, v_n\}, \{v_n, v_1\}$$

Terminologia e Tipos Especiais de Grafos

Alguns Grafos Simples

W_n : Rodas (*Wheels*) de $n + 1$ Vértices

- Uma roda W_n é um ciclo C_n com um vértice a mais.
- Tal vértice conecta-se a todos os demais vértices.

Terminologia e Tipos Especiais de Grafos

Alguns Grafos Simples

Q_n : Hipercubo de n Dimensões

- Cada vértice é uma cadeia de n bits.
- 2 vértices são adjacentes se, e somente se, eles diferem em apenas 1 bit.

Terminologia e Tipos Especiais de Grafos

Grafos Bipartidos

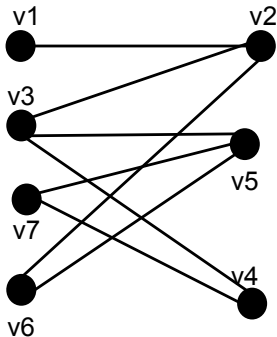
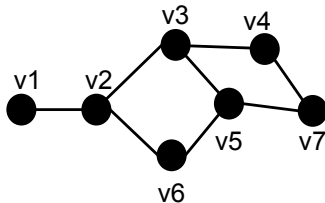
Grafos Bipartidos

- Seja $G = (V, A)$ um grafo simples.
- V pode ser particionado em 2 conjuntos V_1 e V_2 , tal que
 - $V = V_1 \cup V_2$
 - $V_1 \cap V_2 = \emptyset$
- Vértices em V_1 conectam-se apenas a vértices em V_2 (e vice-versa)

Terminologia e Tipos Especiais de Grafos

Grafos Bipartidos

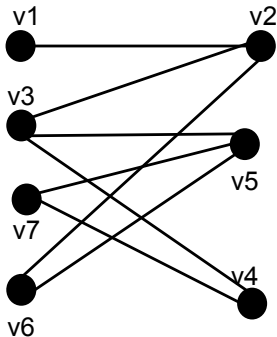
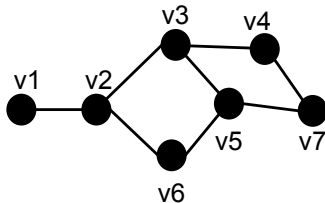
Grafos Bipartidos: Exemplo



Terminologia e Tipos Especiais de Grafos

Grafos Bipartidos

Grafos Bipartidos: Como saber se um grafo é bipartido?



Terminologia e Tipos Especiais de Grafos

Grafos Bipartidos

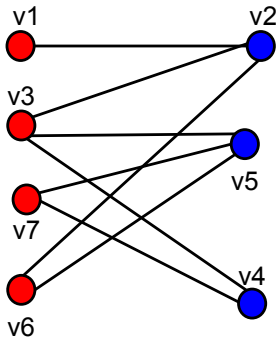
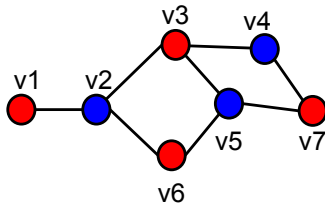
Teorema.

- Um grafo é bipartido se, e somente se, for possível pintar os vértices em 2 cores de tal forma que
 - Vértices adjacentes não possuam a mesma cor.

Terminologia e Tipos Especiais de Grafos

Grafos Bipartidos

Grafos Bipartidos: Exemplo

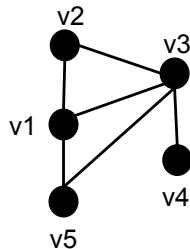
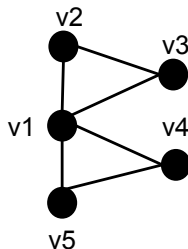
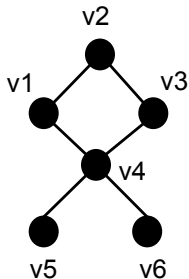


Terminologia e Tipos Especiais de Grafos

Grafos Bipartidos

Exercício

Quais dos grafos abaixo são bipartido?



Terminologia e Tipos Especiais de Grafos

Grafos Bipartidos

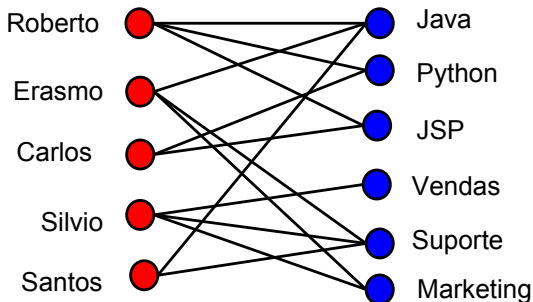
Exercício.

- Uma empresa tem 5 funcionários: Roberto, Erasmo, Carlos, Silvio e Santos.
- Roberto entende de Java, Python e JSP.
- Erasmo entende de Java, marketing, suporte.
- Carlos entende de Python e JSP.
- Silvio entende de marketing, vendas e suporte.
- Santos entende de suporte e Java.
- Desenhe um grafo bipartido (funcionários em um time e obrigações em outro) que mostre as capacidades de cada funcionário.

Terminologia e Tipos Especiais de Grafos

Grafos Bipartidos

Resposta.

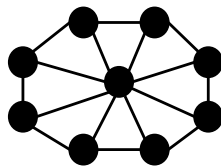
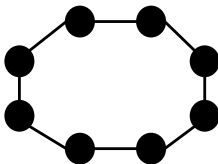
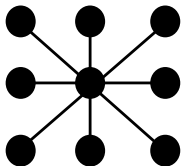


Terminologia e Tipos Especiais de Grafos

Algumas Aplicações de Tipos Especiais de Grafos

Topologia de Redes

- Computadores em uma empresa, universidade, escola, etc. se conectam em alguma estrutura, chamada **topologia**.
- Topologias são representadas por grafos
- Abaixo, temos: topologia estrela, anel ou híbrido.

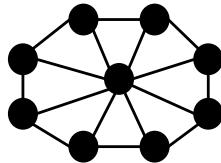
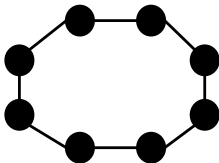
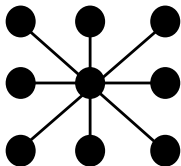


Terminologia e Tipos Especiais de Grafos

Algumas Aplicações de Tipos Especiais de Grafos

Topologia de Redes

- Exercício. Quais as vantagens e desvantagens de cada topologia?

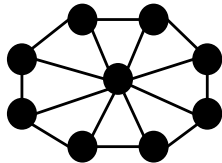
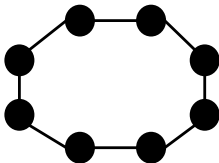
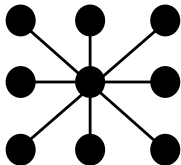


Terminologia e Tipos Especiais de Grafos

Algumas Aplicações de Tipos Especiais de Grafos

Topologia de Redes

- Exercício. Como cada grafo abaixo pode ser classificado (K_n , C_n , W_n , Q_n , bipartido)?



Terminologia e Tipos Especiais de Grafos

Algumas Aplicações de Tipos Especiais de Grafos

Computação Paralela

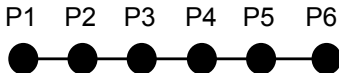
- Um computador pode ter vários processadores computando ao mesmo tempo (em **paralelo**)
- Cada processador comunica-se com os demais
- Comunicação de todo mundo com todo mundo (grafos K_n) é inviável: por exemplo, 64 processadores ia exigir 63 conexões para cada processador.

Terminologia e Tipos Especiais de Grafos

Algumas Aplicações de Tipos Especiais de Grafos

Computação Paralela

- Array linear
 - Vantagem: pouca conexão com vizinhos (no máximo 2 conexões)

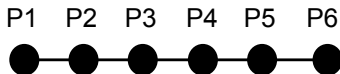


Terminologia e Tipos Especiais de Grafos

Algumas Aplicações de Tipos Especiais de Grafos

Computação Paralela

- Array linear
 - Vantagem: pouca conexão com vizinhos (no máximo 2 conexões)
 - Exercício. Quais são as desvantagens?

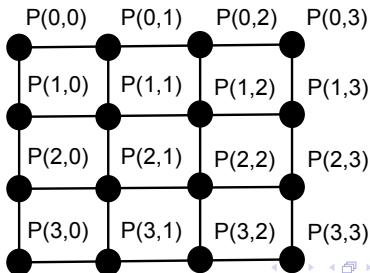


Terminologia e Tipos Especiais de Grafos

Algumas Aplicações de Tipos Especiais de Grafos

Computação Paralela

- Mesh
 - O número de processadores forma um quadrado perfeito
 - Vantagens: requer menos processadores intermediários que o array linear
 - Desvantagens: custo mais alto, configuração e manutenção mais difícil



Terminologia e Tipos Especiais de Grafos

Algumas Aplicações de Tipos Especiais de Grafos

Computação Paralela

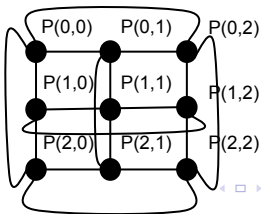
- Mesh
 - Exercício
 - Desenhe o grafo de uma variação do mesh definido abaixo.
 - O processador $P(i, j)$ está conectado a 4 processadores:
 $P(i+1 \bmod m, j)$
 $P(i-1 \bmod m, j)$
 $P(i, j+1 \bmod m)$
 $P(i, j-1 \bmod m)$,
onde $m = 3$, $0 \leq i \leq (m - 1)$ e $0 \leq j \leq (m - 1)$.

Terminologia e Tipos Especiais de Grafos

Algumas Aplicações de Tipos Especiais de Grafos

Computação Paralela

- Mesh
 - Exercício.
 - Desenhe o grafo de uma variação do mesh definido abaixo.
 - O processador $P(i, j)$ está conectado a 4 processadores:
 - $P(i+1 \bmod m, j)$
 - $P(i-1 \bmod m, j)$
 - $P(i, j+1 \bmod m)$
 - $P(i, j-1 \bmod m)$,
 onde $m = 3$, $0 \leq i \leq (m - 1)$ e $0 \leq j \leq (m - 1)$.



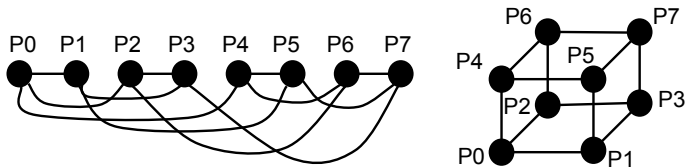
Terminologia e Tipos Especiais de Grafos

Algumas Aplicações de Tipos Especiais de Grafos

Computação Paralela

- Hipergrafo

- O número de processadores é uma potência de 2, $n = 2^m$.
- Vantagem: equilíbrio entre o número de conexões e de processadores intermediários
- Desvantagem: número de processadores tem que ser potências de 2.



Terminologia e Tipos Especiais de Grafos

Algumas Aplicações de Tipos Especiais de Grafos

<http://g1.globo.com/fantastico/noticia/2013/09/veja-os-documentos-ultrassecretos-que-comprovam-espionagem-dilma.html>

Terminologia e Tipos Especiais de Grafos

Grafos Gerados a Partir de Outros Grafos

Subgrafo

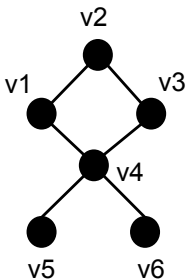
- Um **subgrafo** de $G = (V, A)$ é um grafo $H = (W, F)$ tal que $W \subseteq V$ e $F \subseteq A$.

Terminologia e Tipos Especiais de Grafos

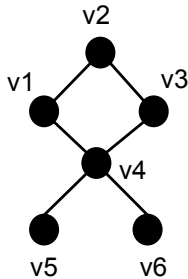
Grafos Gerados a Partir de Outros Grafos

Subgrafo

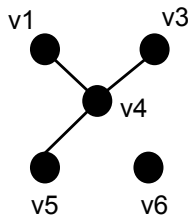
- Um **subgrafo** de $G = (V, A)$ é um grafo $H = (W, F)$ tal que $W \subseteq V$ e $F \subseteq A$.



G



Subgrafo de G



Outro subgrafo de G

Terminologia e Tipos Especiais de Grafos

Grafos Gerados a Partir de Outros Grafos

Subgrafo

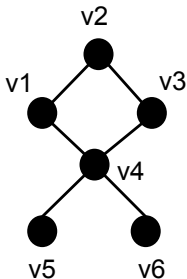
- Um **subgrafo próprio** de $G = (V, A)$ é um grafo $H = (W, F)$ tal que $W \subset V$ e $F \subset A$.

Terminologia e Tipos Especiais de Grafos

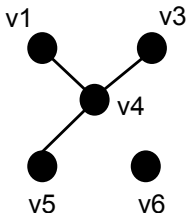
Grafos Gerados a Partir de Outros Grafos

Subgrafo

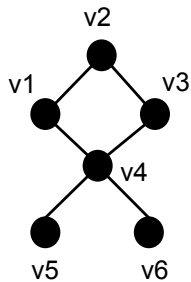
- Um **subgrafo próprio** de $G = (V, A)$ é um grafo $H = (W, F)$ tal que $W \subset V$ e $F \subset A$.



G



Subgrafo próprio de G

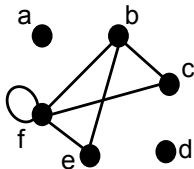
NÃO é subgrafo
próprio de G

Terminologia e Tipos Especiais de Grafos

Grafos Gerados a Partir de Outros Grafos

Subgrafo

- Um **subgrafo próprio** de $G = (V, A)$ é um grafo $H = (W, F)$ tal que $W \subset V$ e $F \subset A$.
- Exercício. Desenhe um sub-grafo próprio do grafo abaixo que seja bipartido.

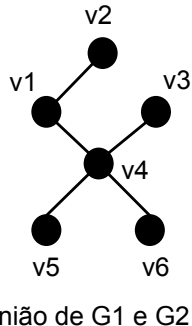
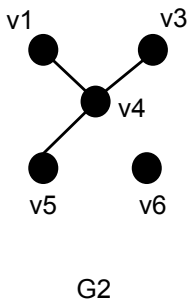
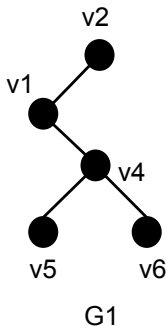


Terminologia e Tipos Especiais de Grafos

Grafos Gerados a Partir de Outros Grafos

União de Grafos

- Sejam $G_1 = (V_1, A_1)$ e $G_2 = (V_2, A_2)$ grafos simples.
- A **união** de G_1 e G_2 é o grafo $(V_1 \cup V_2, A_1 \cup A_2)$.



Exercícios recomendados

Seção 9.2

- No mínimo do 1 ao 28
- Discrete Mathematics and Its Applications
Kenneth Rosen, 6a edição