Teoria dos Conjuntos (Aula 12)

Ruy J. G. B. de Queiroz

Centro de Informática, UFPE

2007.1

Conteúdo

Definição

$\kappa + \lambda = |A \cup B|$ *onde* $|A| = \kappa$, $|B| = \lambda$, *e* $A \cap B = \emptyset$.

Lema

Se A, B, A', B' *forem tais que* $|A| = |A'|$, $|B| = |B'|$, *e* $A \cap B = \emptyset = A' \cap B'$, *então* $|A \cup B| = |A' \cup B'|$.

Lema

Se A, B, A', B' *forem tais que* $|A| = |A'|$, $|B| = |B'|$, *então* $|A \times B| = |A' \times B'|$.

Definição

$\kappa^\lambda = |A^B|$ *onde* $|A| = \kappa$ *e* $|B| = \lambda$.

Lema

Se $|A| = |A'|$ *e* $|B| = |B'|$, *então* $|A^B| = |A'^{B'}|$.

Teorema

(a) $\kappa^{\lambda+\mu} = \kappa^\lambda \cdot \kappa^\mu$.

(b) $(\kappa^\lambda)^\mu = \kappa^{\lambda\cdot\mu}$.

(c) $(\kappa \cdot \lambda)^\mu = \kappa^\mu \cdot \lambda^\mu$.

Teorema (Cantor)

$|X| < |\mathcal{P}(X)|$, *para todo conjunto* X.

Demonstração.

Precisamos mostrar que f é um-para-um ae NÃO é sobre. $\square$

Teorema

$|\mathcal{P}(X)| = 2^{|X|}$, *para todo conjunto* X.

Corolário

Para qualquer sistema de conjuntos S *existe um conjunto* Y *tal que* $|Y| > |X|$ *se dá para todo* $X \in S$.

Fato (Pontos de Partida)

(a) $\kappa < \aleph_0$ *se e somente se* $\kappa \in \mathbb{N}$.

(b) $n + \aleph_0 = \aleph_0 + \aleph_0 = \aleph_0$ ($n \in \mathbb{N}$).

(c) $n \cdot \aleph_0 = \aleph_0 \cdot \aleph_0 = \aleph_0$ ($n \in \mathbb{N}$, $n > 0$).

(d) $\aleph_0^n = \aleph_0$ ($n \in \mathbb{N}$, $n > 0$).

Teorema

$|\mathbb{R}| = 2^{\aleph_0}$.

Demonstração.

Voltando à prova do Teorema 6.3 do Capítulo 4, vimos que o conjunto $\mathbb{R}$ é definido como sendo o conjunto de todos os cortes (A, B), portanto, $\mathbb{R} \leq |\mathcal{P}(\mathbb{Q})|$. A prova da outra metade daquele teorema mostra que $2^{\mathbb{N}} \leq |\mathbb{R}|$. □