Normalização de Provas na Dedução Natural

Teoremas e definições: Extraídos das aulas do professor Ruy de Queiroz para a disciplina Lógica para Computação, UFPE.

Transcrição e explicações: David Barros Hulak.

Conteúdo

Introdução

Esse material visa esclarecer o método da normalização de provas na dedução natural, bem como os teoremas relacionados à forma normal.

Uma apostila sobre dedução natural encontra-se na página da monitoria de Lógica para Computação, em www.cin.ufpe.br/~mlogica, em caso de eventuais dúvidas.

Definições

Uma dedução (ou "prova") de um dado argumento $\Gamma \models \varphi$ pode estar correta (no sentido de que só usa as regras legítimas), mas pode estar desnecessariamente longa.

É possível definir um processo genérico de "encurtar" essa dedução de modo a obter uma dedução o mais simples possível, que é o que chamamos de "prova direta" ou "prova normal".

Uma prova não-direta (ou não-normal) contém redundâncias. Agora listamos os possíveis tipos de redundância que podem ocorrer.

1) Tipo β: Uma regra de eliminação está sendo aplicada imediatamente após uma regra de introdução para o mesmo operador.

2) Tipo η: Uma regra de introdução está sendo aplicada imediatamente após uma regra de eliminação para o mesmo operador.

Tipos de redundância

(1.a) β - E

$$\dfrac{\dfrac{\dfrac{\begin{matrix}\Sigma_1 & \Sigma_2 \\ A_1 & A_2\end{matrix}}{A_1 \wedge A_2}}{A_1}}{\Sigma_3} \quad \textbf{simplifica-se para} \Rightarrow \quad \begin{matrix}\Sigma_1 \\ A_1 \\ \Sigma_3\end{matrix}$$

Percebe-se nesse caso que a introdução de $\mathbf{A_1 \wedge A_2}$ foi irrelevante para a dedução, pois ela foi utilizada para obtermos $\mathbf{A_1}$, que já tínhamos anteriormente.

Logo, como aplicamos uma eliminação do E logo após introduzi-lo, precisamos utilizar a **normalização tipo β para o operador E.**

(1.b) ß - OU

$$
\begin{array}{c}
\mathbf{\Sigma_1} \\
\mathbf{A_1} \\
\hline
\mathbf{A_1} \vee \mathbf{A_2} \\
\hline
\begin{array}{cc}
[\mathbf{A_1}] & [\mathbf{A_2}] \\
\mathbf{\Sigma_2} & \mathbf{\Sigma_3} \\
\mathrm{C} & \mathrm{C}
\end{array} \\
\hline
\mathrm{C} \\
\mathbf{\Sigma_4}
\end{array}
\qquad \textbf{simplifica-se para} \Rightarrow \qquad
\begin{array}{c}
\mathbf{\Sigma_1} \\
\mathbf{A_1} \\
\mathbf{\Sigma_2} \\
\mathrm{C} \\
\mathbf{\Sigma_4}
\end{array}
$$

Nessa situação, introduzimos $A_1 \vee A_2$ e, a partir das suposições $[A_1]$ $[A_2]$, chegamos em C e em Σ_4.

Entretanto, não precisávamos abrir as hipóteses, dado que já tínhamos A_1. Podemos, sem nenhum problema, ir diretamente de A_1 para Σ_2 e depois para C.

Logo, a redundância em questão foi a introdução do OU seguida de sua eliminação. Fazemos, então, uma **normalização tipo ß para o operador OU.**

(1.c) ß – IMPLICA

$$
\begin{array}{ccc}
\begin{array}{cc}
 & [\mathbf{A}] \\
 & \boldsymbol{\Sigma_1} \\
\boldsymbol{\Sigma_2} & \mathbf{B} \\
 & \overline{} \\
\mathbf{A} & \mathbf{A} \to \mathbf{B} \\
\hline
\multicolumn{2}{c}{\mathbf{B}} \\
\multicolumn{2}{c}{\boldsymbol{\Sigma_3}}
\end{array}
&
\begin{array}{c}
\text{simplifica-se} \\
\text{para} \\
=>
\end{array}
&
\begin{array}{c}
\boldsymbol{\Sigma_2} \\
\mathbf{A} \\
\boldsymbol{\Sigma_1} \\
\mathrm{B} \\
\boldsymbol{\Sigma_3}
\end{array}
\end{array}
$$

Introduziu-se $\mathbf{A} \to \mathbf{B}$ e, a partir dessa introdução e de $\mathbf{A}$, extraímos $\mathbf{B}$ e, conseqüentemente, $\boldsymbol{\Sigma_3}$.

Não precisávamos abrir a hipótese de $\mathbf{A}$ para conseguirmos $\mathbf{B}$, pois já tínhamos $\boldsymbol{\Sigma_2}$ resultando em $\mathbf{A}$ e, a partir de $\mathbf{A}$, conseguiríamos $\mathbf{B}$ através de $\boldsymbol{\Sigma_1}$.

Ou seja, a introdução do IMPLICA e sua conseqüente eliminação fez com que precisássemos realizar uma **normalização tipo ß para o operador IMPLICA.**

(2.a) η - E

$$\dfrac{\dfrac{\begin{matrix}\boldsymbol{\Sigma_1} \\ \mathbf{A_1} \wedge \mathbf{A_2}\end{matrix}}{\mathbf{A_1}} \qquad \dfrac{\begin{matrix}\boldsymbol{\Sigma_1} \\ \mathbf{A_1} \wedge \mathbf{A_2}\end{matrix}}{\mathbf{A_2}}}{\begin{matrix}\mathbf{A_1} \wedge \mathbf{A_2} \\ \boldsymbol{\Sigma_2}\end{matrix}} \quad \text{simplifica-se para} \Rightarrow \quad \begin{matrix}\boldsymbol{\Sigma_1} \\ \mathbf{A_1} \wedge \mathbf{A_2} \\ \boldsymbol{\Sigma_2}\end{matrix}$$

$\mathbf{A_1}$ e $\mathbf{A_2}$ foram extraídos de $\mathbf{A_1} \wedge \mathbf{A_2}$ a partir de uma eliminação para, a partir de ambos, concluir-se $\boldsymbol{\Sigma_2}$

Não era necessário fazermos nenhuma das eliminações, visto que a conclusão $\boldsymbol{\Sigma_2}$ foi tomada a partir da veracidade simultânea de $\mathbf{A_1}$ e $\mathbf{A_2}$, ou seja, de $\mathbf{A_1} \wedge \mathbf{A_2}$, e não de algum dos dois separadamente.

Logo, eliminou-se o E para depois introduzi-lo. Com isso, concluímos que é necessário fazermos uma **normalização do tipo η para o operador E.**

(2.b) η - OU

$$\dfrac{\dfrac{\begin{matrix}\boldsymbol{\Sigma_1}\\ \mathbf{A_1} \vee \mathbf{A_2}\end{matrix} \qquad \begin{matrix}[\mathbf{A_1}]\\ \mathbf{A_1} \vee \mathbf{A_2}\end{matrix} \qquad \begin{matrix}[\mathbf{A_2}]\\ \mathbf{A_1} \vee \mathbf{A_2}\end{matrix}}{\mathbf{A_1} \vee \mathbf{A_2}}}{\boldsymbol{\Sigma_2}}$$

simplifica-se para =>

$$\begin{matrix}\boldsymbol{\Sigma_1}\\ \mathbf{A_1} \vee \mathbf{A_2}\\ \boldsymbol{\Sigma_2}\end{matrix}$$

Nesse caso fizemos de $\mathbf{A_1} \vee \mathbf{A_2}$ para $[\mathbf{A_1}]$ e $[\mathbf{A_2}]$ a eliminação do OU, para concluirmos introduzindo o mesmo $\mathbf{A_1} \vee \mathbf{A_2}$ na hora de fechar a hipótese.

Temos de fazer, então, uma **normalização do tipo η para o operador OU.**

(2.c) η - IMPLICA

$$\dfrac{\dfrac{\begin{matrix} & \mathbf{\Sigma_1} \\ [\mathbf{A}] & \mathbf{A} \rightarrow \mathbf{B} \end{matrix}}{\mathbf{B}}}{\begin{matrix}\mathbf{A} \rightarrow \mathbf{B} \\ \mathbf{\Sigma_2}\end{matrix}}$$

simplifica-se para =>

$$\begin{matrix} \mathbf{\Sigma_1} \\ \mathbf{A_1} \rightarrow \mathbf{A_2} \\ \mathbf{\Sigma_2} \end{matrix}$$

Nesse cenário, extraímos $\mathbf{B}$ a partir de $[\mathbf{A}]$ e $\mathbf{A} \rightarrow \mathbf{B}$, para depois introduzirmos novamente $\mathbf{A} \rightarrow \mathbf{B}$ e concluirmos $\mathbf{\Sigma_2}$.

O IMPLICA foi desnecessariamente eliminado, pois o propósito da sua eliminação foi concluir B e, a partir dele, introduzir novamente o mesmo IMPLICA.

Fazemos, então, uma **normalização do tipo η para o operador IMPLICA.**

Fórmula máxima

Seja π uma árvore de prova que contém redundâncias do tipo β. Então π contém uma fórmula φ que é:

- O resultado de uma regra de introdução.
- A maior premissa de uma regra de eliminação.

Chamamos φ de *fórmula máxima*.

Exemplos (φ em azul):

1)
$$\begin{array}{c} \Sigma_1 \qquad \Sigma_2 \\ A_1 \qquad A_2 \\ \hline A_1 \wedge A_2 \\ \hline A_1 \\ \hline \Sigma_3 \end{array}$$

2)
$$\begin{array}{c} \Sigma_1 \\ A_1 \\ \hline A_1 \vee A_2 \\ \hline \begin{array}{cc} [A_1] & [A_2] \\ \Sigma_2 & \Sigma_3 \\ C & C \end{array} \\ \hline C \\ \Sigma_4 \end{array}$$

3)
$$\begin{array}{c} \begin{array}{cc} & [A] \\ & \Sigma_1 \\ \Sigma_2 & B \\ \cline{2-2} A & A \to B \end{array} \\ \hline B \\ \Sigma_3 \end{array}$$

Obs.: Repare que, nos dois primeiros casos, a fórmula máxima é a única premissa da eliminação, logo é também a maior.

Procedimento de normalização de provas

Seja π uma árvore de prova que contém redundâncias:

1) Escolha a maior fórmula máxima e aplique redução ali.

2) Se ainda há fórmulas máximas, volte ao passo 1.

A saída do procedimento pode conter redundâncias do tipo η e, nesse caso, aplicam-se as reduções do tipo η para se chegar à forma normal.

Teorema da Existência da Forma Normal (a.k.a. "teorema da normalização fraca")

O procedimento de normalização termina, produzindo uma prova na forma normal (Se $\Gamma \models \varphi$ então existe uma dedução normal de φ a partir de Γ).

Teorema da Unicidade da Forma Normal

A forma normal de uma prova π é única, independente da ordem de aplicação das regras de redução (esse teorema só garante unicidade quando há somente redundância dos operadores de implicação e de conjunção).

Teorema da Normalização Forte

Qualquer ordem de aplicação das regras de redução leva a uma forma normal.

Conclusão

O método da dedução natural pode ser sempre aplicado sem redundâncias, e quando uma dedução estiver redundante, ela pode ser simplificada com regras de normalização.

Existem dois tipos de normalização e três casos para cada tipo. Além disso, podemos normalizar em tempo finito e, como não importa a ordem da aplicação das regras, sempre obteremos uma mesma prova normal para cada dedução.