



*Teoria dos  
Conjuntos*  
(Aula 12)

Ruy de  
Queiroz

Aritmética de  
Cardinais

A  
Cardinalidade  
do Contínuo

# *Teoria dos Conjuntos* (Aula 12)

Ruy J. G. B. de Queiroz

Centro de Informática, UFPE

2007.1



# Conteúdo

*Teoria dos  
Conjuntos*  
(Aula 12)

Ruy de  
Queiroz

Aritmética de  
Cardinais

A  
Cardinalidade  
do Contínuo

- 1 Aritmética de Cardinais
- 2 A Cardinalidade do Contínuo



# Teoria dos Conjuntos

Aritmética de Cardinais

Teoria dos  
Conjuntos  
(Aula 12)

Ruy de  
Queiroz

Aritmética de  
Cardinais

A  
Cardinalidade  
do Contínuo

## Definição

$\kappa + \lambda = |A \cup B|$  onde  $|A| = \kappa$ ,  $|B| = \lambda$ , e  $A \cap B = \emptyset$ .

## Lema

Se  $A, B, A', B'$  forem tais que  $|A| = |A'|$ ,  $|B| = |B'|$ , e  $A \cap B = \emptyset = A' \cap B'$ , então  $|A \cup B| = |A' \cup B'|$ .

## Lema

Se  $A, B, A', B'$  forem tais que  $|A| = |A'|$ ,  $|B| = |B'|$ , então  $|A \times B| = |A' \times B'|$ .



# Teoria dos Conjuntos

## Aritmética de Cardinais (cont.)

Teoria dos  
Conjuntos  
(Aula 12)

Ruy de  
Queiroz

Aritmética de  
Cardinais

A  
Cardinalidade  
do Contínuo

### Definição

$\kappa^\lambda = |A^B|$  onde  $|A| = \kappa$  e  $|B| = \lambda$ .

### Lema

Se  $|A| = |A'|$  e  $|B| = |B'|$ , então  $|A^B| = |A'^{B'}|$ .

### Teorema

- (a)  $\kappa^{\lambda+\mu} = \kappa^\lambda \cdot \kappa^\mu$ .
- (b)  $(\kappa^\lambda)^\mu = \kappa^{\lambda \cdot \mu}$ .
- (c)  $(\kappa \cdot \lambda)^\mu = \kappa^\mu \cdot \lambda^\mu$ .



# Teoria dos Conjuntos

Aritmética de Cardinais – Teorema de Cantor

Teoria dos  
Conjuntos  
(Aula 12)

Ruy de  
Queiroz

Aritmética de  
Cardinais

A  
Cardinalidade  
do Contínuo

## Teorema (Cantor)

$|X| < |\mathcal{P}(X)|$ , para todo conjunto  $X$ .

## Demonstração.

Precisamos mostrar que  $f$  é um-para-um e NÃO é sobre. □

## Teorema

$|\mathcal{P}(X)| = 2^{|X|}$ , para todo conjunto  $X$ .

## Corolário

Para qualquer sistema de conjuntos  $S$  existe um conjunto  $Y$  tal que  $|Y| > |X|$  se dá para todo  $X \in S$ .



# Teoria dos Conjuntos

## A Cardinalidade do Contínuo

Teoria dos  
Conjuntos  
(Aula 12)

Ruy de  
Queiroz

Aritmética de  
Cardinais

A  
Cardinalidade  
do Contínuo

### Fato (Pontos de Partida)

- (a)  $\kappa < \aleph_0$  *se e somente se*  $\kappa \in \mathbb{N}$ .
- (b)  $n + \aleph_0 = \aleph_0 + \aleph_0 = \aleph_0$  ( $n \in \mathbb{N}$ ).
- (c)  $n \cdot \aleph_0 = \aleph_0 \cdot \aleph_0 = \aleph_0$  ( $n \in \mathbb{N}$ ,  $n > 0$ ).
- (d)  $\aleph_0^n = \aleph_0$  ( $n \in \mathbb{N}$ ,  $n > 0$ ).



# Teoria dos Conjuntos

## A Cardinalidade do Contínuo

Teoria dos  
Conjuntos  
(Aula 12)

Ruy de  
Queiroz

Aritmética de  
Cardinais

A  
Cardinalidade  
do Contínuo

### Teorema

$$|\mathbb{R}| = 2^{\aleph_0}.$$

### Demonstração.

Voltando à prova do Teorema 6.3 do Capítulo 4, vimos que o conjunto  $\mathbb{R}$  é definido como sendo o conjunto de todos os cortes  $(A, B)$ , portanto,  $\mathbb{R} \leq |\mathcal{P}(\mathbb{Q})|$ . A prova da outra metade daquele teorema mostra que  $2^{\aleph_0} \leq |\mathbb{R}|$ . □