Lógica e Prova

Centro de Informática
UFPE

Lógica e Prova

Lógica Proposicional

Introdução

Para que estudar lógica?

- Se o ônibus se atrasa e não há táxis, então Fulano se atrasa. Sabemos que Fulano não se atrasou. Sabemos que o ônibus se atrasou. Portanto, havia táxis.

  Lógica permite-nos validar e construir argumentos corretamente.

Lógica Proposicional

Introdução

Para que estudar lógica?

- Se o ônibus se atrasa e não há táxis, então Fulano se atrasa. Sabemos que Fulano não se atrasou. Sabemos que o ônibus se atrasou. Portanto, havia táxis.

  Lógica permite-nos validar e construir argumentos corretamente.

- Quando a voltagem for maior que 80 e o timer for maior ou igual a 220 e os pisca-alertas esquerdo e direito estiverem desligados e o pisca-alerta está no modo de pisca-alerta, então desligue o pisca-alerta direito, ligue o pisca-alerta esquerdo e reinicie o timer. Mercedes-Benz

  Lógica permite-nos descrever o comportamento de um software ou hardware precisamente. Isto permite-nos simular ou provar matematicamente a corretude do sistema antes mesmo de construí-lo.

Lógica Proposicional

- Uma *proposição* é uma sentença declarativa que é verdadeira (*true* ou T) ou falsa (*false* ou F), mas não ambos.

Lógica Proposicional

- Uma *proposição* é uma sentença declarativa que é verdadeira (*true* ou T) ou falsa (*false* ou F), mas não ambos.
- Exemplos
  - A soma de 3 e 8 é 11.
  - A capital do Brasil é Brasília.
  - $2 + 2 = 5$.
  - Todo número par natural é a soma de 2 primos (conjectura de Goldbach).
  - 3 é um inteiro par ou não é verdade que 7 é um primo.

Lógica Proposicional

- Não são proposições:
  - Pode me passar o sal por favor?
  - Pedala, Robinho!
  - Faça todos os exercícios de *Discrete Mathematics and Its Applications*.
  - Que horas são?
  - $x + 1 = 2$

Lógica Proposicional

Exercício

Qual das sentenças abaixo são proposições? Para aquelas que são proposições, qual seu valor (verdadeiro ou falso)?

- João Pessoa é a capital da Paraíba.
- Nova Iorque é a capital dos Estados Unidos.
- $2 + 3 = 5$
- $5 + 7 = 10$
- Não existem elefantes no Maranhão.
- $2^n \geq 100$.

Lógica Proposicional

Exercício

Qual a negação das proposições abaixo?

- Hoje é quinta.
- Não há corruptos em Brasília.
- $2 + 1 = 3$
- Correr ou nadar são atividades importantes.

Lógica Proposicional

Notação

- Usaremos letras as letras p, q, r, ... para denotar *variáveis proposicionais*.
- Ou seja, elas representam proposições.
- Exemplo. Sejam $p =$ "Chove toda quinta-feira" e $q =$ "$5 + 3 = 8$".

Lógica Proposicional

Negação

- Seja p uma proposição. A negação de p, denotada por $\neg p$ ou $\bar{p}$, é a proposição "Não é verdade que p".
- O valor $\neg p$ é sempre o oposto do valor de p.
- Exemplo. Sejam $p =$ "Chove toda quinta-feira" e $q =$ "$5 + 3 = 8$". Então,
  $\neg p =$ "Não é verdade que chove toda quinta-feira" e
  $\neg q =$ "Não é verdade que $5 + 3 = 8$".

Lógica Proposicional

Negação

Tabela verdade da negação.

p	$\neg p$
F	T
T	F

onde F denota falso e T, verdadeiro (do inglês, *true*).

Lógica Proposicional

Conjunção

- Sejam p e q proposições. A conjunção de p e q, denotada por $p \wedge q$, é a proposição "p e q".
- A conjunção $p \wedge q$ é verdade quando *ambos* p e q são verdade.

Lógica Proposicional

Conjunção

Exemplo

- Seja $p =$ "Chove toda quinta-feira"
- Seja $q =$ "$5 + 3 = 8$"
- Então, $p \wedge q =$ "Chove toda quinta-feira **e** $5 + 3 = 8$"

Lógica Proposicional

Conjunção

Tabela verdade da conjunção.

p	q	$p \wedge q$
F	F	F
F	T	F
T	F	F
T	T	T

Lógica Proposicional

Disjunção

- Sejam p e q proposições. A disjunção de p e q, denotada por $p \vee q$, é a proposição "p ou q (ou ambos)".
- A disjunção $p \vee q$ é falsa quando *ambos* p e q são falso. Ou seja, $p \vee q$ é verdadeiro se p for verdadeiro ou q for verdadeiro, ou *ambos* (por isto, $\vee$ é também chamado de ou inclusivo).

Lógica Proposicional

Disjunção

Exemplo

- Seja $p =$ "Lula é o presidente do Brasil"
- Seja $q =$ "Lula é do PT"
- Então, $p \vee q =$ "Lula é o presidente do Brasil **ou** Lula é do PT **(ou ambos)**".

Lógica Proposicional

Disjunção

Tabela verdade da disjunção.

p	q	$p \vee q$
F	F	F
F	T	T
T	F	T
T	T	T

Lógica Proposicional

ou-exclusivo

- Sejam p e q proposições. O ou-exclusivo de p e q, denotado por $p \oplus q$, é a proposição que é verdadeira se exatamente uma das proposições p ou q é verdadeira.
- Caso contrário, $p \oplus q$ é falso.
- Ou-exclusivo é lido como "xor" (do inglês, *eXclusive OR*).

Lógica Proposicional

ou-exclusivo

Exemplo

- Seja $p =$ "Lula é o presidente do Brasil"
- Seja $q =$ "Lula é do PT"
- Então, $p \oplus q =$ "Lula é o presidente do Brasil **ou** Lula é do PT **(mas não ambos)**".
- Alternativamente, $p \oplus q =$ "Lula é o presidente do Brasil **xor** Lula é do PT".
- No exemplo acima, $p \oplus q$ é verdadeiro apenas se:
  - Lula não for o presidente do Brasil e Lula for do PT;
  - Lula for o presidente do Brasil e não for do PT.

Lógica Proposicional

ou-exclusivo

Tabela verdade do ou-exclusivo.

p	q	$p \oplus q$
F	F	F
F	T	T
T	F	T
T	T	F

Lógica Proposicional

Implicação

- Sejam p e q proposições.
- $p \to q$ é a proposição "Se p, então q" ou "p implica q".
- $p \to q$ é falso quando p é verdadeiro e q, falso. Caso contrário, $p \to q$ é verdadeiro.

Lógica Proposicional

Implicação

Exemplo

- Seja $p =$ "Lula é prefeito de Garanhuns"
- Seja $q =$ "Garanhuns é mais rica que Recife"
- $p \rightarrow q =$ "**Se** Lula for prefeito de Garanhuns, **então** Garanhuns será mais rica que Recife"
- Se Lula não for prefeito de Garanhuns, $p \rightarrow q$ é verdadeiro ou falso?

Lógica Proposicional

Implicação

- Se Lula não for eleito prefeito de Garanhuns (ou seja, p é falso), consideramos $p \to q$ verdadeiro.
- Não podemos chamar Lula de mentiroso.
- Damos a Lula o *benefício da dúvida*

Lógica Proposicional

Implicação

- Ou seja, temos certeza da falsidade de $p \to q$ quando p é verdade e q é falso.
- Caso contrário, $p \to q$ é verdadeiro.
- Isto pode soar estranho, mas a implição da lógica formal faz parte de uma linguagem matemática.
- Não deve ser interpretada com os significados usuais da língua portuguesa (ou inglesa).
- De forma análoga, "ou" na língua portuguesa tem ambiguidade (pode ser inclusivo ou exclusivo), enquanto "ou" da lógica é preciso.

Lógica Proposicional

Implicação

Tabela verdade da implicação.

p	q	$p \rightarrow q$
F	F	T
F	T	T
T	F	F
T	T	T

Lógica Proposicional

Implicação

Exercício. Qual destas proposições são verdadeiras ou falsas?

- Eu sei nadar e eu não sei nadar
- Eu sei nadar ou eu não sei nadar (ou ambos)
- Eu vou à praia xor eu não vou à praia
- Se $(1+1=0)$, então $(1+2=2)$
- Se $(1+1=0)$, então $(1+2=\sqrt{2})$

Lógica Proposicional

Implicação

Exercício. Qual destas proposições são verdadeiras ou falsas?

- Eu sei nadar e eu não sei nadar
- Eu sei nadar ou eu não sei nadar (ou ambos)
- Eu vou à praia xor eu não vou à praia
- Se $(1 + 1 = 0)$, então $(1 + 2 = 2)$
- Se $(1 + 1 = 0)$, então $(1 + 2 = \sqrt{2})$
- Se meu pai for mulher, então eu tenho duas mães

Lógica Proposicional

Implicação

Definições.

- O *contrapositivo* de $p \to q$ é $\neg q \to \neg p$.
- O contrapositivo é logicamente equivalente a $p \to q$, ou seja, tanto faz usar $p \to q$ ou $\neg q \to \neg p$.
- O *converso* de $p \to q$ é $q \to p$.
- O *inverso* de $p \to q$ é $\neg p \to \neg q$.

Lógica Proposicional

se-e-somente-se

- Sejam p e q proposições. O termo $p \leftrightarrow q$ é a proposição "p se e somente se q".
- $p \leftrightarrow q$ é verdadeiro quando p e q têm valores iguais. Caso contrário, $p \leftrightarrow q$ é falso.
- $p \leftrightarrow q$ é logicamente equivalente a $(p \to q) \land (q \to p)$.

Lógica Proposicional

se-e-somente-se

- Sejam $p =$ "Lula é prefeito de Garanhuns" e $q =$ "Garanhuns tem mais de 1 milhão de habitantes".
- Então, $p \leftrightarrow q =$ "Lula é prefeito de Garanhuns se e somente se Garanhuns tem mais de 1 milhão de habitantes".
- Se Garanhuns tem mais de 1 milhão de habitantes, então Lula é prefeito de Garanhus.
- Se Lula é prefeito de Garanhuns, então Garanhuns tem mais de 1 milhão de habitantes.

Lógica Proposicional

se-e-somente-se

Tabela verdade de se-e-somente-se.

p	q	$p \leftrightarrow q$
F	F	T
F	T	F
T	F	F
T	T	T

Lógica Proposicional

Proposições Compostas

- Vimos os operadores lógicos: $\neg$, $\wedge$, $\vee$, $\oplus$, $\rightarrow$ e $\leftrightarrow$.
- Agora podemos construir proposições mais elaboradas.
- Por exemplo,

  $(p \vee \neg q) \rightarrow (p \wedge q)$ e

  $(p \leftrightarrow q) \leftrightarrow ((p \rightarrow q) \wedge (q \rightarrow p))$

  são proposições compostas.

Lógica Proposicional

Proposições Compostas

Tabela verdade de $(p \vee \neg q) \rightarrow (p \wedge q)$.

p	q	$\neg q$	$(p \vee \neg q)$	$(p \wedge q)$	$(p \vee \neg q) \rightarrow (p \wedge q)$
F	F	T	T	F	F
F	T	F	F	F	T
T	F	T	T	F	F
T	T	F	T	T	T

Lógica Proposicional

Proposições Compostas

Exercício. Faça a tabela verdade de $(p \rightarrow q) \wedge (q \rightarrow p)$. Compare este resultado com a tabela verdade de $p \leftrightarrow q$.

Exercício. Faça a tabela verdade de
$((p \oplus q) \vee (p \wedge \neg r)) \rightarrow (r \leftrightarrow q)$.

Lógica Proposicional

Precedência

- Quanto é $5 \cdot 3 - 1$?
  - $5 \cdot (3 - 1)$ ou
  - $(5 \cdot 3) - 1$?
- Da mesma forma que há convenções para operadores da aritmética, também há para operadores da lógica.

Operador	Precedência
$\neg$	1
$\oplus$	2
$\wedge$	3
$\vee$	4
$\rightarrow$	5
$\leftrightarrow$	6

Lógica Proposicional

Modelagem a partir de linguagem natural

- Linguagem natural: língua falada por pessoas. Exemplo: português, inglês, francês etc.
- Como traduzir de uma linguagem natural como português (ou inglês) para lógica?
- "Se o ônibus se atrasa e não há táxis, então Fulano se atrasa."
    - Sejam $p =$ "o ônibus se atrasa", $q =$ "há táxis" e $r =$ "Fulano se atrasa".
    - A frase em português pode ser traduzida para $(p \wedge \neg q) \rightarrow r$

Lógica Proposicional

Modelagem a partir de linguagem natural

Exercício. Modele as frases abaixo em lógica proposicional.

- "Se o servidor web não responder em 5 segundos e o site não estiver na *cache*, então uma mensagem de erro é exibida."
- "Fulano estava com ciúmes de Fulana ou ele estava de mau-humor (ou ambos)."
- "Sicrano espirra alto e constantemente."
- "Se o barômetro está quebrado, então chove ou fica nublado (mas não ambos)."

Lógica Proposicional

Computadores e lógica

- Computadores operam sobre valores 0 e 1
- Tipicamente, um 0 pode ser um fio sem voltagem e 1, um fio com voltagem
- 0 é associado com F e o 1, com T.
- Circuitos eletrônicos podem calcular operações lógicas como $\neg$, $\wedge$, $\vee$, $\oplus$ etc.
- Todo computador é portanto construído a partir de zeros, uns (fios com ou sem voltagem) e operadores lógicos.

Exercícios recomendados

- Seção 1.1: do 1 ao 38 (no mínimo)
- Discrete Mathematics and Its Applications
  Kenneth Rosen, 6a edição

Lógica e Prova

Equivalência Lógica

Proposição Composta

- Uma *proposição composta* é uma expressão formada por variáveis proposicionais e operadores lógicos.
- Exemplo. As expressões $(p \land q)$ e $(r \rightarrow (s \lor \neg q))$ são proposições compostas. Já as expressões p e r não são.

Equivalência Lógica

Tautologia

- Tautologia é uma proposição composta que é sempre T, independente do valor de suas variáveis.
- Exemplo. A proposição composta $(p \vee \neg p)$ é sempre T.

p	$\neg p$	$p \vee \neg p$
T	F	T
F	T	T

Independente de p ser T ou F, $(p \vee \neg p)$ é sempre T.

Equivalência Lógica

Tautologia

Exercício.

- Faça tabela verdade de $\neg(p \land \neg p)$.
- É uma tautologia?

Equivalência Lógica

Contradição

- Contradição é uma proposição composta que é sempre F, independente do valor de suas variáveis.
- Exemplo. A proposição composta $(p \wedge \neg p)$ é sempre F.

p	$\neg p$	$p \wedge \neg p$
T	F	F
F	T	F

Independente de p ser T ou F, $(p \wedge \neg p)$ é sempre F.

Equivalência Lógica

Contradição

Exercício.

- Faça a tabela verdade de $(p \to p) \to (q \wedge \neg q)$.
- É uma contradição?

Equivalência Lógica

- As proposições compostas p e q são *logicamente equivalentes* se elas possuem o mesmo valor a cada linha da tabela verdade.
- Exemplo. As proposições compostas $(p \to q)$ e $(\neg p \vee q)$ são logicamente equivalentes.

p	q	$p \to q$	$\neg p \vee q$
F	F	T	T
F	T	T	T
T	F	F	F
T	T	T	T

Toda vez que $(p \to q)$ é falso, $(\neg p \vee q)$ também o é.
E toda vez que $(p \to q)$ é verdadeiro, $(\neg p \vee q)$ também é verdadeiro.

Equivalência Lógica

Exercício.

- Faça a tabela verdade de $\neg(p \wedge q)$ e $(\neg p \vee \neg q)$.
- Estruture sua tabela assim:

p	q	$p \wedge q$	$\neg(p \wedge q)$	$\neg p$	$\neg q$	$\neg p \vee \neg q$

Equivalência Lógica

- Refrescando a memória:

p	q	$p \leftrightarrow q$
F	F	T
F	T	F
T	F	F
T	T	T

- Note que $(p \leftrightarrow q)$ é verdadeiro sempre que p e q possuem o mesmo valor em cada linha da tabela verdade (lembre que p e q também podem ser proposições compostas).
- Portanto, podemos definir equivalência lógica em termos do operador $\leftrightarrow$ e do conceito de tautologia.

Equivalência Lógica

- Definição. As proposições compostas p e q são *logicamente equivalentes* se $p \leftrightarrow q$ é uma tautologia.

Equivalência Lógica

Exemplo. Considere novamente $(p \to q)$ e $(\neg p \vee q)$.

p	q	$p \to q$	$\neg p \vee q$	$(p \to q) \leftrightarrow (\neg p \vee q)$
F	F	T	T	T
F	T	T	T	T
T	F	F	F	T
T	T	T	T	T

- Toda vez que $(p \to q)$ é falso, $(\neg p \vee q)$ também o é.
- E toda vez que $(p \to q)$ é verdadeiro, $(\neg p \vee q)$ também é verdadeiro.
- Então, $(p \to q) \leftrightarrow (\neg p \vee q)$ é sempre verdadeiro em cada linha da tabela verdade.
- Ou seja, $(p \to q) \leftrightarrow (\neg p \vee q)$ é uma tautologia.

Equivalência Lógica

- Sejam p e q proposições compostas. A notação $p \equiv q$ é uma abreviação da frase "$(p \leftrightarrow q)$ é uma tautologia" ou "p é logicamente equivalente a q".
- **Importante:** o símbolo $\equiv$ **não é** um operador da lógica. Nem $(p \equiv q)$ é uma proposição composta. O termo $(p \equiv q)$ é simplesmente uma **abreviação do português** para as frases "$(p \leftrightarrow q)$ é uma tautologia" ou "p é logicamente equivalente a q".

Equivalência Lógica

- Como mostrar que duas proposições compostas são logicamente equivalentes?
- Uma forma é calcular a tabela verdade de p e de q e verificar se os valores em cada linha da tabela são iguais.

Equivalência Lógica

Exercício. Mostre que:

- $\neg(p \wedge q) \equiv (\neg p \vee \neg q)$.
- $\neg(p \vee q) \equiv (\neg p \wedge \neg q)$.
  As equivalências acima são chamadas de Leis de De Morgan.
- $(p \vee (q \wedge r)) \equiv ((p \vee q) \wedge (p \vee r))$

Equivalência Lógica

$p \wedge \mathrm{T} \equiv p$ $p \vee \mathrm{F} \equiv p$	*Leis da identidade*
$p \vee \mathrm{T} \equiv \mathrm{T}$ $p \wedge \mathrm{F} \equiv \mathrm{F}$	*Leis de dominação*
$p \vee p \equiv p$ $p \wedge p \equiv p$	*Leis de idempotência*
$\neg(\neg p) \equiv p$	*Lei da dupla negação*
$p \vee q \equiv q \vee p$ $p \wedge q \equiv q \wedge p$	*Leis da comutatividade*
$(p \vee q) \vee r \equiv p \vee (q \vee r)$ $(p \wedge q) \wedge r \equiv p \wedge (q \wedge r)$	*Leis da associatividade*
$p \vee (q \wedge r) \equiv (p \vee q) \wedge (p \vee r)$ $p \wedge (q \vee r) \equiv (p \wedge q) \vee (p \wedge r)$	*Leis da distributividade*

Equivalência Lógica

$\neg(p \wedge q) \equiv \neg p \vee \neg q$ $\neg(p \vee q) \equiv \neg p \wedge \neg q$	*Leis de De Morgan*
$p \vee (p \wedge q) \equiv p$ $p \wedge (p \vee q) \equiv p$	*Leis de absorção*
$p \vee \neg p \equiv \mathsf{T}$ $p \wedge \neg p \equiv \mathsf{F}$	*Leis da negação*
$p \to q \equiv \neg p \vee q$ $p \to q \equiv \neg q \to \neg p$ $p \vee q \equiv \neg p \to q$ $p \wedge q \equiv \neg(p \to \neg q)$ $\neg(p \to q) \equiv p \wedge \neg q$ $(p \to q) \wedge (p \to r) \equiv p \to (q \wedge r)$ $(p \to r) \wedge (q \to r) \equiv (p \vee q) \to r$ $(p \to q) \vee (p \to r) \equiv p \to (q \vee r)$ $(p \to r) \vee (q \to r) \equiv (p \wedge q) \to r$	*Condicional*

Equivalência Lógica

$p \leftrightarrow q \equiv (p \rightarrow q) \wedge (q \rightarrow p)$ $p \leftrightarrow q \equiv \neg p \leftrightarrow \neg q$ $p \leftrightarrow q \equiv (p \wedge q) \vee (\neg p \wedge \neg q)$ $\neg(p \leftrightarrow q) \equiv p \leftrightarrow \neg q$	*Se-e-somente-se*

Equivalência Lógica

- Como mostrar que duas proposições compostas são logicamente equivalentes?
- Já vimos que podemos simplesmente construir a tabela verdade de p e q e comparar cada uma de suas linhas.
- Outra forma de mostrar equivalência é transformar p em q através de substituições de proposições logicamente equivalentes.

Equivalência Lógica

Exemplo.

- Como provar que $\neg(p \leftrightarrow q) \equiv ((p \wedge \neg q) \vee (q \wedge \neg p))$?

Equivalência Lógica

Exemplo.

- Como provar que $\neg(p \leftrightarrow q) \equiv ((p \wedge \neg q) \vee (q \wedge \neg p))$?
- $\neg(p \leftrightarrow q)$ é o lado esquerdo da equivalência.
- $(p \wedge \neg q) \vee (q \wedge \neg p)$ é o lado direito.

Equivalência Lógica

Exemplo.

- Como provar que $\neg(p \leftrightarrow q) \equiv ((p \wedge \neg q) \vee (q \wedge \neg p))$?
- $\neg(p \leftrightarrow q)$ é o lado esquerdo da equivalência.
- $(p \wedge \neg q) \vee (q \wedge \neg p)$ é o lado direito.
- Para provar, começamos pelo lado esquerdo e, através de uma sequência de aplicações de leis, chegamos ao lado direito.

$$\begin{array}{ll} \neg(p \leftrightarrow q) & \\ \equiv \textit{alguma equação} & \text{[justificativa]} \\ \equiv \textit{alguma equação} & \text{[justificativa]} \\ \equiv \textit{alguma equação} & \text{[justificativa]} \\ \equiv \textit{alguma equação} & \text{[justificativa]} \\ \equiv (p \wedge \neg q) \vee (q \wedge \neg p) & \text{[justificativa]} \end{array}$$

Equivalência Lógica

Exemplo.

- Como provar que $\neg(p \leftrightarrow q) \equiv ((p \wedge \neg q) \vee (q \wedge \neg p))$?
- $\neg(p \leftrightarrow q)$ é o lado esquerdo da equivalência.
- $(p \wedge \neg q) \vee (q \wedge \neg p)$ é o lado direito.
- Para provar, começamos pelo lado esquerdo e, através de uma sequência de aplicações de leis, chegamos ao lado direito.

$$\begin{array}{ll} \neg(p \leftrightarrow q) & \\ \equiv \textit{alguma equação} & \text{[justificativa]} \\ \equiv \textit{alguma equação} & \text{[justificativa]} \\ \equiv \textit{alguma equação} & \text{[justificativa]} \\ \equiv \textit{alguma equação} & \text{[justificativa]} \\ \equiv (p \wedge \neg q) \vee (q \wedge \neg p) & \text{[justificativa]} \end{array}$$

- Podemos também começar pela direita e chegar ao lado esquerdo.

Equivalência Lógica

ERRO COMUM

- Prove que $\neg(p \leftrightarrow q) \equiv ((p \wedge \neg q) \vee (q \wedge \neg p))$?
- O aluno erradamente começa a prova afirmando o que o que se quer provar.

$$
\begin{array}{ll}
\neg(p \leftrightarrow q) \equiv (p \wedge \neg q) \vee (q \wedge \neg p) & \text{[justificativa]} \\
\textit{alguma equação} \equiv \textit{alguma equação} & \text{[justificativa]} \\
\textit{alguma equação} \equiv \textit{alguma equação} & \text{[justificativa]} \\
\textit{alguma equação} \equiv \textit{alguma equação} & \text{[justificativa]} \\
\textit{alguma equação} \equiv \textit{alguma equação} & \text{[justificativa]} \\
\dots &
\end{array}
$$

- $\neg(p \leftrightarrow q) \equiv ((p \wedge \neg q) \vee (q \wedge \neg p))$ é o nosso objetivo de prova. Não podemos iniciar a prova afirmando que isso é verdade.

Equivalência Lógica

- Mostrar que $\neg(p \rightarrow q) \equiv (p \wedge \neg q)$.

$$\begin{aligned}
&\neg(p \rightarrow q) \\
&\equiv \neg(\neg p \vee q) && [\textit{condicional}] \\
&\equiv \neg(\neg p) \wedge \neg q && [\textit{de Morgan}] \\
&\equiv p \wedge \neg q && [\textit{dupla negação}]
\end{aligned}$$

Veja o link "Como aplicar as leis da lógica" no site do curso para obter uma introdução de como aplicar estas leis.

Equivalência Lógica

Exercício. Usando de Morgan, dupla negação e condicional:

- Mostrar que $\neg(p \wedge (q \wedge \neg r)) \equiv \neg p \vee (q \rightarrow r)$.

Equivalência Lógica

Exercício.

- Mostrar que $\neg(p \to q) \equiv (p \wedge \neg q)$. Inicie pelo lado direito e chegue ao lado esquerdo.

.

Equivalência Lógica

Exercício.

- Mostrar que $\neg(p \vee (\neg p \wedge q))$ e $(\neg p \wedge \neg q)$ são logicamente equivalentes.

Equivalência Lógica

Exercício. Use apenas associatividade e comutatividade do $\wedge$:

- Prove que $(p \wedge q) \wedge (r \wedge s) \equiv (p \wedge s) \wedge (q \wedge r)$. Ou seja, eu posso agrupar e ordenar as variáveis como quiser, desde que todos estejam ligados pelo **mesmo operador** (seja $\wedge$ ou $\vee$).

Equivalência Lógica

- Exercício. Prove que $(p \wedge q) \rightarrow (p \vee q)$ é logicamente equivalente a T.

Equivalência Lógica

Como justificar cada passo de prova?

- Com uma justificativa por passo. Fazendo assim, você sempre acerta.
- Exemplo:

$$\begin{aligned} &\neg\neg p \\ &\equiv p \quad [9] \end{aligned}$$

Equivalência Lógica

Como justificar cada passo de prova?

- OPCIONAL. Se for usada a mesma equação n vezes, pode-se justificar com a equação repetida n vezes.
- Exemplo:

$$\begin{array}{ll} \neg\neg\neg\neg\neg\neg p & \\ \equiv p & [9,9,9] \end{array}$$

- Lembre-se: isto é opcional. Outra forma correta seria:

$$\begin{array}{ll} \neg\neg\neg\neg\neg\neg p & \\ \equiv \neg\neg\neg\neg p & [9] \\ \equiv \neg\neg p & [9] \\ \equiv p & [9] \end{array}$$

Equivalência Lógica

Como justificar cada passo de prova?

- OPCIONAL. Pode-se misturar alguma equação com a 10, 11, 12, 13, 73, 74, 75 ou 76.
- Exemplo:

$$\begin{array}{ll} \mathsf{T} \wedge p & \\ \equiv p & [11{,}3] \end{array}$$

- Lembre-se: isto é opcional. Outra forma correta seria:

$$\begin{array}{ll} \mathsf{T} \wedge p & \\ \equiv p \wedge \mathsf{T} & [11] \\ \equiv p & [3] \end{array}$$

Equivalência Lógica

Como justificar cada passo de prova?

- OPCIONAL. Se a 10 e 12, ou 11 e 13, ou 73 e 75, ou 74 e 76 forem usadas n vezes, pode-se justificar apenas com [10,12], [11,13], [73,75] ou [74,76].
- Exemplo:

$$\begin{aligned} & (p \wedge q) \wedge (r \wedge s) \\ \equiv\ & (p \wedge s) \wedge (q \wedge r) \quad [11,13] \end{aligned}$$

- Lembre-se: isto é opcional. Outra forma correta seria:

$$\begin{aligned} & (p \wedge q) \wedge (r \wedge s) \\ \equiv\ & p \wedge (q \wedge (r \wedge s)) \quad [13] \\ \equiv\ & p \wedge ((q \wedge r) \wedge s) \quad [13] \\ \equiv\ & p \wedge (s \wedge (q \wedge r)) \quad [11] \\ \equiv\ & (p \wedge s) \wedge (q \wedge r) \quad [13] \end{aligned}$$

Equivalência Lógica

Como justificar cada passo de prova?
Resumindo:

- Seja $EQUACAO = \{1, 2, 3, \ldots, 84\}$ o conjunto contendo o número de todas as equações.
- Seja $AC = \{10, 11, 12, 13, 73, 74, 75, 76\}$ um subconjunto de $EQUACAO$ contendo as leis de associatividade e comutatividade.
- As seguintes justificativas abaixo estão corretas:
  - [n], onde $n \in EQUACAO$
  - [n,n,...,n], onde $n \in EQUACAO$
  - $[n, m]$, onde $(n \in EQUACAO) \ \wedge \ (m \in AC)$

Exercícios recomendados

- Seção 1.2: do 1 ao 33 (no mínimo)
- Discrete Mathematics and Its Applications
  Kenneth Rosen, 6a edição

Lógica e Prova

Predicados

- Seja $p =$ "Todo computador do CIn está conectado à internet."
- Seja $q =$ "`paulista` é um computador do CIn."
- Lógica proposicional não permite-nos concluir que "`paulista` está conectado à internet."

Predicados

- A *declaração* (*statement*) "x é maior que 3" possui 2 elementos: o sujeito "x" e o *predicado* "é maior que 3"
- Seja P a função $P(x) =$ "x é maior que 3"
- P é uma função proposicional, pois quando passamos um valor para P, P retorna uma proposição.
- Exemplo. $P(8)$ retorna a proposição "8 é maior que 3". $P(8)$ é T ou F? E $P(0)$?

Predicados

- Seja $Q(x, y) = "x = y + 3"$
- Qual o resultado de $Q(1, 2)$?
- E $Q(3, 0)$?

Quantificadores

Para todo $\forall$

- É comum falarmos de propriedades válidas para elementos de um certo *domínio*.
- Por exemplo, "$x + 1 > x$ para todo x inteiro". O domínio neste caso são os números inteiros.

Quantificadores

Para todo $\forall$

- O *quantificador universal* de $P(x)$ para um certo domínio é a proposição "$P(x)$ é T para todo x do domínio."
- Notação: $\forall x P(x)$
  Lê-se: "Para todo x do domínio, $P(x)$ é T"

Quantificadores

Para todo $\forall$

- O *quantificador universal* de $P(x)$ para um certo domínio é a proposição "$P(x)$ é T para todo x do domínio."
- Notação: $\forall x P(x)$
  Lê-se: "Para todo x do domínio, $P(x)$ é T"
- Exemplo. Seja $P(x) =$ "$2x \geq x$" para o domínio dos naturais. $\forall x P(x)$ é T, pois para todos os números naturais x, $P(x)$ é T.
- Podemos também escrever $\forall x\ (2x \geq x)$.
- Atenção: é sempre necessário especificar qual o domínio!

Quantificadores

Para todo $\forall$

- Seja $P(x) = "x + 1 > x"$ para o domínio dos naturais.
- $\forall x P(x)$ é T ou F?

Quantificadores

Para todo ∀

- Seja $P(x) = "x + 1 > x"$ para o domínio dos naturais.
- $\forall x P(x)$ é T ou F?
- $\forall x P(x)$ é equivalente à proposição $P(0) \wedge P(1) \wedge P(2) \ldots$
- Ou seja, $\forall x P(x)$ é F se houver pelo menos um elemento y do domínio tal que $P(y)$ seja F.

Quantificadores

Para todo $\forall$

- Seja $P(x) =$ "$x + 1 > x$" para o domínio dos números naturais *menores que zero* (ou seja, o domínio é vazio!)
- $\forall x P(x)$ é T ou F?

Quantificadores

Para todo $\forall$

- Seja $P(x) = "x + 1 > x"$ para o domínio dos números naturais *menores que zero* (ou seja, o domínio é vazio!)
- $\forall x P(x)$ é T ou F?
- Atenção: Em geral, vamos trabalhar com domínios não vazios. Entretanto, se o domínio for vazio, $\forall x P(x)$ é T porque não há elemento algum x que faça $P(x)$ ser F.

Quantificadores

Para todo $\forall$

- Seja $P(x) =$ "$x^2 < 10$" para o domínio dos números inteiros no intervalo $[1, 4]$.
- $\forall x P(x)$ é T ou F?

Quantificadores

Para todo $\forall$

- Seja $P(x) =$ "$x^2 < 10$" para o domínio dos números inteiros no intervalo $[1, 3]$.
- $\forall x P(x)$ é T ou F?

Quantificadores

Para todo $\forall$

- Seja $P(x) = "x^2 < 10"$ para o domínio dos números inteiros no intervalo $[1, 3]$.
- $\forall x P(x)$ é T ou F?
- Ou seja, o resultado de $\forall x P(x)$ depende do domínio.

Quantificadores

Existe $\exists$

- O *quantificador existencial* de $P(x)$ para um certo domínio é a proposição "Existe pelo menos um x do domínio tal que $P(x)$ é T".
- Notação: $\exists x P(x)$
- $\exists x P(x)$ é falso se $P(x)$ for falso para *todos* elementos do domínio.
- Assim como $\forall x P(x)$, o resultado de $\exists x P(x)$ também depende do domínio.

Quantificadores

Existe $\exists$

- Seja $P(x) =$ "$x > 3$" para o domínio dos números reais
- $\exists x P(x)$ pode também ser escrito $\exists x(x > 3)$.
- $\exists x(x > 3)$ é T ou F?
- Como existe pelo menos um x real tal que $P(x)$ seja T (por exemplo, $x = 3,14$), $\exists x P(x)$ é T.

Quantificadores

Existe $\exists$

- Seja $P(x) =$ "$x^2 < 10$" para o domínio dos números inteiros no intervalo $[1, 4]$.
- $\exists x P(x)$ é equivalente à proposição $P(1) \vee P(2) \vee P(3) \vee P(4)$.
- Como $P(2)$ (por exemplo) é T, $\exists x P(x)$ também é T.

Quantificadores

Existe $\exists$

- Seja $P(x) =$ "$x^2 < 10$" para o domínio dos números inteiros no intervalo $[4, 7]$.
- $\exists x P(x)$ é T ou F?

Quantificadores

Restrição de domínio: uma abreviação

- Por comodidade, podemos especificar parte do domínio junto ao quantificador.
- A proposição

  $\forall x(x^2 > 0)$ para os números reais negativos

  pode ser escrita como

  $\forall x < 0\ (x^2 > 0)$ para os números reais

  que também é equivalente a

  $\forall x((x < 0) \rightarrow (x^2 > 0))$ para os números números reais

Quantificadores

Restrição de domínio: uma abreviação

Exemplo.

- Seja $S = \{-2, -1, 0, 1, 2\}$.
- P_1: $\forall x(x > 1)$ no domínio dos números positivos de S.
- P_2: $\forall x > 0\ (x > 1)$ no domínio S.
- P_3: $\forall x((x > 0) \rightarrow (x > 1))$ no domínio S.
- P_1, P_2 e P_3 são equivalentes. O resultado de todos é F.

Quantificadores

Restrição de domínio: uma abreviação

Exemplo.

- Seja $S = \{-2, -1, 0, 1, 2\}$.
- P_1: $\forall x(x > 1)$ no domínio dos números positivos de S.
- P_2: $\forall x > 0\ (x > 1)$ no domínio S.
- P_3: $\forall x((x > 0) \rightarrow (x > 1))$ no domínio S.
- P_1, P_2 e P_3 são equivalentes. O resultado de todos é F.
- Para P_1 e P_2, o domínio é $\{1, 2\}$ e $(1 > 1)\ \wedge\ (2 > 1) = \mathrm{F}$.
- Para P_3, o domínio é $\{-2, -1, 0, 1, 2\}$ e
  $(-2 > 0) \rightarrow (-2 > 1)\ \wedge$
  $(-1 > 0) \rightarrow (-1 > 1)\ \wedge$
  $(0 > 0) \rightarrow (0 > 1)\ \wedge$
  $(1 > 0) \rightarrow (1 > 1)\ \wedge$
  $(2 > 0) \rightarrow (2 > 1) = \mathrm{F}$.

Quantificadores

Restrição de domínio: uma abreviação

- De forma similar ao $\forall$, podemos especificar parte do domínio junto ao quantificador $\exists$.
- A proposição

  $\exists x(x^2 > 0)$ para os *números reais negativos*

  pode ser escrita como

  $\exists x < 0\ (x^2 > 0)$ para os *números reais*

  que também é equivalente a

  $\exists x((x < 0) \wedge (x^2 > 0))$ para os números *números reais*

Quantificadores

Restrição de domínio: uma abreviação

Exemplo.

- Seja $S = \{-2, -1, 0, 1, 2\}$.
- P_1: $\exists x(x > 1)$ no domínio dos números positivos de S.
- P_2: $\exists x > 0\ (x > 1)$ no domínio S.
- P_3: $\exists x((x > 0) \wedge (x > 1))$ no domínio S.
- P_1, P_2 e P_3 são equivalentes. O resultado de todos é T.

Quantificadores

Restrição de domínio: uma abreviação

Exemplo.

- Seja $S = \{-2, -1, 0, 1, 2\}$.
- P_1: $\exists x(x > 1)$ no domínio dos números positivos de S.
- P_2: $\exists x > 0\ (x > 1)$ no domínio S.
- P_3: $\exists x((x > 0) \wedge (x > 1))$ no domínio S.
- P_1, P_2 e P_3 são equivalentes. O resultado de todos é T.
- Para P_1 e P_2, o domínio é $\{1, 2\}$ e $(1 > 1)\ \vee\ (2 > 1) = \text{T}$.
- Para P_3, o domínio é $\{-2, -1, 0, 1, 2\}$ e
  $((-2 > 0) \wedge (-2 > 1))\ \vee$
  $((-1 > 0) \wedge (-1 > 1))\ \vee$
  $((0 > 0) \wedge (0 > 1))\ \vee$
  $((1 > 0) \wedge (1 > 1))\ \vee$
  $((2 > 0) \wedge (2 > 1))\ =\ \text{T}$.

Quantificadores

Precedência

- $\forall$ e $\exists$ têm precedência sobre todos os outros operadores.
- Ou seja,

  $\exists x(x > 0) \wedge (x < 10)$

  significa

  $(\exists x(x > 0)) \wedge (x < 10)$.

Quantificadores

Escopo

- Seja
  $p = \exists x((x > 10) \wedge (x < 20)) \ \vee \ \forall x(x \neq 50) \ \vee \ (x = 100)$
  no domínio dos inteiros.
- O *escopo* de um quantificador $\forall$ e $\exists$ é a parte da expressão lógica na qual o quantificador atua.
- O escopo é a área de atuação de um quantificador.

Quantificadores

Escopo

- Seja
  $p = \exists x((x > 10) \wedge (x < 20)) \ \vee \ \forall x(x \neq 50) \ \vee \ (x = 100)$
  no domínio dos inteiros.
- O *escopo* de um quantificador $\forall$ e $\exists$ é a parte da expressão lógica na qual o quantificador atua.
- O escopo é a área de atuação de um quantificador.
- O escopo do quantificador $\exists x$ é $((x > 10) \wedge (x < 20))$.
- O escopo do quantificador $\forall x$ é $(x \neq 50)$.
- O termo $(x = 100)$ não está no escopo de nenhum quantificador.

Quantificadores

Equivalência lógica

- Sejam S e P declarações envolvendo quantificadores e predicados.
- $S \equiv P$ é uma abreviação para "S é logicamente equivalente a P".
- S e P são logicamente equivalentes se e somente se eles possuem o mesmo valor, independente do domínio.

Quantificadores

Equivalência lógica

- Sejam S e P declarações envolvendo quantificadores e predicados.
- $S \equiv P$ é uma abreviação para "S é logicamente equivalente a P".
- S e P são logicamente equivalentes se e somente se eles possuem o mesmo valor, independente do domínio.
- Exemplo. $\forall x(P(x) \wedge Q(x)) \equiv (\forall x P(x)) \wedge (\forall x Q(x))$
- Atenção: $\equiv$ não é um operador da lógica, da mesma forma que na lógica proposicional. É apenas uma abreviação do português.

Quantificadores

Negação

- Lei de De Morgan para quantificadores
- $\neg\forall x P(x) \equiv \exists x \neg P(x)$
  Se não é verdade que $P(x)$ é verdade para todo x (lado esquerdo do $\equiv$), então existe algum x tal que $P(x)$ é falso. Ou seja, existe algum x tal que $\neg P(x)$ é verdade (lado direito do $\equiv$).
- $\neg\exists x P(x) \equiv \forall x \neg P(x)$
  Se não é verdade que existe um x que $P(x)$ é verdade (lado esquerdo do $\equiv$), então, para todo x, $P(x)$ é falso. Ou seja, para todo x, $\neg P(x)$ é verdade (lado direito do $\equiv$).

Quantificadores

Negação

- Reduzir a expressão $\neg\forall x(x^2 > x)$.

$$
\begin{aligned}
&\neg\forall x(x^2 > x) & \\
&\equiv \exists x \neg(x^2 > x) & \text{[De Morgan]} \\
&\equiv \exists x(x^2 \leq x) & \text{[Negação de } >\text{]}
\end{aligned}
$$

- Mostre que $\neg\forall x(P(x) \to Q(x)) \equiv \exists x(P(x) \wedge \neg Q(x))$.

Exercícios recomendados

- Seção 1.3: do 1 ao 42 (no mínimo)
- Discrete Mathematics and Its Applications
  Kenneth Rosen, 6a edição

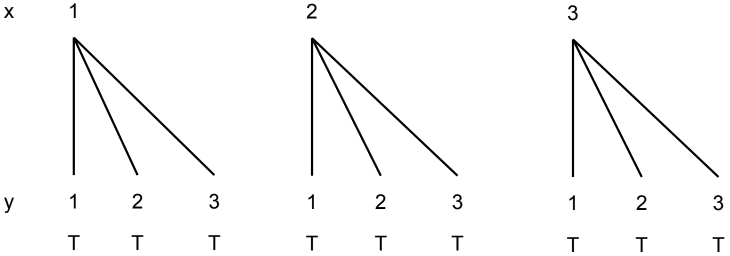
Lógica e Prova

Quantificadores Aninhados

- Um quantificador está *aninhado* se ele está no escopo de outro quantificador.
- Exemplo: $\forall x \exists y (x + y = 0)$

Quantificadores Aninhados

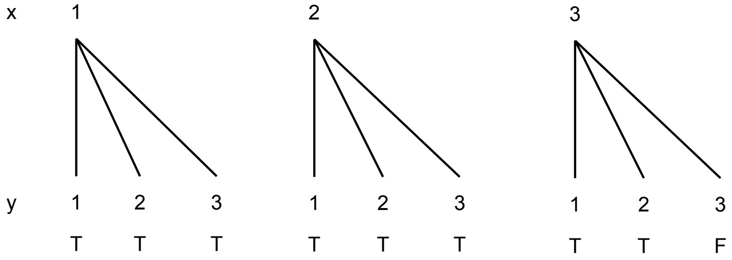
Sejam x e y do domínio $\{1, 2, 3\}$.
$\forall x \forall y(x + y > 0) = ?$



Como seria um programa de computador que imprime na tela "T" ou "F" para este caso?

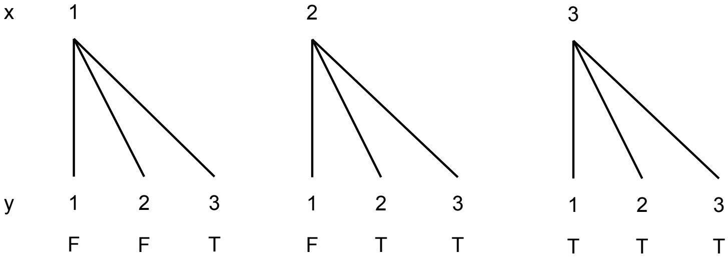
Quantificadores Aninhados

Sejam x e y do domínio $\{1, 2, 3\}$.
$\forall x \forall y (x + y \leq 5) = ?$



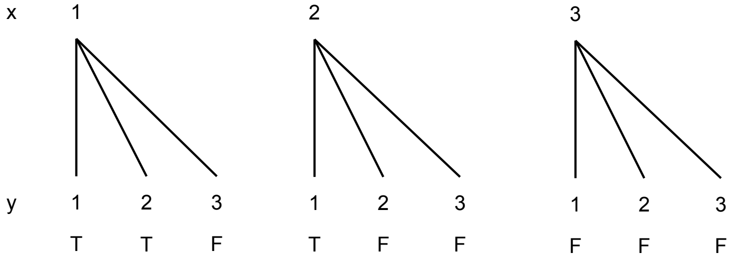
Quantificadores Aninhados

Sejam x e y do domínio $\{1, 2, 3\}$.
$\forall x \exists y (x + y \geq 4) = ?$



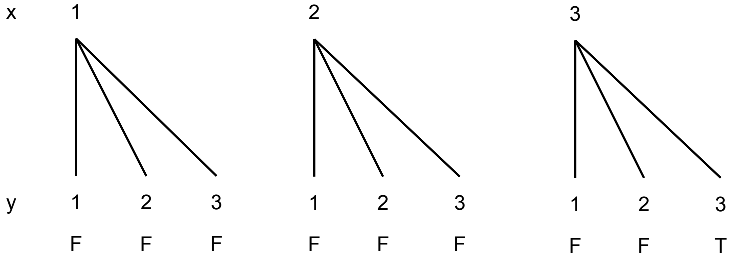
Quantificadores Aninhados

Sejam x e y do domínio $\{1, 2, 3\}$.
$\forall x \exists y (x + y < 4) = ?$



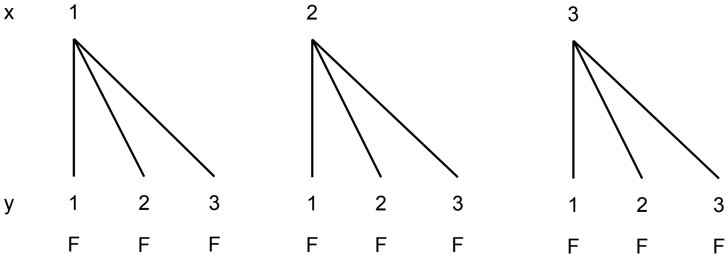
Quantificadores Aninhados

Sejam x e y do domínio $\{1, 2, 3\}$.
$\exists x \exists y(x + y \geq 6) = ?$



Quantificadores Aninhados

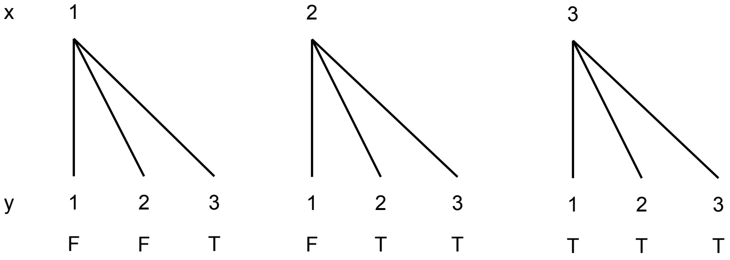
Sejam x e y do domínio $\{1, 2, 3\}$.
$\exists x \exists y (x + y > 10) = ?$



Quantificadores Aninhados

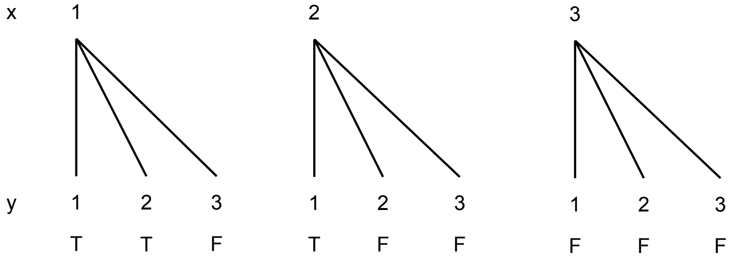
Sejam x e y do domínio $\{1, 2, 3\}$.

$\exists x \forall y (x + y \geq 4) = ?$



Quantificadores Aninhados

Sejam x e y do domínio $\{1, 2, 3\}$.
$\exists x \forall y (x + y < 4) = ?$



Quantificadores Aninhados

Negação

- Para negar quantificadores aninhados, basta aplicar a Lei de De Morgan sucessivamente.
- Exemplo. Sejam x e y no domínio dos reais.

$$
\begin{aligned}
&\neg\forall x\exists y(xy = 1) & \\
&\equiv \exists x\neg\exists y(xy = 1) & \text{[De Morgan]} \\
&\equiv \exists x\forall y\neg(xy = 1) & \text{[De Morgan]} \\
&\equiv \exists x\forall y(xy \neq 1) & \text{[Negação do =]}
\end{aligned}
$$

Quantificadores Aninhados

Negação

- Reduza as expressões abaixo de forma que o operador $\neg$ preceda apenas os predicados.
- $\neg\forall x \exists y \forall z P(x, y, z)$
- $\neg\forall x \exists y (P(x, y) \rightarrow Q(x, y))$
- $\neg\forall y \exists x \exists z (R(x, y, z) \vee Q(x, y))$

Exercícios recomendados

- Seção 1.4: do 1 ao 38 (no mínimo)
- Discrete Mathematics and Its Applications
  Kenneth Rosen, 6a edição

Lógica e Prova

Regras de Inferência

Definição

- Já vimos como provar equivalência lógica: $p \equiv q$.
- Veremos como provar implicação lógica $(p_1 \wedge p_2 \wedge \ldots \wedge p_n) \rightarrow q$.

Regras de Inferência

Definição

- Provar $p \equiv q$ significa que $(p \rightarrow q) \wedge (q \rightarrow p)$ é uma tautologia.
- Provar $(p_1 \wedge p_2 \wedge \ldots \wedge p_n) \rightarrow q$ é apenas "metade" do caminho. Provamos que $(p_1 \wedge p_2 \wedge \ldots \wedge p_n) \rightarrow q$ é uma tautologia.

Regras de Inferência

Definição

- Em geral, diremos: dadas as premissas $p_1, p_2, \ldots, p_n$, conclua que q é verdade.

Regras de Inferência

Definição

- Em geral, diremos: dadas as premissas p_1, p_2, ..., p_n, conclua que q é verdade.
- **Atenção:** isto é diferente de provar $(p_1 \wedge p_2 \wedge \ldots \wedge p_n) \equiv q$.

Regras de Inferência

Definição

- Teoremas do tipo $(p_1 \wedge p_2 \wedge \ldots \wedge p_n) \rightarrow q$ são provados usando regras de inferência.
- A prova é diferente da prova de equivalência $p \equiv q$.

Regras de Inferência

Definição

Exemplo.

- Dadas as premissas p_1, p_2, p_3, conclua q.

1.	p_1	[Premissa]
2.	p_2	[Premissa]
3.	p_3	[Premissa]
4.	...	[Justificativa]
5.	...	[Justificativa]
6.	...	[Justificativa]
7.	q	[Justificativa]

Regras de Inferência

Definição

Exemplo.

- Dadas as premissas p_1, p_2, p_3, conclua q.
- Cada passo é numerado.
- A prova só pode ser feita na direção premissas $\rightarrow$ conclusão (da esquerda para a direita).

1.	p_1	[Premissa]
2.	p_2	[Premissa]
3.	p_3	[Premissa]
4.	$\ldots$	[Justificativa]
5.	$\ldots$	[Justificativa]
6.	$\ldots$	[Justificativa]
7.	q	[Justificativa]

Regras de Inferência

Notação

- A Regra de Inferência é representada assim:

$$\begin{array}{c} p_1 \\ p_2 \\ \vdots \\ p_n \\ \hline \therefore q \end{array}$$

- Interpretação: se consegui, até o momento, provar p_1, p_2, ..., p_n, então podemos adicionar uma nova linha na prova contendo q.

Regras de Inferência

Modus ponens

$$\begin{array}{l} p \\ p \to q \\ \hline \therefore q \end{array}$$

Leitura: se existe um passo de prova p e existe outro passo de prova $p \to q$, então eu posso adidionar um novo passo de prova q.

Regras de Inferência

Modus ponens

Exemplo.

$$\begin{array}{rl} & p \\ & p \to q \\ \hline \therefore & q \end{array}$$

- Dadas as premissas $(r \vee s)$ e $((r \vee s) \to u)$, conclua u.

1. $r \vee s$ [Premissa]
2. $(r \vee s) \to u$ [Premissa]
3. u [Modus ponens em (1) e (2)]

Regras de Inferência

Modus ponens

Exemplo.

$$\begin{array}{rl} & p \\ & p \to q \\ \hline \therefore & q \end{array}$$

- Dadas as premissas $(r \vee s)$ e $((r \vee s) \to u)$, conclua u.

1.	$r \vee s$	[Premissa]
2.	$(r \vee s) \to u$	[Premissa]
3.	u	[Modus ponens em (1) e (2)]

- Provamos que $((r \vee s) \wedge ((r \vee s) \to u)) \;\to\; u$

Regras de Inferência

Modus ponens

Exemplo.

$$\begin{array}{rl} & p \\ & p \to q \\ \hline \therefore & q \end{array}$$

- Dadas as premissas r, $(r \to t)$, e $(t \to u)$, conclua u.

1.	r	[Premissa]
2.	$r \to t$	[Premissa]
3.	t	[Modus ponens em (1) e (2)]
4.	$t \to u$	[Premissa]
5.	u	[Modus ponens em (3) e (4)]

Regras de Inferência

Modus ponens

Exemplo.

$$\begin{array}{rl} & p \\ & p \to q \\ \hline \therefore & q \end{array}$$

- Dadas as premissas r, $(r \to t)$, e $(t \to u)$, conclua u.

1.	r	[Premissa]
2.	$r \to t$	[Premissa]
3.	t	[Modus ponens em (1) e (2)]
4.	$t \to u$	[Premissa]
5.	u	[Modus ponens em (3) e (4)]

- Provamos que $(r \wedge (r \to t) \wedge (t \to u)) \;\to\; u$
- E, não preciso listar todas as premissas inicialmente.

Regras de Inferência

Modus ponens

Exemplo.

$$\begin{array}{rl} & p \\ & p \to q \\ \hline \therefore & q \end{array}$$

- Dadas as premissas r, $(r \to t)$, e $(t \to u)$, conclua u.

1.	r	[Premissa]
2.	$r \to t$	[Premissa]
3.	$t \to u$	[Premissa]
4.	t	[Modus ponens em (1) e (2)]
5.	u	[Modus ponens em (3) e (4)]

Regras de Inferência

Modus ponens

Exemplo.

$$\begin{array}{rl} & p \\ & p \to q \\ \hline \therefore & q \end{array}$$

- Dadas as premissas r, $(r \to t)$, e $(t \to u)$, conclua u.

$$\begin{array}{lr} 1.\ r & [\text{Premissa}] \\ 2.\ r \to t & [\text{Premissa}] \\ 3.\ t \to u & [\text{Premissa}] \\ 4.\ t & [\text{Modus ponens em (1) e (2)}] \\ 5.\ u & [\text{Modus ponens em (3) e (4)}] \end{array}$$

- O "p" e o "$p \to q$" não precisam estar ordenados (veja os passos 3 e 4).

Regras de Inferência

Modus ponens

Exemplo.

$$\begin{array}{rl} & p \\ & p \to q \\ \hline \therefore & q \end{array}$$

- Dadas as premissas r, $(r \to t)$, e $(t \to u)$, conclua u.

1.	r	[Premissa]
2.	$t \to u$	[Premissa]
3.	$r \to t$	[Premissa]
4.	t	[Modus ponens em (1) e (3)]
5.	u	[Modus ponens em (2) e (4)]

Regras de Inferência

Modus ponens

Exemplo.

$$\begin{array}{r} p \\ p \to q \\ \hline \therefore q \end{array}$$

- Dadas as premissas r, $(r \to t)$, e $(t \to u)$, conclua u.

1.	r	[Premissa]
2.	$t \to u$	[Premissa]
3.	$r \to t$	[Premissa]
4.	t	[Modus ponens em (1) e (3)]
5.	u	[Modus ponens em (2) e (4)]

- Premissas podem ser listadas em qualquer ordem.
- A regra pode ser aplicada em passos não consecutivos.

Regras de Inferência

Modus ponens

Exercício.

$$\begin{array}{rl} & p \\ & p \to q \\ \hline \therefore & q \end{array}$$

- Dadas as premissas $p \to ((r \lor s) \to (t \to u))$, p, $(r \lor s)$, conclua $(t \to u)$.

Regras de Inferência

Modus ponens

Exemplo.

$$\begin{array}{rl} & p \\ & p \to q \\ \hline \therefore & q \end{array}$$

- Dadas as premissas r e $(r \to (\neg\neg t))$, conclua t.

1.	r	[Premissa]
2.	$r \to (\neg\neg t)$	[Premissa]
3.	$r \to t$	[Dupla negação em (2)]
4.	t	[Modus ponens em (1) e (3)]

Regras de Inferência

Modus ponens

Exemplo.

$$\begin{array}{r} p \\ p \to q \\ \hline \therefore q \end{array}$$

- Dadas as premissas r e $(r \to (\neg\neg t))$, conclua t.

$$\begin{array}{lll} 1. & r & [\text{Premissa}] \\ 2. & r \to (\neg\neg t) & [\text{Premissa}] \\ 3. & r \to t & [\text{Dupla negação em (2)}] \\ 4. & t & [\text{Modus ponens em (1) e (3)}] \end{array}$$

- Podemos usar as leis da lógica.

Regras de Inferência

Modus ponens

Exercício.

$$\begin{array}{rl} & p \\ & p \to q \\ \hline \therefore & q \end{array}$$

- Dadas as premissas $(\neg p \vee (q \to r))$ e p, conclua $(q \to r)$.

Regras de Inferência

Modus tollens

$$\begin{array}{rl} & \neg q \\ & p \to q \\ \hline \therefore & \neg p \end{array}$$

Regras de Inferência

Silogismo hipotético

$$\begin{array}{r} p \rightarrow q \\ q \rightarrow r \\ \hline \therefore p \rightarrow r \end{array}$$

Regras de Inferência

Silogismo disjuntivo

$$\begin{array}{c} p \vee q \\ \neg p \\ \hline \therefore q \end{array} \qquad \begin{array}{c} p \vee q \\ \neg q \\ \hline \therefore p \end{array}$$

Regras de Inferência

Adição

$$\frac{p}{\therefore\ p \vee q} \qquad \frac{p}{\therefore\ q \vee p}$$

Regras de Inferência

Simplificação

$$\frac{p \wedge q}{\therefore p} \qquad \frac{p \wedge q}{\therefore q}$$

Regras de Inferência

Conjunção

$$\begin{array}{r} p \\ q \\ \hline \therefore\; p \wedge q \end{array}$$

Regras de Inferência

Contrapositivo

$$\begin{array}{rl} & p \to q \\ \hline \therefore & \neg q \to \neg p \end{array}$$

Regras de Inferência

Resolução

$$\begin{array}{rl} & p \vee q \\ & \neg p \vee r \\ \hline \therefore & q \vee r \end{array}$$

Regras de Inferência

Exemplo.

Não está ensolarado e está mais frio que ontem. Se formos nadar, então (é porque) está ensolarado. Se não formos nadar, então vamos passear de canoa. Se formos passear de canoa, então voltaremos antes do por-do-sol.

Prove que estas hipóteses levam à conclusão de que voltaremos antes do por-do-sol.

Regras de Inferência

Não está ensolarado e está mais frio que ontem. Se formos nadar, então (é porque) está ensolarado. Se não formos nadar, então vamos passear de canoa. Se formos passear de canoa, então voltaremos antes do por-do-sol.

Primeiro passo: definir as proposições.

- $p =$ "Está ensolarado"
- $q =$ "Está mais frio que ontem"
- $r =$ "Iremos nadar"
- $s =$ "Iremos passear de canoa."
- $t =$ "Voltaremos antes do por-do-sol"

Regras de Inferência

Segundo passo: definir as premissas e a conclusão.

- $p =$ "Está ensolarado"
- $q =$ "Está mais frio que ontem"
- $r =$ "Iremos nadar"
- $s =$ "Iremos passear de canoa."
- $t =$ "Voltaremos antes do por-do-sol"

Premissas:

- $\neg p \wedge q$
- $r \rightarrow p$
- $\neg r \rightarrow s$
- $s \rightarrow t$

Conclusão: t

Regras de Inferência

Temos que construir um argumento válido de que as premissas $\neg p \wedge q$, $r \rightarrow p$, $\neg r \rightarrow s$, e $s \rightarrow t$ levam à conclusão t.

$$1.\ \neg p \wedge q \quad \text{[Premissa]}$$

Regras de Inferência

Temos que construir um argumento válido de que as premissas $\neg p \wedge q$, $r \rightarrow p$, $\neg r \rightarrow s$, e $s \rightarrow t$ levam à conclusão t.

1. $\neg p \wedge q$ [Premissa]
2. $r \rightarrow p$ [Premissa]

Regras de Inferência

Temos que construir um argumento válido de que as premissas $\neg p \wedge q$, $r \rightarrow p$, $\neg r \rightarrow s$, e $s \rightarrow t$ levam à conclusão t.

1.	$\neg p \wedge q$	[Premissa]
2.	$r \rightarrow p$	[Premissa]
3.	$\neg r \rightarrow s$	[Premissa]

Regras de Inferência

Temos que construir um argumento válido de que as premissas $\neg p \wedge q$, $r \rightarrow p$, $\neg r \rightarrow s$, e $s \rightarrow t$ levam à conclusão t.

1. $\neg p \wedge q$ [Premissa]
2. $r \rightarrow p$ [Premissa]
3. $\neg r \rightarrow s$ [Premissa]
4. $s \rightarrow t$ [Premissa]

Regras de Inferência

Temos que construir um argumento válido de que as premissas $\neg p \wedge q$, $r \rightarrow p$, $\neg r \rightarrow s$, e $s \rightarrow t$ levam à conclusão t.

1.	$\neg p \wedge q$	[Premissa]
2.	$r \rightarrow p$	[Premissa]
3.	$\neg r \rightarrow s$	[Premissa]
4.	$s \rightarrow t$	[Premissa]
5.	$\neg p$	[Simplificação em (1)]

Relembrando: simplificação é

$$\frac{p \wedge q}{\therefore p}$$

Regras de Inferência

Temos que construir um argumento válido de que as premissas $\neg p \wedge q$, $r \rightarrow p$, $\neg r \rightarrow s$, e $s \rightarrow t$ levam à conclusão t.

1.	$\neg p \wedge q$	[Premissa]
2.	$r \rightarrow p$	[Premissa]
3.	$\neg r \rightarrow s$	[Premissa]
4.	$s \rightarrow t$	[Premissa]
5.	$\neg p$	[Simplificação em (1)]
6.	$\neg r$	[Modus tollens em (2) e (5)]

Relembrando: modus tollens é

$$\begin{array}{c} \neg q \\ p \rightarrow q \\ \hline \therefore \neg p \end{array}$$

Regras de Inferência

Temos que construir um argumento válido de que as premissas $\neg p \wedge q$, $r \to p$, $\neg r \to s$, e $s \to t$ levam à conclusão t.

1.	$\neg p \wedge q$	[Premissa]
2.	$r \to p$	[Premissa]
3.	$\neg r \to s$	[Premissa]
4.	$s \to t$	[Premissa]
5.	$\neg p$	[Simplificação em (1)]
6.	$\neg r$	[Modus tollens em (2) e (5)]
7.	s	[Modus ponens em (6) e (3)]

Relembrando: modus ponens é

$$\begin{array}{c} p \\ p \to q \\ \hline \therefore q \end{array}$$

Regras de Inferência

Temos que construir um argumento válido de que as premissas $\neg p \wedge q$, $r \rightarrow p$, $\neg r \rightarrow s$, e $s \rightarrow t$ levam à conclusão t.

1.	$\neg p \wedge q$	[Premissa]
2.	$r \rightarrow p$	[Premissa]
3.	$\neg r \rightarrow s$	[Premissa]
4.	$s \rightarrow t$	[Premissa]
5.	$\neg p$	[Simplificação em (1)]
6.	$\neg r$	[Modus tollens em (2) e (5)]
7.	s	[Modus ponens em (6) e (3)]
8.	t	[Modus ponens em (7) e (4)]

Com isto, provamos o teorema

$$((\neg p \wedge q) \wedge (r \rightarrow p) \wedge (\neg r \rightarrow s) \wedge (s \rightarrow t)) \rightarrow t$$

Regras de Inferência

Outra prova também correta:

1.	$\neg p \wedge q$	[Premissa]
2.	$\neg p$	[Simplificação em (1)]
3.	$r \to p$	[Premissa]
4.	$\neg r$	[Modus tollens em (2) e (3)]
5.	$\neg r \to s$	[Premissa]
6.	s	[Modus ponens em (4) e (5)]
7.	$s \to t$	[Premissa]
8.	t	[Modus ponens em (6) e (7)]

.

Regras de Inferência

Exercício. Construir um argumento válido de que as premissas $((p \wedge t) \rightarrow (r \vee s))$, $(q \rightarrow (u \wedge t))$, $(u \rightarrow p)$, $\neg s$ e q levam à conclusão r.

Regras de Inferência

Resumo.

1. *proposição* [justificativa]
2. *proposição* [justificativa]
3. **p** [justificativa]
4. *proposição* [justificativa]
5. *proposição* [justificativa]
6. $\mathbf{p} \rightarrow \mathbf{q}$ [justificativa]
7. *proposição* [justificativa]
8. **q** [Modus ponens em (3) e (6)]

$$\begin{array}{l} p \\ p \rightarrow q \\ \hline \therefore q \end{array}$$

Modus ponens

Regras de Inferência

Resumo.

1.	*proposição*	[justificativa]
2.	*proposição*	[justificativa]
3.	$\mathbf{p} \rightarrow \mathbf{q}$	[justificativa]
4.	*proposição*	[justificativa]
5.	*proposição*	[justificativa]
6.	**p**	[justificativa]
7.	*proposição*	[justificativa]
8.	**q**	[Modus ponens em (3) e (6)]

$$\begin{array}{l} p \\ p \rightarrow q \\ \hline \therefore q \end{array}$$

Modus ponens

Regras de Inferência

Resumo.

1.	*proposição*	[justificativa]
2.	*proposição*	[justificativa]
3.	$\mathbf{r} \to (\neg\neg\mathbf{p} \land \mathbf{q})$	[justificativa]
4.	*proposição*	[justificativa]
5.	*proposição*	[justificativa]
6.	*proposição*	[justificativa]
7.	*proposição*	[justificativa]
8.	$\mathbf{r} \to (\mathbf{p} \land \mathbf{q})$	[Dupla negação em (3)]

$$\neg\neg p \equiv p$$

Dupla negação

Regras de Inferência

ERRO COMUM 1

1. *proposição* [justificativa]
2. *proposição* [justificativa]
3. $\mathbf{r} \rightarrow (\mathbf{u} \wedge \mathbf{t})$ [justificativa]
4. *proposição* [justificativa]
5. *proposição* [justificativa]
6. *proposição* [justificativa]
7. *proposição* [justificativa]
8. $\mathbf{r} \rightarrow \mathbf{u}$ [Simplificação em (3)]

$$\frac{p \wedge q}{\therefore p}$$

Simplificação

Regras de inferência não podem ser aplicadas a subfórmulas. Leis da lógica podem.

Regras de Inferência

ERRO COMUM 2

Dadas as premissas $(p \wedge q)$, $(\mathbf{p} \rightarrow (\mathbf{q} \vee \mathbf{r}))$ e $(r \vee s)$, conclua que ...

1.	$\mathbf{q} \vee \mathbf{r}$	[Premissa]
2.	*proposição*	[justificativa]
3.	*proposição*	[justificativa]
4.	*proposição*	[justificativa]
5.	*proposição*	[justificativa]
6.	*proposição*	[justificativa]
7.	*proposição*	[justificativa]

Não podemos usar subfórmulas das premissas.
Se precisamos da subfórmula $(q \vee r)$, temos que extraí-la da premissa inteira $(p \rightarrow (q \vee r))$ através de regras de inferência.

Regras de Inferência

ERRO COMUM 3

Não confunda premissa-conclusão com equivalência. São provas diferentes!

Prova de premissa-conclusão:

1. r [Premissa]
2. $r \to (\neg\neg t)$ [Premissa]
3. $r \to t$ [Dupla negação em (2)]
4. t [Modus ponens em (1) e (3)]

Prova de equivalência:

$$
\begin{aligned}
& \neg(p \wedge (q \wedge \neg r)) & \\
\equiv\ & \neg p \vee \neg(q \wedge \neg r)) & \text{[De Morgan]} \\
\equiv\ & \neg p \vee (\neg q \vee \neg\neg r) & \text{[De Morgan]} \\
\equiv\ & \neg p \vee (\neg q \vee r) & \text{[Dupla negação]} \\
\equiv\ & \neg p \vee (q \to r) & \text{[Condicional]}
\end{aligned}
$$

Regras de Inferência

Falácias

- Uma *falácia* é um argumento incorreto.
- Se o Náutico é hepta, então o Náutico é campeão. O Náutico é campeão. Então, o Náutico é hepta.
- Este argumento está correto?

Regras de Inferência

Falácias

- Sejam $p =$ "Náutico é hepta" e $q =$ "Náutico é campeão".
- O argumento tem como premissas $p \rightarrow q$ e q.
- Podemos então concluir p?

Regras de Inferência

Falácias

- Sejam $p =$ "Náutico é hepta" e $q =$ "Náutico é campeão".
- O argumento tem como premissas $p \to q$ e q.
- Podemos então concluir p?
- Não! $((p \to q) \land q) \to p$ não é uma tautologia.
- Esta é a falácia de *afirmar a conclusão*.

Regras de Inferência

Falácias

- Se o Náutico é hepta, então o Náutico é campeão.
  O Náutico não é hepta. Então, o Náutico não é campeão.
- Sejam $p =$ "Náutico é hepta" e $q =$ "Náutico é campeão".
- O argumento tem como premissas $p \rightarrow q$ e $\neg p$.
- Podemos então concluir $\neg q$?

Regras de Inferência

Falácias

- Se o Náutico é hepta, então o Náutico é campeão.
  O Náutico não é hepta. Então, o Náutico não é campeão.
- O fato de o Náutico não ser hepta, não nos dá o direito de concluir nada a respeito do campeonato.
- Lembre-se: se $p \rightarrow q$ e p é falso, não sabemos nada a respeito de q. Mas damos o benefício da dúvida a $p \rightarrow q$, que é considerado verdadeiro.
- A falácia de *negar a hipótese* tem como premissas $(p \rightarrow q)$ e $\neg p$, e como conclusão $\neg q$.

Exercícios recomendados

- Seção 1.5: do 1–10, 12–16 (no mínimo)
- Discrete Mathematics and Its Applications
  Kenneth Rosen, 6a edição