Relações

Centro de Informática
UFPE

Relações e suas Propriedades

Introdução

- Lidamos com relações a todo momento
- Alunos x Disciplinas
- Disciplinas x Professor
- Disciplinas x Sala
- Disciplinas x Horário
- Nome x Telefone, etc.

Relações e suas Propriedades

Introdução

- Sejam A e B conjuntos.
- Uma relação binária de A para B é um subconjunto de $A \times B$.

Relações e suas Propriedades

Introdução

- Sejam A e B conjuntos.
- Uma relação binária de A para B é um subconjunto de $A \times B$.
- Exemplo. Sejam $A = \{1, 2, 3\}$ e $B = \{a, b\}$.
  $R_1 = \{(1, a), (1, b), (2, b)\}$ é uma relação de A para B.
  $R_2 = \{(a, 1), (b, 2)\}$ é uma relação de B para A.

Relações e suas Propriedades

Introdução

Notação.

- $a\ R\ b \ \equiv\ (a,b) \in R$
  a está relacionado a b via R
- $a \not R\ b \ \equiv\ \neg(a\ R\ b) \ \equiv\ (a,b) \notin R$

Relações e suas Propriedades

Exemplo.

- Sejam $ALUNOS = \{Fulano, Beltrano, Sicrano\}$ e $CURSOS = \{Mat.\ Discreta, Álgebra, Int.\ à\ Computação\}$
- Seja $CURSANDO = \{(Fulano, Álgebra), (Fulano, Int.\ à\ Computação), (Sicrano, Mat.\ Discreta)\}$
- $Fulano\ CURSANDO\ Int.\ à\ Computação$
- $\neg(Beltrano\ CURSANDO\ Álgebra)$

Relações e suas Propriedades

Relações em um Conjunto

- Estudaremos o caso particular de relações de um conjunto para ele mesmo.
- Seja A um conjunto. Uma relação em A é uma relação de A para A.

Relações e suas Propriedades

Relações em um Conjunto

Exemplo.

- Seja $A = \{1, 2, 3, 4\}$
- $R = \{(a, b) \in A \times A \mid a < b\}$
- Ou seja, $R = \{(1, 2), (1, 3), (1, 4), (2, 3), (2, 4), (3, 4)\}$.

Relações e suas Propriedades

Relações em um Conjunto

Exercício.

- Seja $A = \{1, 2, 3, 4\}$
- $R = \{(a, b) \in A^2 \mid (a \mid b) \}$.
- Liste os pares ordenados contidos em R.

Obs. A^2 é uma abreviação para $A \times A$.

Relações e suas Propriedades

Relações em um Conjunto

Exercício.

- $R_1 = \{(a, b) \in \mathbb{Z}^2 \mid a \leq b\}$.
- $R_2 = \{(a, b) \in \mathbb{Z}^2 \mid a = b \ \vee \ a = -b\}$.
- Liste os pares ordenados contidos em R_1 e R_2.

Relações e suas Propriedades

Relações em um Conjunto

- Seja A um conjunto com n elementos.
- Quantas relações são possíveis de serem definidas em A?

Relações e suas Propriedades

Relações em um Conjunto

- Seja A um conjunto com n elementos.
- Quantas relações são possíveis de serem definidas em A?
- Uma relação em A é um subconjunto de $A \times A$.
- A quantidade de relações possíveis em A é a quantidade de subconjuntos de $A \times A$.
- A quantidade de subconjuntos de um conjunto com k elementos é 2^k.
- A quantidade de elementos de $A \times A$ é n^2.
- Então, a quantidade de relações em A é 2^{n^2}

Relações e suas Propriedades

Relações em um Conjunto

Exercício.

- Seja A um conjunto com m elementos e B, um conjunto com n elementos.
- Quantas relações são possíveis de serem definidas de A para B?

Relações e suas Propriedades

Propriedades das Relações

- Uma relação R em A é reflexiva se $(a, a) \in R$, para todo $a \in A$.
- $\forall a((a, a) \in R)$

Relações e suas Propriedades

Propriedades das Relações

- Uma relação R em A é reflexiva se $(a, a) \in R$, para todo $a \in A$.
- $\forall a((a, a) \in R)$
- Exemplo. Seja $A = \{1, 2, 3\}$.

$$R_1 = \{(1,1),(2,2),(3,3)\}$$
$$R_2 = \{(1,1),(1,2),(2,2),(3,1),(3,3)\}$$
$$R_3 = \{(1,1),(1,3),(2,2),(2,3),(3,1),(3,2),(3,3)\}$$

Relações e suas Propriedades

Propriedades das Relações

Exercício. Quais relações abaixo são reflexivas em $A = \{1, 2, 3, 4\}$?

- $R_1 = \{(1, 1), (2, 1), (3, 3)\}$
- $R_2 = \{(2, 1), (1, 2), (2, 2), (3, 1), (3, 3)\}$
- $R_3 = \{(1, 1), (3, 3)\}$
- $R_4 = \{(3, 2)\}$.

Relações e suas Propriedades

Propriedades das Relações

Exercício. Quais relações abaixo são reflexivas em $\mathbb{Z}$?

- $R_1 = \{(a, b) \mid a \leq b\}$
- $R_2 = \{(a, b) \mid a > b\}$
- $R_3 = \{(a, b) \mid a = b \ \vee \ a = -b\}$
- $R_4 = \{(a, b) \mid a = b\}$
- $R_5 = \{(a, b) \mid a = b + 1\}$
- $R_6 = \{(a, b) \mid a + b \leq 3\}$

Relações e suas Propriedades

Propriedades das Relações

- Uma relação R em A é simétrica se $(a, b) \in R$ sempre que $(b, a) \in R$, para todo $a, b \in A$.
- $\forall a \forall b((a, b) \in R \rightarrow (b, a) \in R)$

Relações e suas Propriedades

Propriedades das Relações

- Uma relação R em A é simétrica se $(a, b) \in R$ sempre que $(b, a) \in R$, para todo $a, b \in A$.
- $\forall a \forall b((a, b) \in R \rightarrow (b, a) \in R)$
- Exemplo. Seja $A = \{1, 2, 3\}$.

$$
\begin{aligned}
R_1 &= \{(1,2),(2,1),(1,3),(3,1),(2,3),(3,2)\} \\
R_2 &= \{(1,2),(2,1)\} \\
R_3 &= \{(1,1),(1,2),(2,1),(3,3)\} \\
R_4 &= \{(1,1),(2,2)\}
\end{aligned}
$$

Relações e suas Propriedades

Propriedades das Relações

Exercício. Quais relações abaixo são simétricas em $A = \{1, 2, 3\}$?

- $R_1 = \{(1, 1), (2, 2), (3, 3)\}$
- $R_2 = \{(1, 1), (1, 2), (2, 2), (3, 1), (3, 3)\}$
- $R_3 = \{(1, 1), (1, 3), (2, 2), (2, 3), (3, 1), (3, 2), (3, 3)\}$

Relações e suas Propriedades

Propriedades das Relações

Exercício. Quais relações abaixo são simétricas em $\mathbb{Z}$?

- $R_1 = \{(a, b) \mid a \leq b\}$
- $R_2 = \{(a, b) \mid a > b\}$
- $R_3 = \{(a, b) \mid a = b \ \lor \ a = -b\}$
- $R_4 = \{(a, b) \mid a = b\}$
- $R_5 = \{(a, b) \mid a = b + 1\}$
- $R_6 = \{(a, b) \mid a + b \leq 3\}$

Relações e suas Propriedades

Propriedades das Relações

- Uma relação R em A é antissimétrica se $(a, b) \in R$ e $(b, a) \in R$ implica $a = b$, para todo $a, b \in A$.
- $\forall a \forall b((a, b) \in R \ \wedge \ (b, a) \in R \ \rightarrow \ (a = b))$

Relações e suas Propriedades

Propriedades das Relações

- Uma relação R em A é antissimétrica se $(a, b) \in R$ e $(b, a) \in R$ implica $a = b$, para todo $a, b \in A$.
- $\forall a \forall b((a, b) \in R \ \wedge \ (b, a) \in R \ \rightarrow \ (a = b))$
- Antissimetria não é o contrário de simetria.
- Antissimetria permite um tipo de simetria: $(a, a) \in R$.

Relações e suas Propriedades

Propriedades das Relações

- Uma relação R em A é antissimétrica se $(a, b) \in R$ e $(b, a) \in R$ implica $a = b$, para todo $a, b \in A$.
- $\forall a \forall b ((a, b) \in R \;\wedge\; (b, a) \in R \;\rightarrow\; (a = b))$
- Antissimetria não é o contrário de simetria.
- Antissimetria permite um tipo de simetria: $(a, a) \in R$.
- Exemplo. Seja $A = \{1, 2, 3\}$.

$$R_1 = \{(1, 2), (1, 3), (2, 3)\}$$
$$R_2 = \{(1, 2), (3, 1)\}$$
$$R_3 = \{(1, 1), (1, 2), (3, 3)\}$$
$$R_4 = \{(1, 1), (2, 2)\}$$

Relações e suas Propriedades

Propriedades das Relações

Exercício. Quais relações abaixo são antissimétricas em $A = \{1, 2, 3\}$?

- $R_1 = \{(1, 1), (2, 2), (3, 3)\}$
- $R_2 = \{(1, 2), (1, 3), (2, 2), (3, 1), (3, 3)\}$
- $R_3 = \{(1, 1), (1, 3), (2, 1), (2, 2), (2, 3), (3, 3)\}$

Relações e suas Propriedades

Propriedades das Relações

Exercício. Quais relações abaixo são antissimétricas em $\mathbb{Z}$?

- $R_1 = \{(a, b) \mid a \leq b\}$
- $R_2 = \{(a, b) \mid a > b\}$
- $R_3 = \{(a, b) \mid a = b \ \lor \ a = -b\}$
- $R_4 = \{(a, b) \mid a = b\}$
- $R_5 = \{(a, b) \mid a = b + 1\}$
- $R_6 = \{(a, b) \mid a + b \leq 3\}$

Relações e suas Propriedades

Propriedades das Relações

- Uma relação em A é transitiva se $(a,b) \in R$ e $(b,c) \in R$ implica $(a,c) \in R$, para todo $a,b,c \in A$.
- $\forall a \forall b \forall c ((a,b) \in R \ \wedge \ (b,c) \in R \ \rightarrow \ (a,c) \in R))$

Relações e suas Propriedades

Propriedades das Relações

- Uma relação em A é transitiva se $(a, b) \in R$ e $(b, c) \in R$ implica $(a, c) \in R$, para todo $a, b, c \in A$.
- $\forall a \forall b \forall c((a, b) \in R \ \wedge \ (b, c) \in R \ \rightarrow \ (a, c) \in R))$
- Exemplo. Seja $A = \{1, 2, 3, 4\}$.

$$R_1 = \{(1, 2), (1, 3), (2, 3)\}$$
$$R_2 = \{(2, 1), (3, 1), (3, 2), (4, 1), (4, 2), (4, 3)\}$$
$$R_3 = \{(1, 1), (1, 2), (2, 2)\}$$
$$R_4 = \{(1, 1), (2, 2)\}$$

Relações e suas Propriedades

Propriedades das Relações

Exercício. Quais relações abaixo são transitivas em $\mathbb{Z}$?

- $R_1 = \{(a, b) \mid a \leq b\}$
- $R_2 = \{(a, b) \mid a > b\}$
- $R_3 = \{(a, b) \mid a = b \ \vee \ a = -b\}$
- $R_4 = \{(a, b) \mid a = b\}$
- $R_5 = \{(a, b) \mid a = b + 1\}$
- $R_6 = \{(a, b) \mid a + b \leq 3\}$

Relações e suas Propriedades

Combinando Relações

- Sejam R_1 e R_2 duas relações de A para B.
- Podemos combinar R_1 e R_2 de várias formas:
  - $R_1 \cup R_2$
  - $R_1 \cap R_2$
  - $R_1 - R_2$
  - $R_2 - R_1$
  - $R_1 \oplus R_2$
- Obs. Diferença simétrica: $A \oplus B = (A \cup B) - (A \cap B)$

Relações e suas Propriedades

Combinando Relações

Exemplo. Sejam $A = \{1, 2, 3\}$ e $B = \{1, 2, 3, 4\}$.
Sejam $R_1 = \{(1, 1), (2, 2), (3, 3)\}$ e
$R_2 = \{(1, 1), (1, 2), (1, 3), (1, 4)\}$.

- $R_1 \cup R_2 = \{(1, 1), (1, 2), (1, 3), (1, 4), (2, 2), (3, 3)\}$
- $R_1 \cap R_2 = \{(1, 1)\}$
- $R_1 - R_2 = \{(2, 2), (3, 3)\}$
- $R_2 - R_1 = \{(1, 2), (1, 3), (1, 4)\}$
- $R_1 \oplus R_2 = \{(2, 2), (3, 3), (1, 2), (1, 3), (1, 4)\}$

Relações e suas Propriedades

Combinando Relações

Exercício. Sejam *ALUNO* o conjunto dos alunos do CIn e *CADEIRA* o conjunto das cadeiras oferecidas no CIn.

Sejam

$$R_1 = \{(a, c) \in ALUNO \times CADEIRA \mid a \text{ pagou } c\}$$
$$R_2 = \{(a, c) \in ALUNO \times CADEIRA \mid c \text{ é obrigatória para } a\}$$

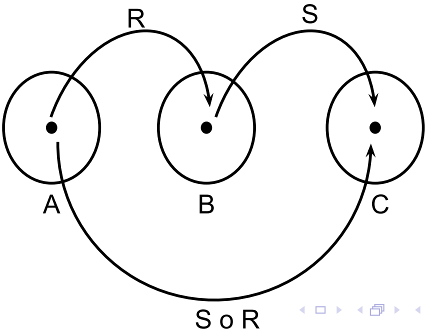
Qual a definição das relações abaixo?

- $R_1 \cup R_2$
- $R_1 \cap R_2$
- $R_1 - R_2$
- $R_2 - R_1$
- $R_1 \oplus R_2$

Relações e suas Propriedades

Combinando Relações

- Seja R uma relação de A para B.
- Seja S uma relação de B para C.
- A relação composta de $S \circ R$ é uma relação que contém os pares (a, c), onde
  - $a \in A$
  - $c \in C$
  - Existe $b \in B$ tal que $(a, b) \in R$ e $(b, c) \in S$



Relações e suas Propriedades

Combinando Relações

Exemplo.

- Sejam $A = \{1, 2, 3\}$ e $B = \{1, 2, 3, 4\}$ e $C = \{0, 1, 2\}$.
- Sejam $R = \{(1, 1), (1, 4), (2, 3), (3, 1), (3, 4)\}$ e $S = \{(1, 0), (2, 0), (3, 1), (3, 2), (4, 1)\}$.
- $S \circ R = \{(1, 0), (1, 1), (2, 1), (2, 2), (3, 0), (3, 1)\}$

Relações e suas Propriedades

Combinando Relações

Exercício. Sejam $A = \{1, 2, 3\}$, $B = \{Fulano, Sicrano, Beltrano\}$ e $C = \{a, b, c\}$.
Sejam $R_1 = \{(1, Fulano), (1, Sicrano), (3, Sicrano)\}$ e $R_2 = \{(Fulano, c), (Sicrano, b), (Beltrano, a), (Sicrano, a)\}$.

- Quem é $R_2 \circ R_1$?

Relações e suas Propriedades

Combinando Relações

- Seja R uma relação em A.
- R^n é definida recursivamente como

$$\begin{aligned} R^1 &= R \\ R^{n+1} &= R^n \circ R \end{aligned}$$

- Ou seja,

$$\begin{array}{lllll} R^2 & = & R^1 \circ R & = & R \circ R \\ R^3 & = & R^2 \circ R & = & (R \circ R) \circ R \\ R^4 & = & R^3 \circ R & = & (R^2 \circ R) \circ R = ((R \circ R) \circ R) \circ R \\ \ldots \end{array}$$

Relações e suas Propriedades

Combinando Relações

Exemplo.

- Seja A o conjunto de presidentes do Brasil.
- Seja $R = \{(a, b) \in A \times A \mid a \text{ é antecessor direto de } b\}$ uma relação em A.
- Ou seja,

$$
\begin{aligned}
R = \;& \{(Lula, Dilma\} \\
& \{(FHC, Lula), \\
& (Itamar, FHC), \\
& (Collor, Itamar), \ldots, \\
& (Floriano, Prudente), \\
& (Deodoro, Floriano)\}
\end{aligned}
$$

- $R^2 = \{(FHC, Dilma), (Itamar, Lula), (Collor, FHC), \ldots, (Deodoro, Prudente)\}$
- Exercício. Quem é R^3?

Relações e suas Propriedades

Combinando Relações

Teorema.

- A relação R em A é transitiva se, e somente se

$$R^n \subseteq R$$

para $n = 1, 2, 3, \ldots$.

- Ou seja,

$$\begin{array}{l} R \subseteq R \\ R^2 \subseteq R \\ R^3 \subseteq R \\ \ldots \end{array}$$

Relações e suas Propriedades

Combinando Relações

Exemplo.

- Seja $R = \{(Recife, Rio), (Rio, Natal), (Recife, Natal)\}$ em $A = \{Recife, Rio, Natal\}$.
- Note que R é transitiva.

Relações e suas Propriedades

Combinando Relações

Exemplo.

- Seja $R = \{(Recife, Rio), (Rio, Natal), (Recife, Natal)\}$ em $A = \{Recife, Rio, Natal\}$.
- Note que R é transitiva.
- Pelo teorema, temos que

$$\begin{aligned} &R \subseteq R \\ &R^2 \subseteq R \\ &R^3 \subseteq R \\ &\ldots \end{aligned}$$

Relações e suas Propriedades

Combinando Relações

- Uma relação R em A é irreflexiva se $(a, a) \notin R$ para todo $a \in R$
- $\forall a((a, a) \notin R)$

Relações e suas Propriedades

Combinando Relações

- Uma relação R em A é irreflexiva se $(a, a) \notin R$ para todo $a \in R$
- $\forall a((a, a) \notin R)$
- Exemplo. Seja $A = \{0, 1, 2, 3\}$.

$$R_1 = \{(1, 2), (2, 1), (3, 1)\}$$
$$R_2 = \{(1, 0), (1, 2), (2, 0), (3, 1), (3, 2)\}$$
$$R_3 = \{(1, 2), (1, 3), (2, 1), (2, 3), (3, 0), (3, 1), (3, 2)\}$$

Relações e suas Propriedades

Combinando Relações

- Uma relação R em A assimétrica se $(a, b) \in R \ \rightarrow (b, a) \notin R$, para todo $(a, b) \in R$.

Relações e suas Propriedades

Combinando Relações

- Uma relação R em A assimétrica se $(a, b) \in R \ \rightarrow (b, a) \notin R$, para todo $(a, b) \in R$.
- Exemplo. Seja $A = \{1, 2, 3\}$.

$$
\begin{aligned}
R_1 &= \{(1,2),(1,3),(2,3)\} \\
R_2 &= \{(1,2),(3,1)\} \\
R_3 &= \{(1,2),(1,3),(3,2)\} \\
R_4 &= \{(1,2),(2,3)\}
\end{aligned}
$$

Relações e suas Propriedades

Combinando Relações

- A relação R^{-1} é a relação inversa de R em A.
- $R^{-1} = \{(b, a) \mid (a, b) \in R\}$

Relações e suas Propriedades

Combinando Relações

- A relação R^{-1} é a relação inversa de R em A.
- $R^{-1} = \{(b, a) \mid (a, b) \in R\}$
- Exemplo. Seja $A = \{1, 2, 3\}$.

$$R_1 = \{(1,2),(1,3),(2,3)\}$$
$$R_1^{-1} = \{(2,1),(3,1),(3,2)\}$$

$$R_2 = \{(1,1),(2,2),(3,3)\}$$
$$R_2^{-1} = \{(1,1),(2,2),(3,3)\}$$

$$R_3 = \{(1,3),(2,3),(3,3)\}$$
$$R_3^{-1} = \{(3,1),(3,2),(3,3)\}$$

Relações e suas Propriedades

Combinando Relações

- Seja R uma relação em A.
- $\overline{R}$ é a relação complementar de R
- $\overline{R} = \{(a, b) \mid (a, b) \notin R\}$

Relações e suas Propriedades

Combinando Relações

- Seja R uma relação em A.
- $\overline{R}$ é a relação complementar de R
- $\overline{R} = \{(a, b) \mid (a, b) \notin R\}$
- Exemplo. Seja $A = \{1, 2, 3\}$.

$$R_1 = \{(1,2),(1,3),(2,3)\}$$
$$\overline{R_1} = \{(1,1),(2,1),(2,2),(3,1),(3,2),(3,3)\}$$

$$R_2 = \{(1,1),(2,2),(3,3)\}$$
$$\overline{R_2} = \{(1,2),(1,3),(2,1),(2,3),(3,1),(3,2)\}$$

$$R_3 = \{(1,3),(2,3),(3,3)\}$$
$$\overline{R_3} = \{(1,1),(1,2),(2,1),(2,2),(3,1),(3,2)\}$$

Exercícios recomendados

Seção 8.1

- Fazer pelo menos até o 43
- Discrete Mathematics and Its Applications
  Kenneth Rosen, 6a edição

Fechos (*Closures*)

Introdução

- Seja $A = \{1, 2, 3\}$.
- Seja $R = \{(1, 1), (1, 2), (2, 1), (3, 2)\}$.
- Esta relação é reflexiva?

Fechos (*Closures*)

Introdução

- Seja $A = \{1, 2, 3\}$.
- Seja $R = \{(1, 1), (1, 2), (2, 1), (3, 2)\}$.
- Esta relação é reflexiva?
- Que pares devemos adicionar para torná-la reflexiva?

Fechos (*Closures*)

Introdução

- Seja $A = \{1, 2, 3\}$.
- Seja $R = \{(1, 1), (1, 2), (2, 1), (3, 2)\}$.
- Seja $R' = \{(1, 1), (1, 2), (2, 1), (2, 2), (3, 2), (3, 3)\}$.
  - Contém R.
  - É reflexiva.
  - É a menor relação reflexiva que contém R.

Fechos (*Closures*)

Introdução

- Seja $A = \{1, 2, 3\}$.
- Seja $R = \{(1,1), (1,2), (2,1), (3,2)\}$.
- Seja $R' = \{(1,1), (1,2), (2,1), (2,2), (3,2), (3,3)\}$.
  - Contém R.
  - É reflexiva.
  - É a menor relação reflexiva que contém R.
- R' é o fecho reflexivo de R.

Fechos (*Closures*)

Introdução

- Seja $A = \{1, 2, 3\}$.
- Seja $R = \{(1, 1), (1, 2), (2, 1), (3, 2)\}$.
- Exercício. Defina uma relação R'' que
  - Contenha R.
  - Seja reflexiva.
  - Não seja um fecho reflexivo.

Fechos (*Closures*)

Introdução

- $\Delta = \{(a, a) \mid a \in A\}$ é a relação diagonal em A.
- Seja R uma relação em A.
- O fecho reflexivo de R é $(R \cup \Delta)$.

Fechos (*Closures*)

Introdução

Exercício.

- Seja $R = \{(a, b) \in \mathbb{Z}^2 \mid a \neq b\}$.
- Qual o fecho reflexivo de R?

Fechos (*Closures*)

Introdução

- Seja $A = \{1, 2, 3\}$.
- Seja $R = \{(1, 1), (1, 2), (2, 2), (2, 3), (3, 1), (3, 2)\}$.
- Que pares devemos adicionar para torná-la simétrica?

Fechos (*Closures*)

Introdução

- Seja $A = \{1, 2, 3\}$.
- Seja $R = \{(1,1),(1,2),(2,2),(2,3),(3,1),(3,2)\}$.
- $R' = \{(1,1),(1,2),(1,3),(2,1),(2,2),(2,3),(3,1),(3,2)\}$.
    - Contém R.
    - É simétrica.
    - É a menor relação simétrica que contém R.
- R' é o fecho simétrico de R.

Fechos (*Closures*)

Introdução

- Relembrando: $R^{-1} = \{(b, a) \mid (a, b) \in R\}$.
- O fecho simétrico de R é $(R \cup R^{-1})$.

Fechos (*Closures*)

Introdução

Exercício.

- Seja $R = \{(a, b) \in \mathbb{Z}^2 \mid a < b\}$.
- Qual o fecho simétrico de R?

Fechos (*Closures*)

Introdução

- Seja $A = \{1, 2, 3, 4\}$.
- Seja $R = \{(1, 3), (1, 4), (2, 1), (3, 2)\}$.
- Que pares devemos adicionar para torná-la transitiva?

Fechos (*Closures*)

Introdução

- Seja $A = \{1, 2, 3, 4\}$.
- Seja $R = \{(1, 3), (1, 4), (2, 1), (3, 2)\}$.
- À primeira vista, basta adicionar $(1, 2), (2, 3), (2, 4), (3, 1)$.

Fechos (*Closures*)

Introdução

- Seja $A = \{1, 2, 3, 4\}$.
- Seja $R = \{(1, 3), (1, 4), (2, 1), (3, 2)\}$.
- À primeira vista, basta adicionar $(1, 2), (2, 3), (2, 4), (3, 1)$.
- Mas, será que $R' = \{(1, 2), (1, 3), (1, 4), (2, 1), (2, 3), (2, 4), (3, 1), (3, 2)\}$ é transitivo?

Fechos (*Closures*)

Introdução

- Seja $A = \{1, 2, 3, 4\}$.
- Seja $R = \{(1, 3), (1, 4), (2, 1), (3, 2)\}$.
- À primeira vista, basta adicionar $(1, 2), (2, 3), (2, 4), (3, 1)$.
- Mas, será que $R' = \{(1, 2), (1, 3), (1, 4), (2, 1), (2, 3), (2, 4), (3, 1), (3, 2)\}$ é transitivo?
- Note que o que fizemos foi adicionar $R \circ R$.

Fechos (*Closures*)

Introdução

- Descobrir o fecho transitivo não é tão fácil.
- O fecho tem que ter R
- Temos que adicionar $R \circ R$
- Temos que adicionar $(R \circ R) \circ R$
- Temos que adicionar $((R \circ R) \circ R) \circ R$
- Temos que adicionar $(((R \circ R) \circ R) \circ R) \circ R$
- ...

Fechos (*Closures*)

Introdução

Outro exemplo.

- Seja $C = \{Recife, Petrolina, Teresina, Aracaju\}$.
- Seja $R = \{(Recife, Teresina), (Recife, Aracaju)$ $(Petrolina, Recife), (Teresina, Petrolina)\}$ os voos da companhia aérea Golaço.

Fechos (*Closures*)

Introdução

Outro exemplo.

- Seja $C = \{Recife, Petrolina, Teresina, Aracaju\}$.
- Seja $R = \{(Recife, Teresina), (Recife, Aracaju)$
  $(Petrolina, Recife), (Teresina, Petrolina)\}$
  os voos da companhia aérea Golaço.
- R contém os voos diretos entre 2 cidades.
- $R \circ R$ contém os voos com 1 escala
- $(R \circ R) \circ R$ contém os voos com 2 escalas.
- $((R \circ R) \circ R) \circ R$ contém os voos com 3 escalas, ...
- O fecho transitivo contém todas as possibilidades de viagem que a Golaço oferece.

Fechos (*Closures*)

Introdução

- O fecho transitivo de uma relação R em A é dado por

$$R^* = \bigcup_{n=1}^{\infty} R^n$$

- Ou seja, o fecho transitivo R^* (chamado também de relação de conectividade), é a união infinita

$$R \cup R^2 \cup R^3 \cup R^4 \cup R^5 \cup \ldots$$

Fechos (*Closures*)

Introdução

- Como calcular o fecho transitivo sem ter que fazer composições e uniões infinitas?

Fechos (*Closures*)

Introdução

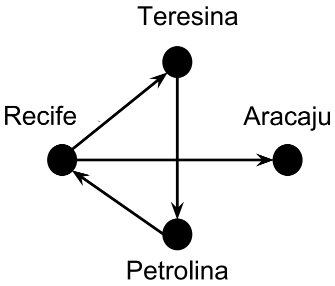
- Como calcular o fecho transitivo sem ter que fazer composições e uniões infinitas?
- Para isto, vamos antes aprender a transformar uma relação em uma matriz.

Fechos (*Closures*)

Introdução

Representações de uma relação

- Uma relação pode ser representada por um grafo dirigido.
- Seja $R = \{(Recife, Teresina), (Recife, Aracaju)$ $(Petrolina, Recife), (Teresina, Petrolina)\}$.



Fechos (*Closures*)

Introdução

Representações de uma relação

- Uma relação pode ser representada por uma matriz zero-um.
- Seja $R = \{(Recife, Teresina), (Recife, Aracaju)$ $(Petrolina, Recife), (Teresina, Petrolina)\}$.

$$\begin{array}{c} \\ \text{Recife} \\ \text{Teresina} \\ \text{Petrolina} \\ \text{Aracaju} \end{array} \begin{array}{c} \begin{array}{cccc} \text{Recife} & \text{Teresina} & \text{Petrolina} & \text{Aracaju} \end{array} \\ \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \end{array}$$

Fechos (*Closures*)

Introdução

Representações de uma relação

- Uma relação pode ser representada por uma matriz zero-um.
- Seja $R = \{(Recife, Teresina), (Recife, Aracaju)$ $(Petrolina, Recife), (Teresina, Petrolina)\}$.
- Em geral, não colocamos os rótulos na matriz:

$$\mathbf{M}_R = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

- E assumimos que linhas e colunas estão representando os elementos em uma ordem pré-determinada.

Fechos (*Closures*)

Introdução

Representações de uma relação

- Uma relação pode ser representada por uma matriz zero-um.
- Seja $R = \{(Recife, Teresina), (Recife, Aracaju)$ $(Petrolina, Recife), (Teresina, Petrolina)\}$.
- Em geral, não colocamos os rótulos na matriz:

$$\mathbf{M}_R = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

- E assumimos que linhas e colunas estão representando os elementos em uma ordem pré-determinada.
- Por exemplo, a matriz acima tem linhas e colunas referentes às cidades Recife, Teresina, Petrolina e Aracaju (nessa ordem).

Fechos (*Closures*)

Introdução

Composição de relações e matriz zero-um

- Sejam $\mathbf{M}_R$ e $\mathbf{M}_S$ as matrizes zero-um de R e S.
- A matriz de $S \circ R$ é

$$\mathbf{M}_{S \circ R} = \mathbf{M}_R \odot \mathbf{M}_S$$

onde $\odot$ é o produto booleano de $\mathbf{M}_R$ e $\mathbf{M}_S$.

Fechos (*Closures*)

Introdução

Produto booleano

- É o produto de matrizes zero-um
- $0 = \text{F}$
- $1 = \text{T}$
- Ao invés de soma, fazemos um $\vee$
- Ao invés de multiplicação, fazemos um $\wedge$

Fechos (*Closures*)

Introdução

Produto booleano

- Sejam

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \qquad \mathbf{B} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{A} \odot \mathbf{B} = \begin{bmatrix} (1 \wedge 1) \vee (0 \wedge 0) & (1 \wedge 1) \vee (0 \wedge 1) & (1 \wedge 0) \vee (0 \wedge 1) \\ (0 \wedge 1) \vee (1 \wedge 0) & (0 \wedge 1) \vee (1 \wedge 1) & (0 \wedge 0) \vee (1 \wedge 1) \\ (1 \wedge 1) \vee (0 \wedge 0) & (1 \wedge 1) \vee (0 \wedge 1) & (1 \wedge 0) \vee (0 \wedge 1) \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{A} \odot \mathbf{B} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

Fechos (*Closures*)

Introdução

Exercício.

- Seja

$$\mathbf{M}_R = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

- Calcule $\mathbf{M}_{R \circ R}$ (ou seja, calcule $\mathbf{M}_R \odot \mathbf{M}_R$).

Fechos (*Closures*)

Introdução

Notação.

- A matriz **A** elevado a n é definido como

$$\mathbf{A}^{[n]} = \underbrace{\mathbf{A} \odot \mathbf{A} \odot \ldots \odot \mathbf{A}}_{\text{n } vezes}$$

Fechos (*Closures*)

Introdução

Join e *Meet*

- O *join* das matrizes zero-um **A** e **B** é o $\vee$ de cada elemento de **A** e **B**.
- Notação. $\mathbf{A} \vee \mathbf{B}$

Fechos (*Closures*)

Introdução

Join e *Meet*

- Exemplo. Sejam

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \qquad \mathbf{B} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \end{bmatrix} \qquad \mathbf{A} \vee \mathbf{B} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

- Para matrizes representando relações, *join* equivale à união das relações.

Fechos (*Closures*)

Introdução

Join e *Meet*

- O *meet* das matrizes zero-um $\mathbf{A}$ e $\mathbf{B}$ é o $\wedge$ de cada elemento de $\mathbf{A}$ e $\mathbf{B}$.
- Notação. $\mathbf{A} \wedge \mathbf{B}$

Fechos (*Closures*)

Introdução

Join e *Meet*

- Exemplo. Sejam

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \qquad \mathbf{B} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \end{bmatrix} \qquad \mathbf{A} \wedge \mathbf{B} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

- Para matrizes representando relações, *meet* equivale à interseção das relações.

Fechos (*Closures*)

Introdução

- Seja $\mathbf{M}_R$ a matriz zero-um da relação R.
- Seja R uma relação em A.
- Assuma que A tem n elementos.
- A matriz de R^* é

$$\mathbf{M}_{R^*} = \mathbf{M}_R \vee \mathbf{M}_R^{[2]} \vee \ldots \vee \mathbf{M}_R^{[n]}$$

- Ou seja,

$$\begin{aligned}\mathbf{M}_{R^*} = \ & \mathbf{M}_R \vee (\mathbf{M}_R \odot \mathbf{M}_R) \vee ((\mathbf{M}_R \odot \mathbf{M}_R) \odot \mathbf{M}_R) \vee \ldots \vee \\ & (\ldots((\mathbf{M}_R \odot \mathbf{M}_R) \odot \mathbf{M}_R)\ldots) \odot \mathbf{M}_R)\end{aligned}$$

Fechos (*Closures*)

Introdução

Exemplo.

- Seja $\mathbf{M}_R$ a matriz

$$\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$$

- Essa matriz representa, por exemplo, a relação $R = \{(a, b), (b, a)\}$ sobre o conjunto $A = \{a, b\}$.

Fechos (*Closures*)

Introdução

Exemplo.

- Seja $\mathbf{M}_R$ a matriz

$$\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$$

- Para calcularmos $\mathbf{M}_{R^*}$, precisamos calcular $\mathbf{M}_R \vee \mathbf{M}_R^{[2]}$

Fechos (*Closures*)

Introdução

Exemplo.

- Seja $\mathbf{M}_R$ a matriz

$$\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$$

- Para calcularmos $\mathbf{M}_{R^*}$, precisamos calcular $\mathbf{M}_R \vee \mathbf{M}_R^{[2]}$
- $\mathbf{M}_R^{[2]}$ é

$$\mathbf{M}_R \odot \mathbf{M}_R = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \odot \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Fechos (*Closures*)
Introdução

Exemplo.

- Seja $\mathbf{M}_R$ a matriz

$$\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$$

- Para calcularmos $\mathbf{M}_{R^*}$, precisamos calcular $\mathbf{M}_R \vee \mathbf{M}_R^{[2]}$
- $\mathbf{M}_R^{[2]}$ é

$$\mathbf{M}_R \odot \mathbf{M}_R = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \odot \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

- $\mathbf{M}_{R^*}$ é

$$\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \vee \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$$

Fechos (*Closures*)

Introdução

Exercício.

- Seja $\mathbf{M}_R$ a matriz

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

- Calcule $\mathbf{M}_{R^*}$.

Exercícios recomendados

Seção 8.4

- Fazer no mínimo do 1 ao 26 e 29.
- Discrete Mathematics and Its Applications
  Kenneth Rosen, 6a edição

1. Relações e suas Propriedades

2. Fechos (*Closures*)

3. Relações de Equivalência

Relações de Equivalência

- Suponha que temos 3 tipos de música:
  - MPB
  - Sertanejo
  - Axé
- Seja $A = \{$Chitãozinho e Xororó, Marisa Monte, Carlinhos Brown, Roberto Carlos, Zezé di Camargo e Luciano, Chico Buarque, Timbalada$\}$

Relações de Equivalência

- Suponha que temos 3 tipos de música:
  - MPB
  - Sertanejo
  - Axé
- Seja $A = \{$Chitãozinho e Xororó, Marisa Monte, Carlinhos Brown, Roberto Carlos, Zezé di Camargo e Luciano, Chico Buarque, Timbalada$\}$
- Seja R_{Musica} a relação em A
  $R_{Musica} = \{(x, y) \in A^2 \mid x \text{ canta o mesmo tipo de música que } y\}$

Relações de Equivalência

- Suponha que temos 3 tipos de música:
  - MPB
  - Sertanejo
  - Axé
- Seja $A = \{$Chitãozinho e Xororó, Marisa Monte, Carlinhos Brown, Roberto Carlos, Zezé di Camargo e Luciano, Chico Buarque, Timbalada$\}$
- Seja R_{Musica} a relação em A
  $R_{Musica} = \{(x, y) \in A^2 \mid x \text{ canta o mesmo tipo de música que } y\}$
- Esta relação é reflexiva?

Relações de Equivalência

- Suponha que temos 3 tipos de música:
  - MPB
  - Sertanejo
  - Axé
- Seja $A = \{$Chitãozinho e Xororó, Marisa Monte, Carlinhos Brown, Roberto Carlos, Zezé di Camargo e Luciano, Chico Buarque, Timbalada$\}$
- Seja R_{Musica} a relação em A
  $R_{Musica} = \{(x, y) \in A^2 \mid x \text{ canta o mesmo tipo de música que } y\}$
- Esta relação é reflexiva?
- Esta relação é simétrica?

Relações de Equivalência

- Suponha que temos 3 tipos de música:
  - MPB
  - Sertanejo
  - Axé
- Seja $A = \{$Chitãozinho e Xororó, Marisa Monte, Carlinhos Brown, Roberto Carlos, Zezé di Camargo e Luciano, Chico Buarque, Timbalada$\}$
- Seja R_{Musica} a relação em A
  $R_{Musica} = \{(x, y) \in A^2 \mid x$ canta o mesmo tipo de música que $y\}$
- Esta relação é reflexiva?
- Esta relação é simétrica?
- Esta relação é transitiva?

Relações de Equivalência

- Suponha que temos 3 tipos de música:
  - MPB
  - Sertanejo
  - Axé
- Seja $A = \{$Chitãozinho e Xororó, Marisa Monte, Carlinhos Brown, Roberto Carlos, Zezé di Camargo e Luciano, Chico Buarque, Timbalada$\}$
- Seja R_{Musica} a relação em A
  $R_{Musica} = \{(x, y) \in A^2 \mid x \text{ canta o mesmo tipo de música que } y\}$
- Esta relação é reflexiva?
- Esta relação é simétrica?
- Esta relação é transitiva?
- Exercício. Quais são os pares da relação R_{Musica}?

Relações de Equivalência

Resposta.

- {(Roberto Carlos, Roberto Carlos),(Marisa Monte, Marisa Monte), (Chico Buarque, Chico Buarque),(Carlinhos Brown, Carlinhos Brown), (Timbalada, Timbalada),
  (Zezé di Camargo e Luciano, Zezé di Camargo e Luciano),
  (Chitãozinho e Xororó, Chitãozinho e Xororó),
  (Roberto Carlos, Marisa Monte),
  (Marisa Monte, Roberto Carlos),
  (Roberto Carlos, Chico Buarque),
  (Chico Buarque, Roberto Carlos),
  (Marisa Monte, Chico Buarque),
  (Chico Buarque, Marisa Monte),
  (Carlinhos Brown, Timbalada),
  (Timbalada, Carlinhos Brown),
  (Zezé di Camargo e Luciano, Chitãozinho e Xororó),
  (Chitãozinho e Xororó, Zezé di Camargo e Luciano)}

Relações de Equivalência

Definição

- Uma relação em A é uma relação de equivalência se ela for
  - Reflexiva
  - Simétrica
  - Transitiva

Relações de Equivalência

- Relações de equivalência definem que elementos são equivalentes ("quase iguais") a que elementos.
- Em R_{Musica}, Roberto Carlos é equivalente a Marisa Monte.
  - Claro que Roberto Carlos é muito diferente de Marisa Monte em vários aspectos.
  - Mas, em termos de MPB, Sertanejo e Axé, eles são equivalentes pois ambos cantam MPB.

Relações de Equivalência

- Elementos que se relacionam em uma relação de equivalência são ditos elementos equivalentes.
- Se a e b são equivalentes, escrevemos $a \sim b$.

Relações de Equivalência

- Elementos que se relacionam em uma relação de equivalência são ditos elementos equivalentes.
- Se a e b são equivalentes, escrevemos $a \sim b$.
- Ou seja, podemos dizer que
  Roberto Carlos $\sim$ Marisa Monte
  Carlinhos Brown $\sim$ Timbalada
  Chitãozinho e Xororó $\sim$ Zezé di Camargo e Luciano
  ...

Relações de Equivalência

Exercício.

- Seja A o conjunto dos clubes de futebol das séries A, B, C e D.
- Seja $R = \{(x, y) \in A^2 \mid x \text{ joga na mesma divisão que } y\}$.
- Esta é uma relação de equivalência?
- Quais são os pares de R?

Relações de Equivalência

Exercício.

- Seja $R = \{(a, b) \in \mathbb{Z}^2 \mid a \equiv b \ (mod\ 5)\}$ uma relação em $\mathbb{Z}$.
- Esta é uma relação de equivalência?
- Quais são os pares de R?

Relações de Equivalência

Exercício.

- Seja A o conjunto de todas as palavras da língua portuguesa.
- Seja $R = \{(a, b) \in A^2 \mid a \text{ e } b \text{ têm o mesmo tamanho}\}$
- Esta é uma relação de equivalência?
- Quais são os pares de R?

Relações de Equivalência

Exercício.

- Seja $A = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$
- Seja $R = \{(a, b) \in A^2 \mid (a \mid b)\}$
- Esta é uma relação de equivalência?
- Quais são os pares de R?

Relações de Equivalência

Exercício.

- Seja A o conjunto de todas as pessoas do mundo.
- Seja $R = \{(a, b) \in A^2 \mid a \text{ } conhece \text{ } b\}$
- Esta é uma relação de equivalência?

Classes de Equivalência

- A classe de equivalência de Carlinhos Brown com respeito a R_{Musica} é o conjunto $\{$Carlinhos Brown, Timbalada$\}$.

Classes de Equivalência

- A classe de equivalência de Carlinhos Brown com respeito a R_{Musica} é o conjunto $\{$Carlinhos Brown, Timbalada$\}$.
- A classe de equivalência de um elemento é o conjunto dos elementos com os quais ele está relacionado.

Classes de Equivalência

- Notação:
  $[\text{Carlinhos Brown}]_{R_{Musica}} = \{\text{Carlinhos Brown, Timbalada}\}$.
- Da mesma forma, podemos dizer também
  $[\text{Timbalada}]_{R_{Musica}} = \{\text{Carlinhos Brown, Timbalada}\}$.

Classes de Equivalência

Exercício.

- Quem é $[\text{Chitãozinho e Xororó}]_{R_{Musica}}$?
- Quem é $[\text{Marisa Monte}]_{R_{Musica}}$?
- Quem é $[\text{Zezé di Camargo e Luciano}]_{R_{Musica}}$?

Classes de Equivalência

Definição.

- Seja R uma relação de equivalência em A.
- O conjunto com os elementos relacionados com $a \in A$ é a classe de equivalência de a.
- $[a]_R = \{s \mid (a, s) \in R\}$.

Classes de Equivalência

Definição.

- Seja R uma relação de equivalência em A.
- O conjunto com os elementos relacionados com $a \in A$ é a classe de equivalência de a.
- $[a]_R \ = \ \{s \mid (a,s) \in R\}$.
- Exemplo.
  $[\text{Roberto Carlos}]_{R_{Musica}} = \{s \mid (\text{Roberto Carlos}, s) \in R\}$.

Classes de Equivalência

Definição.

- Seja R uma relação de equivalência em A.
- O conjunto com os elementos relacionados com $a \in A$ é a classe de equivalência de a.
- $[a]_R \; = \; \{s \mid (a, s) \in R\}$.
- Exemplo.
  $[\text{Roberto Carlos}]_{R_{Musica}} = \{s \mid (\text{Roberto Carlos}, s) \in R\}$.
- Ou seja,
  $[\text{Roberto Carlos}]_{R_{Musica}} = \{$Roberto Carlos, Marisa Monte, Chico Buarque$\}$.

Classes de Equivalência

Definição.

- Qualquer elemento $b \in [a]_R$ é um representante desta classe.

Classes de Equivalência

Definição.

- Qualquer elemento $b \in [a]_R$ é um representante desta classe.
- Exemplo.

  Roberto Carlos é um representante da classe $[\text{Marisa Monte}]_{R_{Musica}}$.

  Roberto Carlos é um representante da classe $[\text{Roberto Carlos}]_{R_{Musica}}$.

  Marisa Monte é uma representante da classe $[\text{Marisa Monte}]_{R_{Musica}}$

  Marisa Monte é uma representante da classe $[\text{Chico Buarque}]_{R_{Musica}}$

  ...

Classes de Equivalência

Exercício.

- Seja A o conjunto dos clubes de futebol das séries A, B, C e D.
- Seja $R = \{(x, y) \in A^2 \mid x \text{ joga na mesma divisão que } y\}$.

Classes de Equivalência

Exercício.

- Seja A o conjunto dos clubes de futebol das séries A, B, C e D.
- Seja $R = \{(x, y) \in A^2 \mid x \text{ joga na mesma divisão que } y\}$.
- Quem é $[\text{Sport}]_R$?
- Quem é $[\text{Santa Cruz}]_R$?
- Quem é $[\text{Náutico}]_R$?
- O Cruzeiro é um representante de $[\text{Náutico}]_R$?
- O Santa Cruz é um representante de $[\text{Náutico}]_R$?
- O Náutico é um representante de $[\text{Cruzeiro}]_R$?

Classes de Equivalência e Partições

- Vamos rever os pares de R_{Musica}.
- {(Roberto Carlos, Roberto Carlos),(Marisa Monte, Marisa Monte), (Chico Buarque, Chico Buarque),(Carlinhos Brown, Carlinhos Brown), (Timbalada, Timbalada),
(Zezé di Camargo e Luciano, Zezé di Camargo e Luciano),
(Chitãozinho e Xororó, Chitãozinho e Xororó),
(Roberto Carlos, Marisa Monte),
(Marisa Monte, Roberto Carlos),
(Roberto Carlos, Chico Buarque),
(Chico Buarque, Roberto Carlos),
(Marisa Monte, Chico Buarque),
(Chico Buarque, Marisa Monte),
(Carlinhos Brown, Timbalada),
(Timbalada, Carlinhos Brown),
(Zezé di Camargo e Luciano, Chitãozinho e Xororó),
(Chitãozinho e Xororó, Zezé di Camargo e Luciano)}

Classes de Equivalência e Partições

- Claramente, eles dividem o conjunto dos músicos em partições.
- $A = \{$Roberto Carlos, Marisa Monte, Chico Buarque,
  Carlinhos Brown, Timbalada,
  Zezé di Camargo e Luciano, Chitãozinho e Xororó$\}$
- Atenção: R_{Musica} divide o conjunto A (de músicos) em partições. Não confunda: R_{Musica} é a relação em A. R_{Musica} e A são conjuntos distintos.

Classes de Equivalência e Partições

Definição.

- Uma partição de um conjunto S é uma coleção de subconjuntos A_1, A_2, A_3, ..., A_n, onde:
  - $A_i \neq \emptyset$
  - $A_i \cap A_j = \emptyset$, para $i \neq j$
  - $\bigcup_{i=1}^{n} A_i = S$.

Classes de Equivalência e Partições

Exemplo.

- Para o conjunto A de músicos, temos
  $A_1 = \{$Roberto Carlos, Marisa Monte, Chico Buarque$\}$,
  $A_2 = \{$Carlinhos Brown, Timbalada$\}$ e
  $A_3 = \{$Zezé di Camargo e Luciano, Chitãozinho e Xororó$\}$,
  onde:
  - $(A_1 \neq \emptyset) \ \wedge \ (A_2 \neq \emptyset) \ \wedge \ (A_3 \neq \emptyset)$
  - $(A_1 \cap A_2 \ = \ \emptyset) \ \wedge \ (A_1 \cap A_3 \ = \ \emptyset) \wedge \ (A_2 \cap A_3 \ = \ \emptyset)$
  - $\bigcup A_i \ = \ A_1 \cup A_2 \cup A_3 \ = \ A.$

Classes de Equivalência

Exercício.

- Seja A o conjunto dos clubes de futebol das séries A, B, C e D.
- Seja $R = \{(x, y) \in A^2 \mid x \text{ joga na mesma divisão que } y\}$.
- Quais são as partições de A?

Relações de Equivalência

Exercício.

- Seja $R = \{(a, b) \in \mathbb{Z}^2 \mid a \equiv b \ (mod\ 5)\}$ uma relação em $\mathbb{Z}$.
- Quais são as partições de $\mathbb{Z}$?

Exercícios recomendados

Seção 8.5

- Fazer no mínimo do 1 ao 46.
- Discrete Mathematics and Its Applications
  Kenneth Rosen, 6a edição