Lambda-Cáculo (Aula 3)

Ruy de Queiroz & Anjolina de Oliveira

Centro de Informática, UFPE

2007.2

Conteúdo

Lambda-Cálculo
Church–Rosser

Teorema (Church–Rosser para β-redução)

Se
$P \triangleright_\beta M \quad e \quad P \triangleright_\beta N$
então existe um termo T *tal que* $M \triangleright_\beta T \quad e \quad N \triangleright_\beta T$.

Lambda-Cálculo
Church–Rosser

Definição (Residuais)

Suponha que R, S sejam β-redexes em um λ-termo P. Quando R é contraído, suponha que P se transforme em P'. Os residuais *de S com respeito a R são redexes em P', definidos da seguinte forma (cf. Curry et al. 1958):*
Caso 1: *R e S são* partes de P que não se sobrepõem. *Então contrair R deixa S sem mudanças. Esse S não-modificado em P' é chamado de "o residual"de S.*
Caso 2: *$R \equiv S$. Então contrair R é o mesmo que contrair S, logo, S não tem residual em P'.*

Lambda-Cálculo
Church–Rosser

Definição (Residuais (cont.))

Caso 3: *R é parte de S e $R \not\equiv S$. Então S tem a forma $(\lambda x.M)N$ e R está em M ou em N. Contrair R transforma M em M' ou N em N', e S em $(\lambda x.M')N$ ou $(\lambda x.M)N'$ em P'; esse é o residual de S.*

Lambda-Cálculo
Church–Rosser

Exemplo

$$P \equiv \underbrace{\overbrace{(\lambda y.\, yx(\lambda x.y\,\underbrace{(\lambda z.z)x}_{R}))v}^{S}}_{M}\; w$$

$$P' \equiv \underbrace{\overbrace{(\lambda y.\, yx(\lambda x.y\,\underbrace{x}_{R'}))v}^{S'}}_{M'}\; w$$

Lambda-Cálculo
Church–Rosser

Definição (Residuais (cont.))

Caso 4: *S é parte de R e $S \not\equiv R$. Então R tem a forma $(\lambda x.M)N$ e S está em M ou em N. Contrair R transforma $(\lambda x.M)N$ em $[N/x]M$.*

Lambda-Cálculo
Church–Rosser

Definição (Residuais (cont.))

Subcaso 4a: *S está em M.*

Exemplo

$$Q \equiv \overbrace{(\lambda x.\, \underbrace{xy(\lambda y.x\,\underbrace{(\lambda z.z)y}_{S})}_{M})\,\underbrace{(\lambda v.vu)t}_{N}}^{R}\, w$$

Quando $[N/x]M$ é formado a partir de M, então S é transformado num redex S' com uma das formas
$[N/x]S, \quad [N/x][z_1/y_1]\ldots[z_n/y_n]S, \quad S,$
dependendo de quantas vezes a cláusula
$[N/x](\lambda y.P) \equiv \lambda z.[N/x][z/y]P$ *se* $y \not\equiv x$ *e* $y \in VL(N)$ *e* $x \in VL(P)$
é usada na determinação de $[N/x]M$, e se S está no escopo de um abstração λx em M. Esse S' é chamado de "o residual"de S. (É uma β-redex.)

Lambda-Cálculo
Church–Rosser

Definição (Residuais (cont.))

Subcaso 4b: *S está em N. Quando $[N/x]M$ é formado a partir de M, existe uma ocorrência de S em cada N substituído. Esses são chamados de "os residuais"de S.*

Definição (DCM)

Sejam $R_1, \ldots, R_n$ ($n \geq 0$) redexes em um termo P. Um R_i é chamado de minimal *sse ele não contém propriamente nenhum outro R_j. Dizemos que*
$P \triangleright_{\mathrm{dcm}} Q$
sse Q for obtido a partir de P por meio do seguinte processo, chamado de um desenvolvimento complemto minimal *(DCM) do conjunto $\{R_1, \ldots, R_n\}$. Primeiro contraia qualquer minimal R_i (digamos $i = 1$). Então, pela observação acima, isso deixa no máximo $n-1$ residuais $R'_2, \ldots, R'_n$, de $R_2, \ldots, R_n$. Contraia*

Lambda-Cálculo

Church–Rosser

Observação

(a) Em qualquer conjunto não-vazio de redexes, existe sempre um membro minimal.
(b) Se $n = 0$ então um DCM é simplesmente uma série talvez-vazia de α-passos.
(c) Uma única β-contração é um DCM de um conjunto de um único membro.
(d) Não-DCM's existem; e.g.
$(\lambda x.xy)(\lambda z.z) \triangleright_{1\beta} (\lambda z.z)y \triangleright_{1\beta} y$.
(e) A relação $\triangleright_{dcm}$ não é transitiva: em (d) não existe DCM de $(\lambda x.xy)(\lambda z.z)$ para y.
(f) Se $M \triangleright_{dcm} M'$ e $N \triangleright_{dcm} N'$ então $MN \triangleright_{dcm} M'N'$.
(g) Módulo congruência, Q é univocamente determinado pelo conjunto $\{R_1, \ldots, R_n\}$.

Lambda-Cálculo
Church–Rosser

Lema

Para $\lambda\beta$, se $P \triangleright_{dcm} Q$ e $P \equiv_\alpha P^*$, então $P^* \triangleright_{dcm} Q$.

Demonstração.

Por indução sobre o comprimento de P ou sobre o número de β-passos de P para Q. $\square$

Lambda-Cálculo
Church–Rosser

Lema

Para $\lambda\beta$, se $M \triangleright_{dcm} M'$ e $N \triangleright_{dcm} N'$, então $[N/x]M \triangleright_{dcm} [N'/x]M'$.

Demonstração.

Podemos assumir que nenhuma variável ligada em M está livre em xN, e que os DCM's dados não têm α-passos (Lemas e 1.11).
Vamos fazer uma análise de casos de M. Suponha que $R_1, \ldots, R_n$ sejam as redexes desenvolvidas no dado DCM de M. (continua) □

Lambda-Cálculo
Church–Rosser

Cont.

Caso 1: M é uma variável, digamos x. Então $n = 0$ e $M' \equiv x$, portanto,
$[N/x]M \;\equiv\; N \rhd_{\mathrm{dcm}} N' \;\equiv\; [N'/x]M'$.
Caso 2: $x \notin VL(M)$. Então $x \notin VL(M')$ pelo Lema 1.28(a), portanto,
$[N/x]M \;\equiv\; M \rhd_{\mathrm{dcm}} M' \;\equiv\; [N'/x]M'$. $\square$

Lambda-Cálculo

Church–Rosser

Cont.

Caso 3: M é um termo λ-abstração, digamos $\lambda y.M_1$. Então cada β-redex em M está em M_1, portanto M' tem a forma $\lambda y.M_1'$ onde $M_1 \rhd_{\text{dcm}} M_1'$. (Aqui assumimos que o DCM de M não tem α-passos.) Daí,

$$\begin{array}{lcll} [N/x]M & \equiv & [N/x](\lambda y.M_1) & \\ & \lambda y.[N/x]M_1 & \text{por 1.11(e) pois } y \notin VL(xN) & \\ & \rhd_{\text{dcm}} & \lambda y.[N'/x]M_1' & \text{pela hipótese} \\ & [N'/x]M' & \text{por 1.11(e) pois } y \notin VL(xN') & \end{array}$$

$\square$

Lambda-Cálculo
Church–Rosser

Cont.

Caso 4: M é um termo aplicação não-redex, digamos $M_1 M_2$, e cada R_i está me M_1 ou em M_2. Então M' tem a forma $M'_1 M'_2$ onde $M_j \triangleright_{\text{dcm}} M'_j$ para $j = 1, 2$. Logo,

$$
\begin{array}{lcll}
[N/x]M & \equiv & ([N/x]M_1)([N/x]M_2) & \\
 & \triangleright_{\text{dcm}} & ([N'/x]M'_1([N'/x]M'_2) & \text{pela hip. ind. e A1.5(f)} \\
 & \equiv & [N'/x]M'. &
\end{array}
$$

$\square$

Lambda-Cálculo
Church–Rosser

Cont.

Caso 5: M é um termo aplicação β-redex, digamos $(\lambda y.L)Q$, e um R_i, digamos R_1, é o próprio M, e os outros estão em L ou Q. No dado DCM de M, o residual de R_1 tem que ser contraído por último, pois R_1 contém os outros R's. Logo, o DCM tem a forma

$$\begin{array}{rcll} M \equiv (\lambda y.L)Q & \rhd_{\mathrm{dcm}} & (\lambda y.L')Q' & (L \rhd_{\mathrm{dcm}} L',\ Q \rhd_{\mathrm{dcm}} Q') \\ & \rhd_{1\beta} & [Q'/y]L' & \\ & \equiv & M'. & \end{array}$$

$\square$

Lambda-Cálculo
Church–Rosser

Cont.

Pela hipótese indutiva temos DCM's de $[N/x]L$ e de $[N/x]Q$; cada um pode ter alguns α-passos no final, digamos

$$\begin{array}{llll} [N/x]L & \triangleright_{\mathrm{dcm}} & L^* & \equiv_\alpha [N'/x]L', \\ [N/x]Q & \triangleright_{\mathrm{dcm}} & Q^* & \equiv_\alpha [N'/x]Q', \end{array}$$

onde os DCM's para L^* e Q^* não têm α-passos. Logo

$$\begin{array}{llll} [N/x]M & \equiv & (\lambda y.[N/x]L)([N/x]Q) & \text{por 1.11(e) pois } y \notin VL(xN) \\ & \triangleright_{\mathrm{dcm}} & (\lambda y.L^*)Q^* & \text{sem } \alpha \text{ passos} \\ & \triangleright_{1\beta} & [Q^*/y]L^* & \\ & \equiv_\alpha & [([N'/x]Q')/y][N'/x]L' & \text{pela linha acima e 1.19} \\ & \equiv_\alpha & [N'/x][Q'/y]L' & \text{por 1.15(c) e 1.18} \\ & \equiv & [N'/x]M'. & \end{array}$$

Essa redução é um DCM. □

Lambda-Cálculo

Church–Rosser

Lema (A1.8.)

Para $\lambda\beta$, se $P \triangleright_{dcm} A$ e $P \triangleright_{dcm} B$, então existe T tal que $A \triangleright_{dcm} T$ e $B \triangleright_{dcm} T$.

Lambda-Cálculo

Prova do lema

Demonstração.

Pelo Lema A1.6, podemos assumir que os DCM's dados não têm α-passos. Vamos fazer uma análise de casos sobre P.

Caso 1: P é uma variável, digamos x. Então $A \equiv B \equiv P$. Pegue $T \equiv P$.

Caso 2: P é uma λ-abstração, digamos $\lambda x.P_1$. Então todas as β-redexes em P estão em P_1, e assumimos que os DCM's não têm α-passos, portanto,

$$A \equiv \lambda x.A_1, \quad B \equiv \lambda x.B_1,$$

onde $P_1 \triangleright_{\text{dcm}} A_1$ e $P_1 \triangleright_{\text{dcm}} B_1$. Pela hipótese da indução existe um T_1 tal que

$$A_1 \triangleright_{\text{dcm}} T_1, \quad B_1 \triangleright_{\text{dcm}} T_1.$$

Então, pegue $T \equiv \lambda x.T_1$. □

Lambda-Cálculo

Prova do lema

Cont.

Caso 3: P é um termo aplicação que não é uma redex, digamos $P_1 P_2$, e todas as redexes desenvolvidas nos DCM's estão em P_1 e P_2. Então a hipótese da indução nos dá T_1 e T_2, e escolhemos $T \equiv T_1 T_2$. $\square$

Lambda-Cálculo

Prova do lema

Cont.

Caso 4: P é um termo aplicação que é uma β-redex, digamos $(\lambda x.M)N$, e apenas um dos DCM's dados envolve contrair o residual de P; digamos que seja $P \rhd_{\text{dcm}} A$. Então esse DCM tem forma

$$\begin{array}{ccll} P & \equiv & (\lambda x.M) & \\ & \rhd_{\text{dcm}} & (\lambda x.M')N' & (M \rhd_{\text{dcm}} M', \quad N \rhd_{\text{dcm}} N') \\ & \rhd_{1\beta} & [N'/x]M' & \\ & \equiv & A. & \end{array}$$

e o outro DCM tem a forma

$$\begin{array}{cccc} P & \equiv & (\lambda x.M) & \\ \rhd_{\text{dcm}} & (\lambda x.M'')N'' & (M \rhd_{\text{dcm}} M'', & N \rhd_{\text{dcm}} N'') \\ & \equiv & B. & \end{array}$$

(continua...) $\square$

Lambda-Cálculo
Prova do lema

Cont.

A hipótese da indução aplicada a M, N nos dá M^+ e N^+, tal que

$$M' \triangleright_{\text{dcm}} M^+, \quad M'' \triangleright_{\text{dcm}} M^+$$
$$N' \triangleright_{\text{dcm}} N^+, \quad N'' \triangleright_{\text{dcm}} N^+$$

Agora, pegue $T \equiv [N^+/x]M^+$. Então existe um DCM de A a T, portanto:

$$\begin{array}{lll} A & \equiv & [N'/x]M' \\ & \triangleright_{\text{dcm}} & [N^+/x]M^+ \quad \text{pelo Lema A1.7.} \end{array}$$

Para construir um DCM de B, primeiro divida os DCM's de M'' e de N'' em suas β- e α-partes, portanto:

$M'' \triangleright_{\text{dcm}} M^* \equiv_\alpha M^+, \quad N'' \triangleright_{\text{dcm}} N^* \equiv_\alpha N^+,$

ondes as reduções para M^* e N^* não têm nenhum no α-passo.
Então

$$\begin{array}{lll} B & \equiv & (\lambda x.M'')N'' \\ & \triangleright_{\text{dcm}} & (\lambda x.M^*))N^* \quad \text{sem } \alpha\text{-passos} \\ & \triangleright_{1\beta} & [N^*/x]M^* \\ & \equiv_\alpha & [N^+/x]M^+ \quad \text{por 1.19.} \end{array}$$

$\square$

Lambda-Cálculo

Prova do lema

Cont.

Caso 5: P é um termo aplicação que é uma β-redex, digamos $(\lambda x.M)N$, e ambos os DCM's dados contraem o residual de P. Então esses DCM's têm a forma

$$\begin{array}{lll} P & \equiv & (\lambda x.M)N \\ & \triangleright_{\mathrm{dcm}} & (\lambda x.M')N' \\ & \triangleright_{1\beta} & [N'/x]M' \\ & \equiv & A. \end{array} \qquad \begin{array}{lll} P & \equiv & (\lambda x.M)N \\ & \triangleright_{\mathrm{dcm}} & (\lambda x.M'')N'' \\ & \triangleright_{1\beta} & [N''/x]M'' \\ & \equiv & B. \end{array}$$

Aplicamos a hipótese da indução a M e N como no Caso 4, e pegamos $T \equiv [N^+/x]M^+$. Então o Lema A1.17 nos dá o resultado, conforme acima. □

Lambda-Cálculo
Prova do Teorema Principal

Teorema Principal.

(A1.2)] Suponha que $P \triangleright_\beta M$ e $P \triangleright_\beta N$. Precisamos encontrar um termo T tal que $M \triangleright_\beta T$ e $N \triangleright_\beta T$. Por indução sobre o comprimento da redução de P a M, basta provar

(1) Se $P \triangleright_{1\beta} M$, e $P \triangleright_\beta N$ então $\exists T$ t.q. $M \triangleright_\beta T$, e $N \triangleright_\beta T$.

Para provar (1), note que um único passo β é um DCM. Logo, (1) segue de (2):

(2) Se $P \triangleright_{\mathrm{dcm}} M$, e $P \triangleright_\beta N$ então $\exists T$ t.q. $M \triangleright_\beta T$, e $N \triangleright_{\mathrm{dcm}} T$.

Mas (2) vem do Lema A1.8 por indução sobre o número de β-passos de P a N. □