UNIVERSIDADE FEDERAL DE PERNAMBUCO

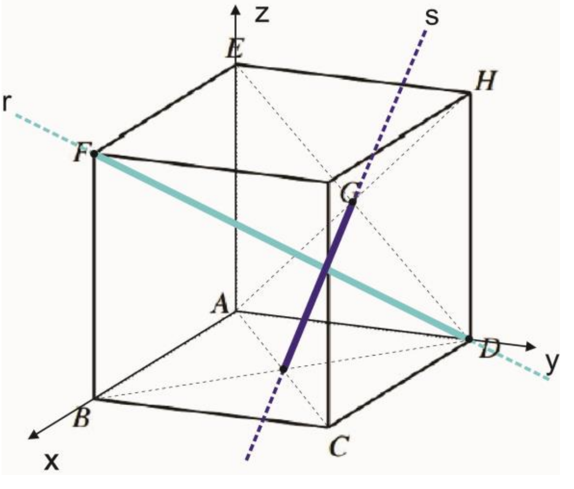
Centro de Informática

Álgebra Vetorial e Linear para Computação – 2012.2

Miniprova 2 – 25/01/2013

Emanuel Felipe – efs4

1. Considere o cubo da figura abaixo, que possui aresta de tamanho 2. (0.5)



Seja r a reta que passa pelos pontos *F* e *D*, e s a reta que passa pelos pontos centrais das faces AEHD e ABCD. Encontre $d(r,s)$.

Aproveitando a imagem da questão, criaremos um sistema de coordenadas onde o vértice A, será a origem e como dito na questão suas arestas terão tamanho 2, logo a posição de todos os vértices no nosso sistema será.

$A = (0,0,0)$
$B = (2,0,0)$
$C = (2,2,0)$
$D = (0,2,0)$
$E = (0,0,2)$
$F = (2,0,2)$
$G = (2,2,2)$
$H = (0,2,2)$

Traçando as retas r e s a imagem do início, basta descobrirmos suas equações e então a distância entre elas.

Equação da reta r.

Vetor diretor da reta:

$v = DF = (2,0,2) - (0,2,0) = (\mathbf{2}, -\mathbf{2}, \mathbf{2})$

E escolhendo um dos pontos teremos:

Escolhi o ponto F.

$$r = \begin{cases} x = 2t + 2 \\ y = -2t + 0 \\ z = 2t + 2 \end{cases}$$

Mesmo esquema para a reta s, só que antes teremos que encontrar os pontos centrais das faces AEHD e ABCD.
Como temos um cubo, fica fácil perceber que os pontos centrais de AEHD e ABCD são (0,1,1) e (1,1,0), respectivamente.

Encontraremos agora uma reta que passa pelos pontos centrais.
Seja, P = (0,1,1) e Q = (1,1,0)
Vetor diretor w.

$$w = QP = (0{,}1{,}1) - (1{,}1{,}0) = (\mathbf{-1}, \mathbf{0}, \mathbf{1})$$

Temos o vetor diretor e o ponto P, então:

$$s = \begin{cases} x = -1q + 0 \\ y = 0q + 1 \\ z = 1q + 1 \end{cases}$$

Verificando a relação entre as retas.

1) Verificar se são paralelas..

$w = k.v\,, com\ k \in IR$ (?)
(-1,0,1) = k (2,-2,2)

Percebemos claramente que não existe nenhum valor pra k que satisfaz tal situação, logo elas não são paralelas.

2) Verificar se são concorrentes.

$$r \cap s = \begin{cases} -1q + 0 = 2t + 2 \ \ (I) \\ 0q + 1 = -2t + 0\ (II) \\ 1q + 1 = 2t + 2 \ \ (III) \end{cases}$$

Da segunda linha II, temos que $t = -\frac{1}{2}$, substituindo-o agora nas equações I e III, teremos:
(I): q = -1
(III): q = 0

Como q assume dois valores distintos, temos então que é um sistema impossível e consequentemente que as retas não são concorrentes.

3) Verificar se são reversas.
Como elas não são nem paralelas e nem concorrentes, elas são reversas.

a) Encontrar um vetor ortogonal as duas retas.

$$w\ X\ v = \begin{vmatrix} i & j & k \\ -1 & 0 & 1 \\ 2 & -2 & 2 \end{vmatrix} = 2\,i + 4j + 2\,k$$

$\boldsymbol{Q} = (\mathbf{2}, \mathbf{4}, \mathbf{2})$

b)Determinar um plano que contenha uma das duas retas.
O plano que contém a reta r.
Tudo que precisamos é um vetor ortogonal ao plano, no caso Q = (2,4,2) , e um ponto qualquer da reta, no caso F = (2,0,2).

$$\beta: 2(x-2) + 4(y-0) + 2(z-2) = 0$$
$$\boldsymbol{\beta} : \mathbf{2x} + \mathbf{4y} + \mathbf{2z} - \mathbf{8} = \mathbf{0}$$

c)Fazer a distância entre uma reta e um plano.

Pegaremos agora um ponto qualquer da reta s e faremos a distância desse ponto ao plano, que será então a distância entre as retas reversas.

Ponto da reta s: $P = (0,1,1)$

E conhecendo a fórmula da distância entre ponto e plano:

$$d(\beta, P) = \frac{|ax+by+cz+d|}{\sqrt{a^2+b^2+c^2}} = \frac{|2(0)+(4)(1)+(2)(1)+(-8)|}{\sqrt{2^2+4^2+2^2}} = \frac{|-2|}{\sqrt{24}} = \frac{2}{2\sqrt{6}} = \frac{1}{\sqrt{6}}$$

$$\boldsymbol{d(\beta, P)} = \frac{\mathbf{1}}{\sqrt{\mathbf{6}}}$$

2. Seja Ɛ a esfera de equação $(x - 2)^2 + (y + 1)^2 + (z - 1)^2 = 9$. Encontre as equações cartesianas dos planos paralelos ao plano π: $4x - 3z = 48$, e que sejam tangentes a Ɛ. Quais são as distâncias entre estes três planos? (0.5)

Das equações extraímos:

$$\varepsilon = \begin{cases} Centro = (2,-1,1) \\ Raio = 3 \end{cases}$$

$$\pi = \{Vetor\ Ortogonal = (4,0,-3)$$

Encontraremos uma reta que passa pelo centro da esfera e que seja ortogonal ao plano π.

$$Reta\ k: \begin{cases} x = 4t + 2 \\ y = 0t - 1 \\ z = -3t + 1 \end{cases}$$

Faremos a intereseção da reta com a esfera, e os pontos encontrados serão os ponto que usaremos para determinar as equações cartesianas dos planos tangentes a esfera e paralelos a π.

$$\varepsilon \cap k: \left((4t+2)-2\right)^2 + \left((0t-1)+1\right)^2 + \left((-3t+1)-1\right)^2 = 9$$

$$\mathcal{E} \cap\ k: (4t)^2 + (0)^2 + (3t)^2 = 9$$

$$\mathcal{E}\ \cap\ k: 25t^2 = 9$$

$$\mathcal{E}\ \cap\ k: \boldsymbol{t} = \pm\frac{\mathbf{3}}{\mathbf{5}}$$

Substituindo o valor de t na equação da reta para então descobrirmos os pontos de interseção.

$$P' = \begin{cases} x = 22/5 \\ y = -1 \\ z = -4/5 \end{cases}$$

$$P'' = \begin{cases} x = -2/5 \\ y = -1 \\ z = 14/5 \end{cases}$$

Descobrindo os planos que são tangentes a esfera.

1) $\delta :\ 4\left(x - {}^{22}/_{5}\right) - 3\left(z + {}^{4}/_{5}\right) = 0$
2) $\varphi:\ 4\left(x + {}^{2}/_{5}\right) - 3\left(z - {}^{14}/_{5}\right) = 0$

Determinado os planos, determinaremos a distância entre eles.

Como $\varphi\ e\ \delta$ são tangentes, a distância entre eles é o diâmetro da esfera.

1) $d\ (\varphi, \delta)\ =\ 6.$

   Pegaremos um ponto do plano δ, e então acharemos a distância:

2) $d\ (\pi, \delta) = \frac{\left|4\left(\frac{22}{5}\right) - 3\left(-\frac{4}{5}\right) - 48\right|}{\sqrt{4^2 + 0^2 + (-3)^2}} = \frac{|-28|}{5} = \frac{\mathbf{28}}{\mathbf{5}}$

   Pegaremos um ponto do plano δ, e então acharemos a distância:

3) $d\ (\pi, \varphi) = \frac{\left|4\left(\frac{-2}{5}\right) - 3\left(\frac{14}{5}\right) - 48\right|}{\sqrt{4^2 + 0^2 + (-3)^2}} = \frac{|-58|}{5} = \frac{\mathbf{58}}{\mathbf{5}}$