UNIVERSIDADE FEDERAL DE PERNAMBUCO

Centro de Informática

Álgebra Linear e Vetorial para Computação – 2012.2

Miniprova 1 – 21/12/2012

Emanuel Felipe – efs4

1. Considere o gráfico da função $y = x^2$ e a reta dada parametricamente por: $\begin{cases} x = 2 - t \\ y = -2 + t \end{cases}$, t $\in IR$.

   Encontre:

   (a) Os pontos de interseção da curva com a reta. (0.1)

   Chamaremos a reta de "r" e a função de "f".
   Os pontos de interseção ocorrem quando Xr = Xf e Yr = Yf, então:
   Substituindo a reta na função ficaremos com:

$$y = x^2$$
$$(-2 + t) = (2 - t)^2$$
$$(-2 + t) = 4 - 4t + t^2$$
$$t^2 - 5t + 6 = 0$$

   basta agora encontrarmos os valores de t, substituí-los na equação da reta para então encontrarmos os pontos de interseção.

$$t = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

$$t = \frac{-(-5) \pm \sqrt{5 - 4.(1).(6)}}{2.(1)}$$

   Fazendo as contas aí, teremos: $t = \begin{cases} t' = 3 \\ t'' = 2 \end{cases}$

   Substituindo...

   Para $t = 3$, o ponto será:

   P (-1,1)

   Para $t = 2$, o ponto será:
   Q (0,0)

   b) A distância entre os pontos de interseção. (0.1)

   Só aplicar a fórmula.

$$d(P, Q) = \sqrt{(Xp - Xq)^2 + (Yp - Yq)^2}$$

$$d(P, Q) = \sqrt{(-1 - 0)^2 + (1 - 0)^2}$$

$$\boldsymbol{d(P, Q) = \sqrt{2}}$$

c) O cosseno do (menor) ângulo entre esta reta e o eixo OX? (0.1)

Sendo *u(-1,1)* o vetor diretor da reta *r*, e *v(1,0)* um vetor diretor do eixo OX

Aplicando a fórmula do cosseno temos.

Cos α = $\frac{<u,v>}{||u||.||v||}$

Cos α = $\frac{<(-1,1),(1,0)>}{||(-1,1)||.||(1,0)||}$ => Cos α = $-\frac{1}{\sqrt{2}}$ => Cos α = $-\frac{\sqrt{2}}{2}$, cujo ângulo correspondente é 135º que em relação ao eixo OX esse não é o menor ângulo, o menor ângulo no caso seria o seu suplemento, cujo ângulo é 45º e o cosseno $\frac{\sqrt{2}}{2}$.

$$\boldsymbol{Cos\ \beta = \frac{\sqrt{2}}{2}}$$

2. Considere no espaço a esfera de equação: $(x - \frac{5}{3})^2 + (y - \frac{5}{3})^2 + (z-1)^2 = \frac{50}{9}$.

(a) Encontre as interseções da esfera com os eixos coordenados.(0.35)

As retas dos eixos coordenados são:

OX = $\begin{cases} x = t \\ y = 0 \\ z = 0 \end{cases}$ OY = $\begin{cases} x = 0 \\ y = t \\ z = 0 \end{cases}$ OZ = $\begin{cases} x = 0 \\ y = 0 \\ z = t \end{cases}$

Fazendo a interseção da esfera com o eixo OX teremos:

$$(t - \frac{5}{3})^2 + (0 - \frac{5}{3})^2 + (0-1)^2 = \frac{50}{9}$$

Desenvolvendo, chegaremos a:

$$(t - \frac{5}{3})^2 = \frac{16}{9}$$

Aplicando raiz quadrada aos dois lados ficaremos com:

$$t - \frac{5}{3} = \pm\frac{4}{3}$$

$$t = \begin{cases} t' = 3 \\ t'' = \frac{1}{3} \end{cases}$$

e os pontos de intereseção serão:

OX¹ = $(\mathbf{3, 0, 0})$ e OX² = $(\mathbf{\frac{1}{3}, 0, 0})$

Fazendo a interseção da esfera com o eixo OY teremos:

$$(0 - \frac{5}{3})^2 + (t - \frac{5}{3})^2 + (0 - 1)^2 = \frac{50}{9}$$

Desenvolvendo, chegaremos a:

$$(t - \frac{5}{3})^2 = \frac{16}{9}$$

Aplicando raiz quadrada aos dois lados ficaremos com:

$$t - \frac{5}{3} = \pm\frac{4}{3}$$

$$t = \begin{cases} t' = 3 \\ t'' = \frac{1}{3} \end{cases}$$

e os pontos de intereseção serão:

OY¹ = $(\mathbf{0}, \mathbf{3}, \mathbf{0})$ e OY² = $(\mathbf{0}, \frac{\mathbf{1}}{\mathbf{3}}, \mathbf{0})$

Fazendo a interseção da esfera com o eixo OZ teremos:

$$(0 - \frac{5}{3})^2 + (0 - \frac{5}{3})^2 + (t - 1)^2 = \frac{50}{9}$$

Desenvolvendo, chegaremos a:

$$(t - 1)^2 = 0$$

Aplicando raiz quadrada aos dois lados ficaremos com:

$$t - 1 = 0$$
$$t = 1$$

e os pontos de intereseção serão:

OZ = $(\mathbf{0}, \mathbf{0}, \mathbf{1})$

(b) Das interseções, escolha as três mais afastadas da origem e encontre a área do triângulo assim determinado.(0.35)

Da letra anterior temos que os pontos mais distantes dos eixos OX, OY e OZ são (3,0,0),(0,3,0) e (0,0,1) respectivamente.

Para calcularmos a área do triângulo determinado apartir dos seus vértices, escolheremos dois vetores, encontraremos o produto vetorial entre esses vetores e metade do módulo desse vetor resultante nos dará a área do então triângulo.

$$\acute{A}rea = \frac{||ABxAC||}{2}$$

Calculando os vetores:

AB = (0,3,0) – (3,0,0) = (-3,3,0)

AC = (0,0,1) –(3,0,0) = (-3,0,1)

$$ABxAC = \begin{pmatrix} \hat{\imath} & j & k \\ -3 & 3 & 0 \\ -3 & 0 & 1 \end{pmatrix} = 3\hat{\imath} + 3j + 9k$$

Logo, o vetor resultante desse produto vetorial é $ABxAC = (3,3,9)$ e metade do módulo desse vetor nos dará a área, então:

$$\boldsymbol{\acute{A}rea = \frac{||ABxAC||}{2} = \frac{\sqrt{3^2 + 3^2 + 9^2}}{2} = \frac{\sqrt{99}}{2} = \frac{3\sqrt{11}}{2}}$$