UNIVERSIDADE FEDERAL DE PERNAMBUCO

Centro de Informática

Álgebra Vetorial e Linear para Computação – 2012.2

Miniprova 5 – 15/03/2013

Emanuel Felipe – efs4

1) Considere o subespaço vetorial do IR^4 dado por :

$$S_1 = \{(x,y,z,w) \in IR^4 | \begin{cases} x+y+2z-w=0 \\ 2x-2y+z+3w=0 \\ 3x-y+3z+2w=0 \end{cases}\}$$

Considere também o seguinte gerador de S_1: {(7,21,-8,12), (3,13,-4,8), (10,6,-8,0), (13,-9,-8,-12)}.

(0.15) i) A partir do gerador, extraia uma base utilizando o método do escalonamento de uma matriz com estes vetores como linhas, chegando até no final do processo, ou seja, na forma escada. Chame esta base de α.

Pegando os vetores e colocando-os como linha numa matriz e escalonando teremos:

Operações:
L1 = L1/7
L2 = -3*L1 + L2
L3 = -10*L1 + L3
L4 = -13*L1 + L4

$$\begin{pmatrix} 7 & 21 & -8 & 12 \\ 3 & 13 & -4 & 8 \\ 10 & 6 & -8 & 0 \\ 13 & -9 & -8 & -12 \end{pmatrix} => \begin{pmatrix} 1 & 3 & -\frac{8}{7} & \frac{12}{7} \\ 0 & 4 & -\frac{4}{7} & \frac{20}{7} \\ 0 & -24 & \frac{24}{7} & \frac{-120}{7} \\ 0 & -48 & \frac{48}{7} & -\frac{240}{7} \end{pmatrix}$$

Percebemos que L2,L3 e L3 são múltiplas.

$$\begin{pmatrix} 1 & 3 & -\frac{8}{7} & \frac{12}{7} \\ 0 & 4 & -\frac{4}{7} & \frac{20}{7} \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

L2 = L4/4
L1 = -3*L2 + L1

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & -\frac{5}{7} & -\frac{3}{7} \\ 0 & 1 & -\frac{1}{7} & \frac{5}{7} \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Logo $\boldsymbol{\alpha = \left\{\left(1, 0, -\frac{5}{7}, -\frac{3}{7}\right), \left(0, 1, -\frac{1}{7}, \frac{5}{7}\right)\right\}}$.

(0.15) ii) A partir do sistema que define S_1 dado acima encontre a base que surge de sua parametrização na forma escada (não multiplique os vetores por constantes). Chame essa base de β.

Do sistema, temos a seguinte matriz:

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 & -1 \\ 2 & -2 & 1 & 3 \\ 3 & -1 & 3 & 2 \end{pmatrix}$$

Escalonando-o, teremos:

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 & -1 \\ 2 & -2 & 1 & 3 \\ 3 & -1 & 3 & 2 \end{pmatrix} => \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 & -1 \\ 0 & -4 & -3 & 5 \\ 0 & -4 & -3 & 5 \end{pmatrix} => \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 & -1 \\ 0 & 1 & \frac{3}{4} & \frac{5}{4} \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$=> \begin{pmatrix} 1 & 0 & \frac{5}{4} & \frac{1}{4} \\ 0 & 1 & \frac{3}{4} & -\frac{5}{4} \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Parametrizando...

$$\begin{cases} X = -\frac{5}{4} * q - \frac{1}{4} * t \\ Y = -\frac{3}{4} * q + \frac{5}{4} * t \\ Z = q \\ W = t \end{cases}$$

Daí, temos:

$$\boldsymbol{\beta} = \{\left(-\frac{\mathbf{5}}{\mathbf{4}}, -\frac{\mathbf{3}}{\mathbf{4}}, \mathbf{1}, \mathbf{0}\right), (-\frac{\mathbf{1}}{\mathbf{4}}, \frac{\mathbf{5}}{\mathbf{4}}, \mathbf{0}, \mathbf{1})\}$$

(0.2) iii) Encontre as matrizes $[I]^{\alpha}_{\beta}$ e $[I]^{\beta}_{\alpha}$.

Encontrando $[I]^{\alpha}_{\beta}$:

Teremos que escrever os vetores da base α na base β.

$$\left(1{,}0, -\frac{5}{7}, -\frac{3}{7}\right) = a\left(-\frac{5}{4}, -\frac{3}{4}, 1, 0\right) + b\,, \left(-\frac{1}{4}, \frac{5}{4}, 0, 1\right)$$

Resolvendo, temos pro primeiro vetor da base α que: $a = -\frac{5}{7}\ e\ b = -\frac{3}{7}$, logo:

$$[\left(1{,}0, -\frac{5}{7}, -\frac{3}{7}\right)]_{\beta} = \begin{bmatrix} -\frac{5}{7} \\ -\frac{3}{7} \end{bmatrix}$$

Para o segundo vetor da base α, temos:

$$\left(0{,}1, -\frac{1}{7}, \frac{5}{7}\right) = c\left(-\frac{5}{4}, -\frac{3}{4}, 1, 0\right) + d\,, \left(-\frac{1}{4}, \frac{5}{4}, 0, 1\right)$$

Resolvendo, temos pro segundo vetor da base α que: $c = -\frac{1}{7}\ e\ d = \frac{5}{7}$, logo:

$$[\left(0{,}1, -\frac{1}{7}, \frac{5}{7}\right)]_{\beta} = \begin{bmatrix} -\frac{1}{7} \\ \frac{5}{7} \end{bmatrix}$$

Logo :

$$[\boldsymbol{I}]^{\boldsymbol{\alpha}}_{\boldsymbol{\beta}} = \begin{pmatrix} -\frac{\mathbf{5}}{\mathbf{7}} & -\frac{\mathbf{1}}{\mathbf{7}} \\ -\frac{\mathbf{3}}{\mathbf{7}} & \frac{\mathbf{5}}{\mathbf{7}} \end{pmatrix}$$

E partindo que $[I]^{\beta}_{\alpha} = ([I]^{\alpha}_{\beta})^{-1}$, temos que:

$$[I]^{\beta}_{\alpha} = (\begin{pmatrix} -\frac{5}{7} & -\frac{1}{7} \\ -\frac{3}{7} & \frac{5}{7} \end{pmatrix})^{-1}$$

$$[\boldsymbol{I}]_{\alpha}^{\beta} = \begin{pmatrix} -\frac{5}{4} & -\frac{1}{4} \\ -\frac{3}{4} & \frac{5}{4} \end{pmatrix}$$

2. Considere as bases do IR^2 $\alpha = \{(1,-1),(1,1)\}$ e β tal que $[I]_{\beta}^{\alpha} = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$.

(0.15) i) Encontre a base β.

Sendo $\beta = \{v1, v2\}$.

Utilizando $[I]_{\beta}^{\alpha}$, temos:

$$(1,-1) = 1 * v1 + 2 * v2$$
$$(1,1) = 2 * v1 + 1 * v2$$

Resolvendo o sistema, teremos:
$v1 = \left(\frac{1}{3}, 1\right)$ e $v2 = (\frac{1}{3}, -1)$, logo:

$$\boldsymbol{\beta} = \left\{\left(\frac{1}{3}, 1\right), (\frac{1}{3}, -1), \right\}.$$

(0.15) ii) Encontre $[V]_{\alpha}$, sabendo que $[V]_{\beta} = \begin{bmatrix} 2 \\ -1 \end{bmatrix}$ utilizando uma matriz de mudança de base.

Sabemos que $[V]_{\alpha}$ =$[I]_{\alpha}^{\beta}$. $[V]_{\beta}$, porém não temos $[I]_{\alpha}^{\beta}$, mas temos $[I]_{\beta}^{\alpha}$ e sabemos também que $[I]_{\alpha}^{\beta} = ([I]_{\beta}^{\alpha})^{-1}$.

Encontrando $[I]_{\alpha}^{\beta}$.

$$[I]_{\alpha}^{\beta} = ([I]_{\beta}^{\alpha})^{-1}$$
$$[I]_{\alpha}^{\beta} = (\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix})^{-1}$$

$$[I]_{\alpha}^{\beta} = \begin{pmatrix} -\frac{1}{3} & \frac{2}{3} \\ \frac{2}{3} & -\frac{1}{3} \end{pmatrix}$$

$$[V]_{\alpha} = \begin{pmatrix} -\frac{1}{3} & \frac{2}{3} \\ \frac{2}{3} & -\frac{1}{3} \end{pmatrix} . \begin{bmatrix} 2 \\ -1 \end{bmatrix}$$

$$[\boldsymbol{V}]_{\alpha} = \begin{bmatrix} -\frac{4}{3} \\ \frac{5}{3} \end{bmatrix}$$

(0.2) iii) Encontre $[(2,3)]_\alpha$ utilizando alguma matriz de mudança de base (qualquer uma).

Como temos a liberdade de escolher qualquer uma matriz de mudança de base, escolhi a $[I]_\varepsilon^\alpha$,que representa os vetores da base α, escritos na base canônica $\varepsilon = \{(1,0),(0,1)\}$

Logo,

$$[I]_\varepsilon^\alpha = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix}$$

$Sabendo\ que\ [I]_\alpha^\varepsilon = ([I]_\varepsilon^\alpha)^{-1}$, teremos:

$$[I]_\alpha^\varepsilon = (\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix})^{-1}$$

$$[I]_\alpha^\varepsilon = \begin{bmatrix} \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{bmatrix}$$

e sabemos também que $[(2,3)]_\varepsilon = \begin{bmatrix} 2 \\ 3 \end{bmatrix}$ logo,

$$[(2,3)]_\alpha = [I]_\alpha^\varepsilon . [(2,3)]_\varepsilon$$

$$[(2,3)]_\alpha = \begin{bmatrix} \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{bmatrix} . \begin{bmatrix} 2 \\ 3 \end{bmatrix}$$

$$[(\mathbf{2},\mathbf{3})]_{\boldsymbol{\alpha}} = \begin{bmatrix} -\frac{\mathbf{1}}{\mathbf{2}} \\ \frac{\mathbf{5}}{\mathbf{2}} \end{bmatrix}$$