Indução e Recursão

Centro de Informática
UFPE

1. Indução Matemática

2. Definições Recursivas e Indução Estrutural

Introdução

- Problema: queremos provar que

$$n + n = 2 \cdot n$$

para todo n inteiro maior que zero.

- Ou seja, queremos provar que $\forall n(n + n = 2 \cdot n)$, no domínio $\mathbb{Z}^+$.

Introdução

- Problema: queremos provar que

$$n + n = 2 \cdot n$$

  para todo n inteiro maior que zero.
- Ou seja, queremos provar que $\forall n(n + n = 2 \cdot n)$, no domínio $\mathbb{Z}^+$.
- Como provar que algo é verdade para uma quantidade infinita de números?

Introdução

Prova:

- Para $n = 1$, temos

$$\begin{aligned} & 1 + 1 \\ & = 2 && \text{[Aritmética]} \\ & = 2 \cdot 1 && \text{[Aritmética]} \end{aligned}$$

Ou seja, a equação

$$n + n = 2 \cdot n$$

funciona para o 1!

Note que saímos do lado esquerdo $1 + 1$ e chegamos ao lado direito $2 \cdot 1$ após uma sequência de igualdades.

Introdução

Prova:

- Para $n = 2$, temos

$$
\begin{aligned}
& 2 + 2 \\
&= 4 \qquad \text{[Aritmética]} \\
&= 2 \cdot 2 \quad \text{[Aritmética]}
\end{aligned}
$$

Ou seja, a equação

$$n + n = 2 \cdot n$$

também funciona para o 2!

Introdução

Prova:

- Para $n = 3$, temos

$$\begin{aligned} & 3 + 3 \\ & = 6 && \text{[Aritmética]} \\ & = 2 \cdot 3 && \text{[Aritmética]} \end{aligned}$$

Ou seja, a equação

$$n + n = 2 \cdot n$$

também funciona para o 3!

Introdução

- Não é possível continuar com este método de prova.
- Temos a prova que a equação funciona para os números 1, 2 e 3.
- Mas, ainda faltam infinitos outros números para provarmos!
- Precisamos de outro método de prova que seja mais inteligente.

Introdução

Uma nova tentativa de prova.

- Vamos provar que a equação

$$n + n = 2 \cdot n$$

funciona para o 1.

Introdução

Uma nova tentativa de prova.

- Vamos provar que a equação

$$n + n = 2 \cdot n$$

  funciona para o 1.

- Prova:

$$\begin{aligned} & 1 + 1 \\ &= 2 && \text{[Aritmética]} \\ &= 2 \cdot 1 && \text{[Aritmética]} \end{aligned}$$

Introdução

Uma nova tentativa de prova.

- Vamos provar que a equação

$$n + n = 2 \cdot n$$

  funciona para o 1.

- Prova:

$$\begin{aligned} & 1 + 1 \\ & = 2 && \text{[Aritmética]} \\ & = 2 \cdot 1 && \text{[Aritmética]} \end{aligned}$$

- Chamaremos esta prova de prova do caso base.

Introdução

Uma nova tentativa de prova.

- Agora, dada a premissa que a equação funciona para um certo número k, vamos concluir que ela funciona para o próximo número $k + 1$.

Introdução

Uma nova tentativa de prova.

- Agora, dada a premissa que a equação funciona para um certo número k, vamos concluir que ela funciona para o próximo número $k+1$.
- Ou seja, dada a premissa $k+k=2\cdot k$, queremos concluir que $(k+1)+(k+1)=2\cdot(k+1)$.

Introdução

Uma nova tentativa de prova.

- Agora, dada a premissa que a equação funciona para um certo número k, vamos concluir que ela funciona para o próximo número $k+1$.
- Ou seja, dada a premissa $k+k=2\cdot k$, queremos concluir que $(k+1)+(k+1)=2\cdot(k+1)$.
- Prova:

1. $k+k=2\cdot k$ [Premissa]
2. $k+k+2=2\cdot k+2$ [Aritmética em 1]
3. $(k+1)+(k+1)=2\cdot k+2$ [Aritmética em 2]
4. $(k+1)+(k+1)=2\cdot(k+1)$ [Aritmética em 3]

- Chamaremos esta prova de prova do passo indutivo.

Introdução

Uma nova tentativa de prova.

- Agora, dada a premissa que a equação funciona para um certo número k, vamos concluir que ela funciona para o próximo número $k+1$.
- Ou seja, dada a premissa $k+k=2\cdot k$, queremos concluir que $(k+1)+(k+1)=2\cdot(k+1)$.
- Prova:

1.	$k+k=2\cdot k$	[Premissa]
2.	$k+k+2=2\cdot k+2$	[Aritmética em 1]
3.	$(k+1)+(k+1)=2\cdot k+2$	[Aritmética em 2]
4.	$(k+1)+(k+1)=2\cdot(k+1)$	[Aritmética em 3]

- Chamaremos esta prova de prova do passo indutivo.
- E, chamaremos a premissa de hipótese de indução.

Introdução

Uma nova tentativa de prova.

- Agora, dada a premissa que a equação funciona para um certo número k, vamos concluir que ela funciona para o próximo número $k+1$.
- Ou seja, dada a premissa $k+k=2\cdot k$, queremos concluir que $(k+1)+(k+1)=2\cdot(k+1)$.
- Prova:

1.	$k+k=2\cdot k$	[Premissa]
2.	$k+k+2=2\cdot k+2$	[Aritmética em 1]
3.	$(k+1)+(k+1)=2\cdot k+2$	[Aritmética em 2]
4.	$(k+1)+(k+1)=2\cdot(k+1)$	[Aritmética em 3]

- Chamaremos esta prova de prova do passo indutivo.
- E, chamaremos a premissa de hipótese de indução.
- Note que provamos uma implicação: $(k+k=2\cdot k)\rightarrow((k+1)+(k+1)=2\cdot(k+1))$.

Introdução

Uma nova tentativa de prova.

- Temos 2 fatos provados sobre a equação $n + n = 2 \cdot n$:
  - $1 + 1 = 2 \cdot 1$
  - $(k + k = 2 \cdot k) \to ((k + 1) + (k + 1) = 2 \cdot (k + 1)$.

Introdução

Uma nova tentativa de prova.

- Temos 2 fatos provados sobre a equação $n + n = 2 \cdot n$:
  - $1 + 1 = 2 \cdot 1$
  - $(k + k = 2 \cdot k) \rightarrow ((k + 1) + (k + 1) = 2 \cdot (k + 1)$.
- Ou seja, sabemos que a equação $n + n = 2 \cdot n$:
  - Funciona para o 1 (caso base).
  - Se funciona para um certo k, então funciona para o $k + 1$ (passo indutivo).

Introdução

Uma nova tentativa de prova.

- Temos 2 fatos provados sobre a equação $n + n = 2 \cdot n$:
  - $1 + 1 = 2 \cdot 1$
  - $(k + k = 2 \cdot k) \rightarrow ((k + 1) + (k + 1) = 2 \cdot (k + 1)$.
- Ou seja, sabemos que a equação $n + n = 2 \cdot n$:
  - Funciona para o 1 (caso base).
  - Se funciona para um certo k, então funciona para o $k + 1$ (passo indutivo).
- Já podemos concluir que $n + n = 2 \cdot n$ funciona para todo n maior que zero?

Introdução

Uma nova tentativa de prova.

- Temos 2 fatos provados sobre a equação $n + n = 2 \cdot n$:
  - $1 + 1 = 2 \cdot 1$
  - $(k + k = 2 \cdot k) \rightarrow ((k + 1) + (k + 1) = 2 \cdot (k + 1)$.
- Ou seja, sabemos que a equação $n + n = 2 \cdot n$:
  - Funciona para o 1 (caso base).
  - Se funciona para um certo k, então funciona para o $k + 1$ (passo indutivo).
- Já podemos concluir que $n + n = 2 \cdot n$ funciona para todo n maior que zero?
- Sim!

Introdução

Uma nova tentativa de prova.

- A equação $n + n = 2 \cdot n$ funciona para o 1 (caso base).

Introdução

Uma nova tentativa de prova.

- A equação $n + n = 2 \cdot n$ funciona para o 1 (caso base).
- E, se ela funciona para o 1, então ela funciona para o 2 (passo indutivo).

Introdução

Uma nova tentativa de prova.

- A equação $n + n = 2 \cdot n$ funciona para o 1 (caso base).
- E, se ela funciona para o 1, então ela funciona para o 2 (passo indutivo).
- Aplicando Modus Ponens, sabemos que a equação funciona para o 2.

Introdução

Uma nova tentativa de prova.

- A equação $n + n = 2 \cdot n$ funciona para o 1 (caso base).
- E, se ela funciona para o 1, então ela funciona para o 2 (passo indutivo).
- Aplicando Modus Ponens, sabemos que a equação funciona para o 2.
- E, se ela funciona para o 2, então ela funciona para o 3 (passo indutivo).

Introdução

Uma nova tentativa de prova.

- A equação $n + n = 2 \cdot n$ funciona para o 1 (caso base).
- E, se ela funciona para o 1, então ela funciona para o 2 (passo indutivo).
- Aplicando Modus Ponens, sabemos que a equação funciona para o 2.
- E, se ela funciona para o 2, então ela funciona para o 3 (passo indutivo).
- Aplicando Modus Ponens, sabemos que a equação funciona para o 3.

Introdução

Uma nova tentativa de prova.

- A equação $n + n = 2 \cdot n$ funciona para o 1 (caso base).
- E, se ela funciona para o 1, então ela funciona para o 2 (passo indutivo).
- Aplicando Modus Ponens, sabemos que a equação funciona para o 2.
- E, se ela funciona para o 2, então ela funciona para o 3 (passo indutivo).
- Aplicando Modus Ponens, sabemos que a equação funciona para o 3.
- E, se ela funciona para o 3, então ela funciona para o 4 (passo indutivo).

Introdução

Uma nova tentativa de prova.

- A equação $n + n = 2 \cdot n$ funciona para o 1 (caso base).
- E, se ela funciona para o 1, então ela funciona para o 2 (passo indutivo).
- Aplicando Modus Ponens, sabemos que a equação funciona para o 2.
- E, se ela funciona para o 2, então ela funciona para o 3 (passo indutivo).
- Aplicando Modus Ponens, sabemos que a equação funciona para o 3.
- E, se ela funciona para o 3, então ela funciona para o 4 (passo indutivo).
- Aplicando Modus Ponens, sabemos que a equação funciona para o 4.

Introdução

Uma nova tentativa de prova.

- A equação $n + n = 2 \cdot n$ funciona para o 1 (caso base).
- E, se ela funciona para o 1, então ela funciona para o 2 (passo indutivo).
- Aplicando Modus Ponens, sabemos que a equação funciona para o 2.
- E, se ela funciona para o 2, então ela funciona para o 3 (passo indutivo).
- Aplicando Modus Ponens, sabemos que a equação funciona para o 3.
- E, se ela funciona para o 3, então ela funciona para o 4 (passo indutivo).
- Aplicando Modus Ponens, sabemos que a equação funciona para o 4.
- E assim segue nosso raciocínio: até o infinito!

Introdução

- A prova por indução é uma técnica poderosa.
- Fazemos 2 sub-provas: caso base e passo indutivo.
- As duas juntas, indiretamente, provam que algo é verdade para uma quantidade infinita de números!

Introdução

Outro exemplo.

- Queremos provar que $1 + 2 + \ldots + n = \frac{n(n+1)}{2}$ é verdade para todo inteiro $n > 0$.

Introdução

Notação

- Por preguiça, escreveremos $P(n)$ para representar uma proposição que depende de n.
- Exemplo. Seja $P(n)$ a proposição $1 + 2 + \ldots + n = \frac{n(n+1)}{2}$.

Obs. $P(n)$ é uma Função Proposicional (visto no capítulo de Lógica e Prova)!

Introdução

Notação

ATENÇÃO!

- $P(n)$ é uma proposição.
- $P(n)$ é uma abreviação da equação

$$1 + 2 + \ldots + n = \frac{n(n+1)}{2}$$

- $P(n)$ não é um número!
  - $P(n)$ não é $1 + 2 + \ldots + n$.
  - E $P(n)$ também não é $\frac{n(n+1)}{2}$.
  - $P(n)$ é $1 + 2 + \ldots + n = \frac{n(n+1)}{2}$.
- $P(n)$ é verdadeiro ou falso!
- $P(n)$ tem 2 lados:
  - O lado esquerdo da igualdade: $1 + 2 + \ldots + n$
  - E o lado direito da igualdade: $\frac{n(n+1)}{2}$.

Introdução
Notação

- Seja $P(n)$ a proposição $1 + 2 + \ldots + n = \frac{n(n+1)}{2}$
- Também por preguiça, escreveremos
  - $P(4)$ ao invés da proposição $1 + 2 + 3 + 4 = \frac{4(4+1)}{2}$.
  - $P(k)$ ao invés da proposição $1 + 2 + \ldots + k = \frac{k(k+1)}{2}$.
  - $P(k+1)$ ao invés da proposição $1 + 2 + \ldots + k + (k+1) = \frac{(k+1)((k+1)+1)}{2}$.
  - $P(1)$ ao invés da proposição $1 = \frac{1(1+1)}{2}$.

Introdução

Notação

- Seja $P(n)$ a proposição $1 + 2 + \ldots + n = \frac{n(n+1)}{2}$
- Veja a diferença entre $P(k)$ e $P(k+1)$ para $k > 0$

k	$P(k)$	$P(k+1)$
1	$1 = \frac{1(1+1)}{2}$	$1 + 2 = \frac{2(2+1)}{2}$
2	$1 + 2 = \frac{2(2+1)}{2}$	$1 + 2 + 3 = \frac{3(3+1)}{2}$
3	$1 + 2 + 3 = \frac{3(3+1)}{2}$	$1 + 2 + 3 + 4 = \frac{4(4+1)}{2}$
...	...	...

Ou seja, quando $P(k)$ tem um somatório (ou produtório) do lado esquerdo, $P(k+1)$ adiciona um termo a mais no somatório que aparece no lado esquerdo de $P(k)$.

Introdução

Notação

Exercício.

- Seja $P(n)$ a proposição $n + n = 2 \cdot n$.
  - Defina $P(k)$, $P(k+1)$ e $P(1)$.
- Seja $P(n)$ a proposição $1 + 3 + 5 + \ldots + (2n-1) = n^2$.
  - Defina $P(k)$, $P(k+1)$ e $P(1)$.
- Seja $P(n)$ a proposição $2^0 + 2^1 + 2^2 + \ldots + 2^n = 2^{n+1} - 1$.
  - Defina $P(k)$, $P(k+1)$ e $P(0)$.
- Seja $P(n)$ a proposição $ar^0 + ar^1 + ar^2 + \ldots + ar^n = \frac{ar^{n+1} - a}{r-1}$.
  - Defina $P(k)$, $P(k+1)$ e $P(0)$.
- Seja $P(n)$ a proposição $n < 2^n$.
  - Defina $P(k)$, $P(k+1)$ e $P(1)$.

Introdução

- Para provar que $P(n)$ é verdade para todos os inteiros $n > 0$, temos que fazer 2 provas:
  1. Caso base. Prove que $P(1)$ é verdade.
  2. Passo indutivo.
     Temos que provar que $P(k) \rightarrow P(k+1)$.

Introdução

Por que indução funciona?

1. $P(1)$	[Caso base]
2. $P(1) \to P(2)$	[Passo indutivo]
3. $P(2)$	[Modus ponens com (1) e (2)]
4. $P(2) \to P(3)$	[Passo indutivo]
5. $P(3)$	[Modus ponens com (3) e (4)]
6. $P(3) \to P(4)$	[Passo indutivo]
7. $P(4)$	[Modus ponens com (5) e (6)]
$\vdots$	

- No caso base, provamos $P(1)$.
- No passo indutivo, provamos $P(k) \to P(k+1)$, para um certo k.

Introdução

De volta ao nosso exemplo.
Vamos provar por indução matemática que

$$\forall n \left(1 + 2 + \ldots + n = \frac{n(n+1)}{2}\right),$$

para $n > 0$.

Introdução

Prova de $\forall n \left(1 + 2 + \ldots + n = \frac{n(n+1)}{2}\right)$, para $n > 0$

- Caso base. Temos que provar que $P(1)$ é verdade.
- Ou seja, o objetivo de prova do caso base é $1 = \frac{1(1+1)}{2}$.

Introdução

Prova de $\forall n \left(1 + 2 + \ldots + n = \frac{n(n+1)}{2}\right)$, para $n > 0$

- Caso base. Temos que provar que $P(1)$ é verdade.
- Ou seja, o objetivo de prova do caso base é $1 = \frac{1(1+1)}{2}$.
- Prova:

$$\begin{aligned} & 1 \\ = & \frac{2}{2} && \text{[Aritmética]} \\ = & \frac{(1+1)}{2} && \text{[Aritmética]} \\ = & \frac{1(1+1)}{2} && \text{[Aritmética]} \end{aligned}$$

Introdução

Prova de $\forall n \left(1 + 2 + \ldots + n = \frac{n(n+1)}{2}\right)$, para $n > 0$

- Caso base. Temos que provar que $P(1)$ é verdade.
- Ou seja, o objetivo de prova do caso base é $1 = \frac{1(1+1)}{2}$.
- Prova:

$$
\begin{aligned}
& 1 \\
&= \tfrac{2}{2} && \text{[Aritmética]} \\
&= \tfrac{(1+1)}{2} && \text{[Aritmética]} \\
&= \tfrac{1(1+1)}{2} && \text{[Aritmética]}
\end{aligned}
$$

- Provamos que a fórmula funciona para o número 1.
- Obs. Há uma diferença entre o seu objetivo de prova e a prova. O objetivo de prova é o serviço que tem que ser feito. É o que você **tem que** provar. A prova é o serviço feito.

Introdução

Prova de $\forall n \left(1 + 2 + \ldots + n = \frac{n(n+1)}{2}\right)$, para $n > 0$

- Passo indutivo. Temos que provar que $P(k) \to P(k+1)$.

Introdução

Prova de $\forall n \left(1 + 2 + \ldots + n = \frac{n(n+1)}{2}\right)$, para $n > 0$

- Passo indutivo. Temos que provar que $P(k) \rightarrow P(k+1)$.
- Ou seja, dada a premissa $P(k)$, temos que concluir que $P(k+1)$ é verdade.

Introdução

Prova de $\forall n \left(1 + 2 + \ldots + n = \frac{n(n+1)}{2}\right)$, para $n > 0$

- Passo indutivo. Temos que provar que $P(k) \rightarrow P(k+1)$.
- Ou seja, dada a premissa $P(k)$, temos que concluir que $P(k+1)$ é verdade.
- A premissa $P(k)$, a hipótese de indução, é:

$$1 + 2 + \ldots + k = \frac{k(k+1)}{2}$$

Introdução

Prova de $\forall n \left(1 + 2 + \ldots + n = \frac{n(n+1)}{2}\right)$, para $n > 0$

- Passo indutivo. Temos que provar que $P(k) \to P(k+1)$.
- Ou seja, dada a premissa $P(k)$, temos que concluir que $P(k+1)$ é verdade.
- A premissa $P(k)$, a hipótese de indução, é:

$$1 + 2 + \ldots + k = \frac{k(k+1)}{2}$$

- $P(k+1)$, o objetivo de prova do passo indutivo, é

$$1 + 2 + \ldots + k + (k+1) = \frac{(k+1)((k+1)+1)}{2}$$

Introdução

Prova de $\forall n \left(1 + 2 + \ldots + n = \frac{n(n+1)}{2}\right)$, para $n > 0$

Prova do passo indutivo.

1. $1 + 2 + \ldots + k = \frac{k(k+1)}{2}$ [Hipótese de Indução]
2. $1 + 2 + \ldots + k + (k+1) = \frac{k(k+1)}{2} + (k+1)$ [Aritmética em 1]
3. $1 + 2 + \ldots + k + (k+1) = \frac{k(k+1)+2(k+1)}{2}$ [Aritmética em 2]
4. $1 + 2 + \ldots + k + (k+1) = \frac{(k+1)(k+2)}{2}$ [Aritmética em 3]
5. $1 + 2 + \ldots + k + (k+1) = \frac{(k+1)((k+1)+1)}{2}$ [Aritmética em 4]

Introdução

Prova de $\forall n \left(1 + 2 + \ldots + n = \frac{n(n+1)}{2}\right)$, para $n > 0$

Outra prova do passo indutivo.

$$
\begin{aligned}
& 1 + 2 + \ldots + k + (k+1) & \\
&= (1 + 2 + \ldots + k) + (k+1) & [\text{Aritmética}] \\
&= \tfrac{k(k+1)}{2} + (k+1) & [\text{Hipótese de Indução}] \\
&= \tfrac{k(k+1)+2(k+1)}{2} & [\text{Aritmética}] \\
&= \tfrac{k^2+k+2k+2}{2} & [\text{Aritmética}] \\
&= \tfrac{(k+1)(k+2)}{2} & [\text{Aritmética}] \\
&= \tfrac{(k+1)((k+1)+1)}{2} & [\text{Aritmética}]
\end{aligned}
$$

Introdução

Prova de $\forall n \left(1 + 2 + \ldots + n = \frac{n(n+1)}{2}\right)$, para $n > 0$

Outra prova do passo indutivo.

$$
\begin{aligned}
& 1 + 2 + \ldots + k + (k+1) & \\
&= (1 + 2 + \ldots + k) + (k+1) & \text{[Aritmética]} \\
&= \frac{k(k+1)}{2} + (k+1) & \text{[Hipótese de Indução]} \\
&= \frac{k(k+1)+2(k+1)}{2} & \text{[Aritmética]} \\
&= \frac{k^2+k+2k+2}{2} & \text{[Aritmética]} \\
&= \frac{(k+1)(k+2)}{2} & \text{[Aritmética]} \\
&= \frac{(k+1)((k+1)+1)}{2} & \text{[Aritmética]}
\end{aligned}
$$

Saímos do lado esquerdo de $P(k+1)$ e chegamos ao lado direito de $P(k+1)$. A hipótese de indução $P(k)$ é uma equação que ganhamos de graça e usamos ao longo da prova. Este é o estilo de prova usado nos livros.

Introdução

Prova de $\forall n \left(1 + 2 + \ldots + n = \frac{n(n+1)}{2}\right)$, para $n > 0$

Resumindo:

- O caso base provou que $1 = \frac{1(1+1)}{2}$.
- O passo indutivo provou que:

$$\left(1 + 2 + \ldots + k = \frac{k(k+1)}{2}\right) \rightarrow \left(1 + 2 + \ldots + k + (k+1) = \frac{(k+1)((k+1)+1)}{2}\right)$$

- Ou seja, a equação funciona para o 1 (caso base)
- E, se funciona para um certo k, então funciona para $k + 1$ (passo indutivo).

Com a prova do caso base e passo indutivo, provamos por indução que $\forall n \left(1 + 2 + \ldots + n = \frac{n(n+1)}{2}\right)$, para $n > 0$.

Introdução

Exercício.

- Seja $P(n)$ a proposição $1 + 3 + 5 + \ldots + (2n - 1) = n^2$.
- Prove por indução que $P(n)$ é verdade para todo inteiro $n > 0$.

Introdução

Exemplo.

- Seja $P(n)$ a proposição $2^0 + 2^1 + 2^2 + \ldots + 2^n = 2^{n+1} - 1$.
- Objetivo: provar que $P(n)$ é verdade para todo inteiro $n \geq 0$.
- Ou seja, o caso base pode ser outro valor diferente de 1.

Introdução

Exemplo.

- Seja $P(n)$ a proposição $2^0 + 2^1 + 2^2 + \ldots + 2^n = 2^{n+1} - 1$.
- Objetivo: provar que $P(n)$ é verdade para todo inteiro $n \geq 0$.
- Ou seja, o caso base pode ser outro valor diferente de 1.
- Caso base. Temos que provar que $P(0)$ é verdade.
- Ou seja, nosso objetivo de prova é $2^0 = 2^{0+1} - 1$.

Introdução

Exemplo.

- Seja $P(n)$ a proposição $2^0 + 2^1 + 2^2 + \ldots + 2^n = 2^{n+1} - 1$.
- Objetivo: provar que $P(n)$ é verdade para todo inteiro $n \geq 0$.
- Ou seja, o caso base pode ser outro valor diferente de 1.
- Caso base. Temos que provar que $P(0)$ é verdade.
- Ou seja, nosso objetivo de prova é $2^0 = 2^{0+1} - 1$.
- Prova:

$$
\begin{aligned}
& 2^0 & \\
&= 1 & [x^0 = 1] \\
&= 2 - 1 & [2 - 1 = 1] \\
&= 2^1 - 1 & [x^1 = x] \\
&= 2^{0+1} - 1 & [0 + x = x]
\end{aligned}
$$

Introdução

Exemplo. Passo indutivo.
Objetivo: $2^0 + 2^1 + 2^2 + \ldots + 2^k + 2^{k+1} = 2^{(k+1)+1} - 1$.
Prova:

$$\begin{aligned}
& 2^0 + 2^1 + 2^2 + \ldots + 2^k + 2^{k+1} & \\
&= (2^0 + 2^1 + 2^2 + \ldots + 2^k) + 2^{k+1} & \text{[Associatividade]} \\
&= (2^{k+1} - 1) + 2^{k+1} & \text{[Hipótese de Indução]} \\
&= 2 \cdot 2^{k+1} - 1 & [x + x = 2x] \\
&= 2^{(k+1)+1} - 1 & [x^1 \cdot x^n = x^{n+1}]
\end{aligned}$$

Provamos por indução que $\forall n(P(n))$.

Introdução

Exercício.

- Seja $P(n)$ a proposição $ar^0 + ar^1 + ar^2 + \ldots + ar^n = \frac{ar^{n+1}-a}{r-1}$, para $r \neq 1$.
- Prove por indução que $P(n)$ é verdade para todo inteiro $n \geq 0$.

Introdução

Exemplo.

- Seja $P(n)$ a proposição $n < 2^n$.
- Objetivo: provar que $P(n)$ é verdade para todo inteiro $n > 0$.

Introdução

Exemplo.

- Seja $P(n)$ a proposição $n < 2^n$.
- Objetivo: provar que $P(n)$ é verdade para todo inteiro $n > 0$.
- Caso base. Temos que provar que $P(1)$ é verdade.
- Ou seja, nosso objetivo de prova é $1 < 2^1$.

Introdução

Exemplo.

- Seja $P(n)$ a proposição $n < 2^n$.
- Objetivo: provar que $P(n)$ é verdade para todo inteiro $n > 0$.
- Caso base. Temos que provar que $P(1)$ é verdade.
- Ou seja, nosso objetivo de prova é $1 < 2^1$.
- Prova:

$$\begin{array}{ll} 1 & \\ < 2 & [\text{Aritmética}] \\ = 2^1 & [x^1 = x] \end{array}$$

Introdução

Exemplo. Passo indutivo.
Objetivo: $(k+1) < 2^{k+1}$.
Prova:

$$
\begin{aligned}
& k+1 \\
& < 2^k + 1 && \text{[H.I. somado a 1 em ambos os lados]} \\
& < 2^k + 2^k && [1 < 2^k, k > 0] \\
& = 2 \cdot 2^k && [\mathrm{x+x=2x}] \\
& = 2^{k+1} && [x^1 \cdot x^k = x^{k+1}]
\end{aligned}
$$

Escrevendo horizontalmente:
$(k+1) < (2^k + 1) < (2^k + 2^k) = (2 \cdot 2^k) = (2^{k+1})$.

Provamos por indução que $\forall(n > 0)(P(n))$.

Introdução

Outra forma de prova.

Exemplo. Passo indutivo.
Objetivo: $(k+1) < 2^{k+1}$.
Prova:

1. $k < 2^k$	[Hipótese de Indução]
2. $(k+1) < (2^k + 1)$	[Soma 1 aos 2 lados de (1)]
3. $1 < 2^k$	$[1 < 2^k, k > 0]$
4. $(2^k + 1) < (2^k + 2^k)$	[Soma 2^k aos 2 lados de (3)]
5. $(k+1) < (2^k + 2^k)$	[Transitividade em (2) e (4)]
6. $(k+1) < (2 \cdot 2^k)$	$[x + x = 2x]$
7. $(k+1) < 2^{k+1}$	$[x^1 \cdot x^k = x^{k+1}]$

Provamos por indução que $\forall(n > 0)(P(n))$.

Introdução

Exercício.

- Seja $P(n)$ a proposição $2^n < n!$, para $n \geq 4$.
- Prove por indução que $P(n)$ é verdade para todo inteiro $n \geq 4$.
- Use o fato que $0! = 1$ e $n! = n \cdot (n-1)!$ para $n \geq 0$.

Introdução

Resumindo

- Indução matemática prova que $\forall n(P(n))$, para $n > 0$.
- Para resolver a prova:
  - Descubra qual o objetivo de prova do caso base: $P(1)$
  - Prove o caso base
  - Descubra qual o objetivo de prova do passo indutivo: $P(k+1)$
  - Descubra qual a hipótese de indução: $P(k)$
  - Prove o passo indutivo

Introdução

Resumindo

- Indução matemática prova que $\forall n(P(n))$, para $n > 0$.
- Para resolver a prova:
  - Descubra qual o objetivo de prova do caso base: $P(1)$
  - Prove o caso base
  - Descubra qual o objetivo de prova do passo indutivo: $P(k+1)$
  - Descubra qual a hipótese de indução: $P(k)$
  - Prove o passo indutivo
- Lembre-se: apesar de indução matemática ser muito usada com somatórios, $P(n)$ pode ser qualquer proposição.

  Por exemplo, prove que $\forall n(P(n))$, para todo $n > 0$, onde $P(n)$ é $n + n = 2n$.

1. Indução Matemática

2. Definições Recursivas e Indução Estrutural

Introdução

- Às vezes é difícil definir um objeto explicitamente.
- Alguns objetos são mais fáceis de definir de forma *recursiva*.
- Ou seja, ele é definido em termos dele mesmo!

Funções Definidas Recursivamente

Exemplo.

- Passo base. $f(0) = 1$
- Passo recursivo. $f(n+1) = 2{\cdot}f(n)$

Exercício. Calcule $f(0)$, $f(1)$ e $f(2)$.

Funções Definidas Recursivamente

Receita para o caso geral:

- Passo base. Defina o valor da função em zero.
- Passo recursivo. Defina o valor da função em $n+1$ em termos de $f(n), f(n-1), f(n-2), \ldots, f(0)$.

Funções Definidas Recursivamente

Exercício.

- Defina a função fatorial de forma recursiva.

Funções Definidas Recursivamente

Exemplo. Fibonacci

- $fib(0) = 0$
- $fib(1) = 1$
- $fib(n) = fib(n-1) + fib(n-2)$

Exercício. Calcule $fib(2)$, $fib(3)$, $fib(4)$ e $fib(5)$.

Conjuntos Definidos Recursivamente

Como definir conjuntos recursivamente?

- Passo base. $10 \in S$
- Passo recursivo. Se $x \in S$, então $x + 5 \in S$.
- Regra da exclusão. Todos elementos de S são provenientes do passo base e passo recursivo.

Conjuntos Definidos Recursivamente

Como definir conjuntos recursivamente?

- Passo base. $10 \in S$
- Passo recursivo. Se $x \in S$, então $x + 5 \in S$.
- Regra da exclusão. Todos elementos de S são provenientes do passo base e passo recursivo.
- Exercício. Os números pertencentes a S possuem que propriedade?

Conjuntos Definidos Recursivamente

Exercício. Defina de forma recursiva o conjunto F que contém todos os usuários do Facebook. Assuma que: (1) o primeiro usuário foi Mark Zuckerberg; e que (2) só entra no Facebook aqueles que são convidados por quem já é usuário do Facebook.

Conjuntos Definidos Recursivamente

Fórmulas Bem Formadas (FBF)

- Podemos definir de forma recursiva o conjunto de *fórmulas bem formadas* da lógica proposicional.

Conjuntos Definidos Recursivamente

Fórmulas Bem Formadas (FBF)

- Podemos definir de forma recursiva o conjunto de *fórmulas bem formadas* da lógica proposicional.
- Exemplos de fórmulas bem formadas:
  - "p"
  - "q"
  - "T"
  - "F"
  - "$(p \to q)$"
  - "$((\neg(p \vee q)) \vee (r \to (\neg t)))$"

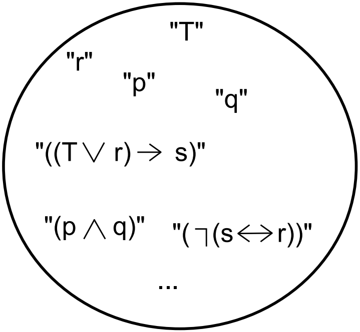
Conjuntos Definidos Recursivamente

Fórmulas Bem Formadas (FBF)

- Podemos definir de forma recursiva o conjunto de *fórmulas bem formadas* da lógica proposicional.
- Exemplos de fórmulas bem formadas:
  - "p"
  - "q"
  - "T"
  - "F"
  - "$(p \to q)$"
  - "$((\neg(p \vee q)) \vee (r \to (\neg t)))$"
- Exemplos de fórmulas mal formadas:
  - "$p \vee \wedge q$"
  - "$q \neg$"
  - "$(\neg \mathrm{T}(p \wedge q)$"

Conjuntos Definidos Recursivamente

Fórmulas Bem Formadas (FBF)



Como definir este conjunto de **strings**?

Conjuntos Definidos Recursivamente

Fórmulas Bem Formadas (FBF)

Antes, um pouco sobre strings.

- Um string é um texto.
  Exemplo. "Oba!", "E a vida?" e "a b c" são 3 strings.

Conjuntos Definidos Recursivamente

Fórmulas Bem Formadas (FBF)

Antes, um pouco sobre strings.

- Um string é um texto.
  Exemplo. "Oba!", "E a vida?" e "a b c" são 3 strings.
- Colaremos strings (concatenar) com o símbolo de $+$.
  Exemplo. "Olá, " $+$ "como vai?" $=$ "Olá, como vai?"

Conjuntos Definidos Recursivamente

Fórmulas Bem Formadas (FBF)

Antes, um pouco sobre strings.

- Um string é um texto.
  Exemplo. "Oba!", "E a vida?" e "a b c" são 3 strings.
- Colaremos strings (concatenar) com o símbolo de $+$.
  Exemplo. "Olá, " $+$ "como vai?" $=$ "Olá, como vai?"
- Usaremos variáveis do tipo string.
  Exemplo. Seja $E =$ "abra" e $F =$ "cadabra". Defina:
  $E+$" a porta"
  $E + F$
  $E + F + E$
  $E+$" a porta"$+$", por favor."

Conjuntos Definidos Recursivamente

Fórmulas Bem Formadas (FBF)

Agora já podemos definir nosso conjunto de fórmulas bem formadas!

Conjuntos Definidos Recursivamente

Fórmulas Bem Formadas (FBF)

- Passo base 1. “T” $\in FBF$
- Passo base 2. “F” $\in FBF$

Conjuntos Definidos Recursivamente

Fórmulas Bem Formadas (FBF)

- Passo base 1. “T” $\in FBF$
- Passo base 2. “F” $\in FBF$
- Passo base 3. “p”, “q”, “r”, $\ldots \in FBF$

Conjuntos Definidos Recursivamente

Fórmulas Bem Formadas (FBF)

- Passo base 1. "T" $\in FBF$
- Passo base 2. "F" $\in FBF$
- Passo base 3. "p", "q", "r", $\ldots \in FBF$
- Passo recursivo 1. Se $E \in FBF$, então "(¬" + E+ ")" $\in FBF$
- Passo recursivo 2. Se $E \in FBF$ e $G \in FBF$, então "(" +E+ " $\wedge$ " +G+ ")" $\in FBF$
- Passo recursivo 3. Se $E \in FBF$ e $G \in FBF$, então "(" +E+ " $\vee$ " +G+ ")" $\in FBF$
- Passo recursivo 4. Se $E \in FBF$ e $G \in FBF$, então "(" +E+ " $\rightarrow$ " +G+ ")" $\in FBF$
- Passo recursivo 5. Se $E \in FBF$ e $G \in FBF$, então "(" +E+ " $\leftrightarrow$ " +G+ ")" $\in FBF$

Conjuntos Definidos Recursivamente

Fórmulas Bem Formadas (FBF)

Exemplo.

- Seja $E =$ "$(p \wedge q)$".
  Então, o texto "$($$\neg$" $+$ E $+$ "$)$" $=$ "$(\neg(p \wedge q))$".

Conjuntos Definidos Recursivamente

Fórmulas Bem Formadas (FBF)

- Passo base 1. "T" $\in FBF$
- Passo base 2. "F" $\in FBF$
- Passo base 3. "p","q","r", ... $\in FBF$
- Passo recursivo. Se $E \in FBF$ e $G \in FBF$, então "($\neg$"+ G+")" $\in FBF$ "("+E+" $\wedge$ "+G+")" $\in FBF$ "("+E+" $\vee$ "+G+")" $\in FBF$ "("+E+" $\rightarrow$ "+G+")" $\in FBF$ "("+E+" $\leftrightarrow$ "+G+")" $\in FBF$

Por que "$(\neg(p \wedge \mathrm{F}))$" é bem formado?

- "p" é uma fórmula bem formada (passo base 3)
- "F" é uma fórmula bem formada (passo base 2)
- "$(p \wedge \mathrm{F})$" é uma fórmula bem formada (passo recursivo)
- "$(\neg(p \wedge \mathrm{F}))$" é uma fórmula bem formada (passo recursivo)

Conjuntos Definidos Recursivamente

Fórmulas Bem Formadas (FBF)

- Passo base 1. "T" é uma fórmula bem formada.
- Passo base 2. "F" é uma fórmula bem formada.
- Passo base 3. Uma variável proposicional ("p","q" etc.) é uma fórmula bem formada.
- Passo recursivo. Sejam E e G fórmulas bem formadas. Então, também são fórmulas bem formadas: "($\neg$"+E+")", "("+E+" $\wedge$ "+G+")", "("+E+" $\vee$ "+G+")", "("+E+" $\rightarrow$ "+G+")", "("+E+" $\leftrightarrow$ "+G+")".

Exercício. As fórmulas abaixo são bem formadas?

- "$(\mathrm{T} \vee p)$"
- "$((\neg p) \wedge (q \leftrightarrow (\neg r)))$"
- "$(p \wedge \neg(q \wedge \mathrm{F}))$"