IF-705 – Automação Inteligente
Redes de Funções de Base Radial

Aluizio Fausto Ribeiro Araújo
Universidade Federal de Pernambuco
Centro de Informática - CIn
Departamento de Sistemas da Computação
aluizioa@cin.ufpe.br

UFPE

Centro de Informática
UFPE

Conteúdo

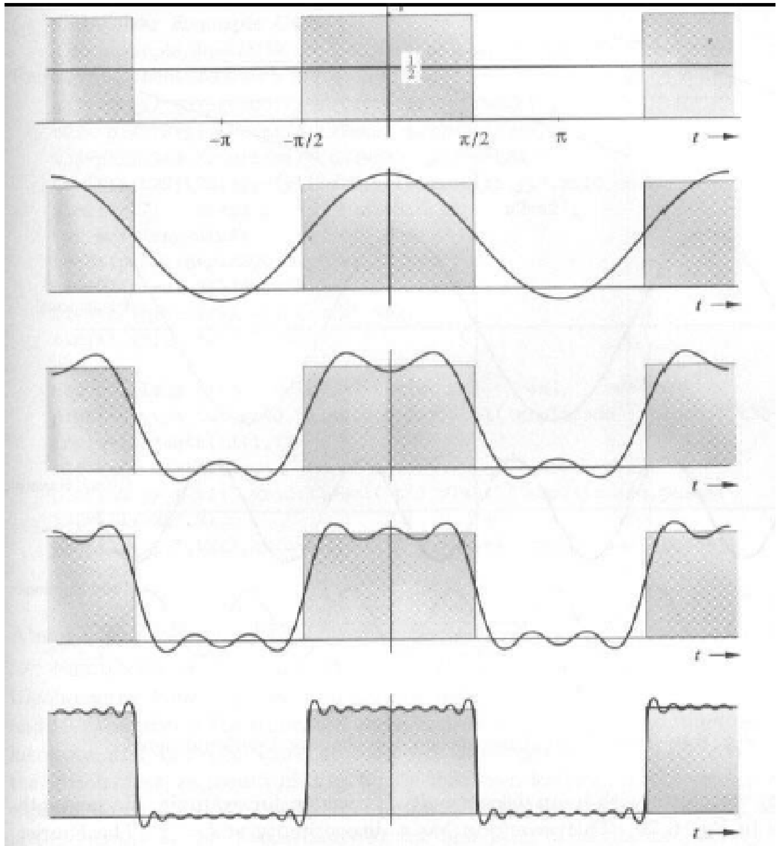
- Introdução
- Histórico
- Redes de Função de Base Radial
- Aprendizagem em Redes RBF
- Desempenho das Redes RBF

Introdução

- Este capítulo trata de redes neurais com múltiplas camadas que não são treinadas por retropropagação (*backpropagation*) e que não têm unidades de processamento com função de ativação do tipo sigmoidal.
- Estas redes utilizam unidades com campos receptivos locais (*local receptive fields*), nos quais as unidades que recebem diretamente estímulos de entrada podem responder apenas a parte destas entradas.
- Esta abordagem emprega, na maioria dos casos, treinamento supervisionado e não-supervisionado.
- As redes são muito usadas como interpoladores/ aproximadores e em tarefas de classificação.

Introdução

- Construtores de funções complexas a partir de funções simples:
  - Série de Fourier
  - Transformada de Fourier
  - Transformada Wavelet
  - Redes RBF

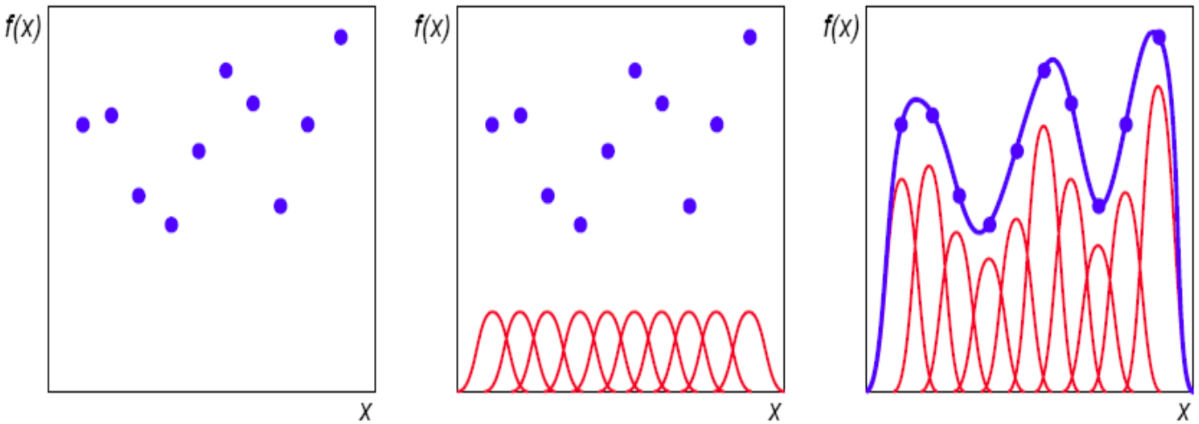


Centro de Informática
UFPE

Introdução

- Redes RBF têm suas origens em técnicas para realizar interpolação exata de funções (Bishop, 1995).
- Abordagem RBF (Powell, 1987):
  - Empregue um conjunto de *N* funções de base, não-lineares, para calcular a função:

$$h(\mathbf{X}) = \Sigma_i w_i \Phi(\|\mathbf{X}-\mathbf{\Lambda}_i\|).$$



Histórico

- Esta abordagem é inspirada na propriedade de alguns neurônios biológicos chamada de resposta localmente sintonizada (*locally tuned response*). Tais células nervosas respondem seletivamente a um intervalo finito do espaço de sinais de entrada.
- Aprendizagem envolve encontrar uma superfície em um espaço de dimensão qualquer que produza o melhor ajuste (represente da melhor maneira) os dados de treinamento.

Histórico

- O primeiro trabalho lidando com funções de base radial foi introduzido por Medgassy (1961) cujos resultados foram posteriormente usados para interpolação (Micchelli, 1986; Powell, 1987), para estimação de densidade (Parzen, 1962; Duda e Hart, 1973; Specht, 1990) e para aproximação de funções multivariadas suaves (*smooth multivariate functions*) (Poggio and Girosi, 1989).

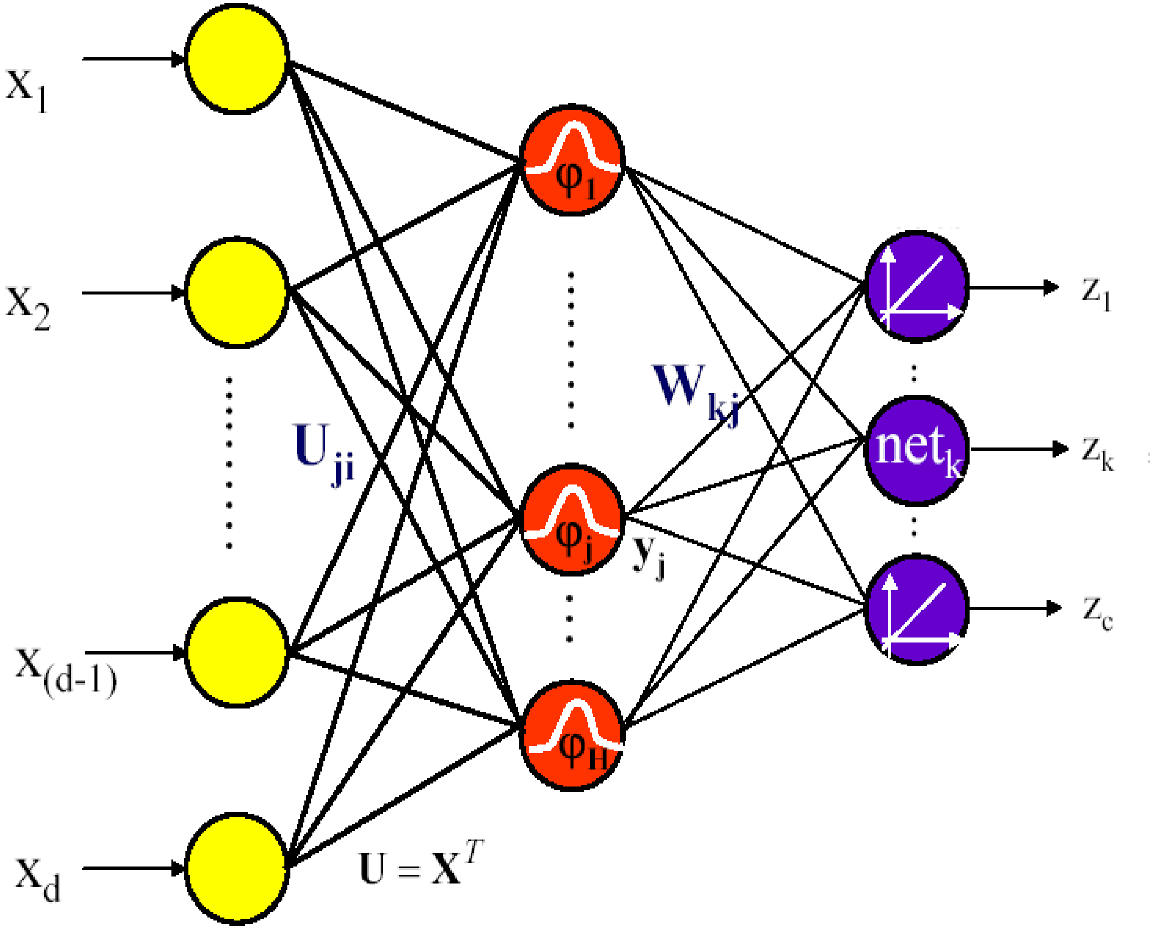
Histórico

- Atualmente, os modelos de RBF se diferenciam dos primeiros pois são de natureza adaptativa que permite a utilização, em muitas situações, de um número relativamente menor de unidades de processamento localmente sintonizadas.
- Redes RBF foram independentemente propostas por Broomhead e Lowe (1988), Lee e Kil (1988), Niranjan e Fallside (1988) e Moody e Darken (1989a, 1989b). Outros esquemas similares foram introduzidos por Hanson e Burr (1987), Lapedes e Faber (1987), Casdagli (1989), Poggio e Girosi (1990b), entre outros.

Rede de Função de Base Radial - RBF

- As redes RBF são redes de alimentação direta (*feedforward*) consistindo tipicamente de três camadas: entrada, escondida e saída.
- Camada de entrada: propaga os estímulos.
- Camada escondida: unidades de processamento localmente sintonizáveis .
- Camada de saída: unidades de processamento lineares.

Redes RBF: Arquitetura e Funções



Redes RBF: Processamento

- Unidades escondidas recebem o vetor de entrada
- Camada de entrada: propaga os estímulos.
- Camada escondida: unidades de processamento localmente sintonizáveis .

$$y_j(\mathbf{x}_p) = F_j\left(\mathbf{x}_p, \boldsymbol{\mu}_j, \sigma_j\right)$$

onde $F_j(\cdot)$ é uma função de base radial,

$\boldsymbol{\mu}_j$ é o j-ésimo centro e

σ_j é a largura do campo receptivo para o centro.

Redes RBF: Processamento

- Camada de saída: unidades de processamento lineares.

$$z_l(\mathbf{x}_p) = \sum_{j=1}^{H} w_{lj} y_j(\mathbf{x}_p)$$

onde w_{lj} é o peso entre a unidade escondida j e a de saída l.

- Redes RBF realizam aproximação de uma função por superposição de funções de base radial não-ortogonais que têm forma de sino. O grau de precisão pode ser controlado por três parâmetros: o número de funções de base usadas, sua localização e sua largura do campo receptivo.

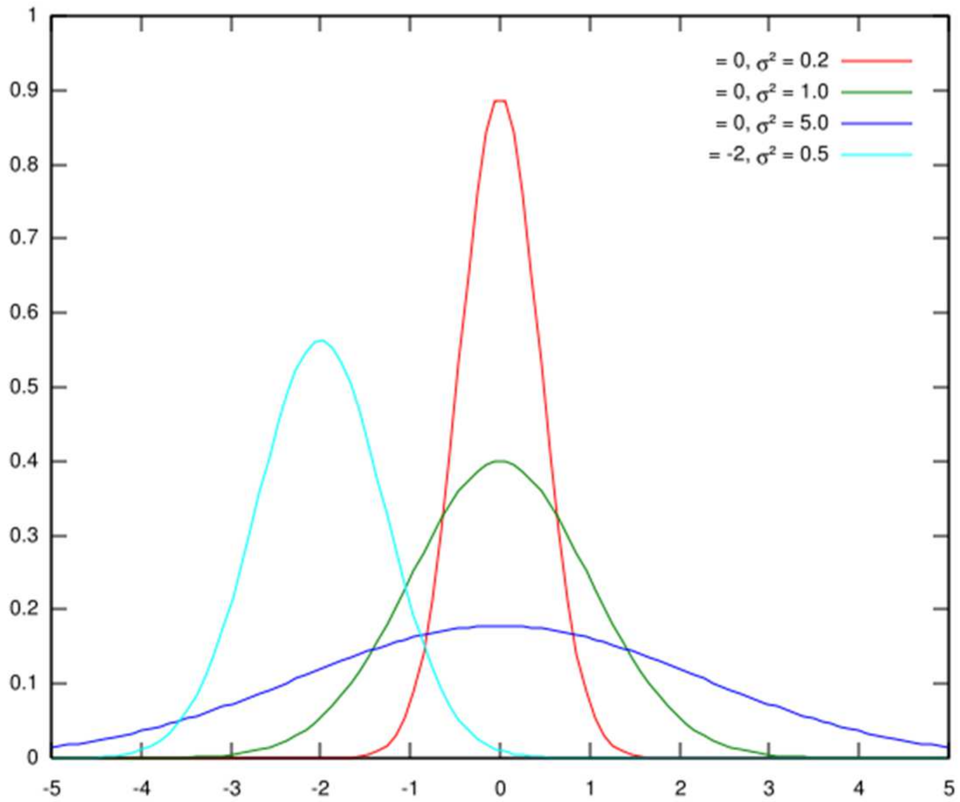
Redes RBF: Função de Base

- Função Gaussiana

$$y_j(\mathbf{x}_p) = \exp\left(-\frac{(\mathbf{x}_p - \boldsymbol{\mu}_j)^2}{2\sigma_j^2} \right), \text{onde}$$

$\boldsymbol{\mu}_j$ é o j-ésimo centro e

σ_j é a largura do campo receptivo.



Centro de Informática
UFPE

Redes RBF: Função de Saída

- Função Linear nas Unidades de Saída

$$z_k(\mathbf{x}_p) = f(net_k) = f\left(\sum_{j=1}^{H} w_{kj} y_j\right) = \sum_{j=1}^{H} w_{kj} y_j \text{, onde}$$

H é o númeo de unidades escondidas

w_{kj} é o peso entra as unidades j e k.

Aprendizagem em Redes RBF

- O método de treinamento deve reduzir o erro na saída a valores aceitáveis por adaptação dos parâmetros livres na rede RBF: centros, larguras dos campos receptivos e pesos entre camada escondida e de saída. A aprendizagem pode ser supervisionada, não-supervisionada ou combinada.
- O treinamento que combina <u>aprendizagem não-supervisionada</u> (ANS) com <u>aprendizagem supervisionada</u> (AS) é o mais comum pois não se sabe as saídas desejadas para a camada escondida.
  - ANS determina centros e campos receptivos da camada escondida.
  - AS determina os valores dos pesos entre as camadas escondida e de saída, considerando constantes os parâmetros já definidos.

Aprendizagem em Redes RBF

- **Treinamento Não-supervisionado**
  - Os centros são selecionados para se casar com a distribuição dos exemplos de treinamento no espaço de características de entrada.
  - Os valores dos centros podem ser determinados por (a) seleção aleatória; (b) distribuição sobre uma grade regular; (c) técnica de agrupamento (*clustering*); (d) estimação da densidade; ou (e) outro algoritmo.
  - As larguras dos campos receptivos são determinadas empregando (a) distância euclidiana média entre centros; (b) distância euclidiana entre centro e vetor de entrada; (c) distância euclidiana entre centros; ou (d) distância euclidiana entre os centros determinados pelo método k-médias.

Treinamento Não-supervisionado

- Determinação do centro por seleção aleatória :
  - Os centros são vetores de entrada aleatoriamente selecionados. Eles devem representar todo o espaço de soluções do problema. Este método é simples e direto, no entanto pode exigir grande número de unidades intermediárias, escolher centros muito próximos uns dos outros e podem acarretar funcionamento inadequado da rede.
- Determinação do centro por grade regular:
  - Os centros são fixados em uma grade regular, cobrindo todo o espaço de entrada. Em geral, método exige muitas unidades intermediárias para vetores de entrada com dimensão alta causando crescimento exponencial do número das unidades escondidas).

Treinamento Não-supervisionado

- Determinação do centro por agrupamento:
  - Algoritmo das k-médias: Divide os padrões de treinamento em grupos, encontrando o ponto central de cada um deles:

$$\boldsymbol{\mu}_j = \frac{1}{nv_j} \sum_{\mathbf{x}_p \in S_i} \mathbf{x}_p$$

onde nv_j é o número de vetores contido no agrupamento S_j.

  - Mapas Auto-organizáveis (SOMs) agrupam padrões espacialmente próximos que compartilhem micro-características. No início, os centros são aleatoriamente atribuídos. O centro que resultar maior produto escalar com um vetor de entrada adiciona uma versão ponderada deste vetor de entrada ao seu grupo .

Treinamento Não-supervisionado

- Determinação do centro por estimação de diversidade:
  - A posição dos centros podem ser determinadas através de modelagem da densidade do espaço de características com um modelo de misturas de gaussianas empregando o algoritmo de maximização da expectativa.
  - Os parâmetros de espalhamento para cada centro são automaticamente obtidos das matrizes de covariância dos componentes gaussianos correspondentes.

Treinamento Não-supervisionado

- Determinação da largura do campo receptivo por distância euclidiana média entre centros:

$$\sigma = \frac{1}{ng} \sum_{j=1}^{ng} \left\| \boldsymbol{\mu}_j - \boldsymbol{\mu}_{j(mprox)} \right\|$$

onde $\boldsymbol{\mu}_{j(mprox)}$ é o centro com menor distância euclideana para $\boldsymbol{\mu}_j$.

ng é o número de grupos que serão formados.

- Determinação da largura do campo receptivo por distância euclidiana entre centro e vetor de entrada:

$$\sigma_j^2 = \frac{1}{nv} \sum_{\mathbf{x}_p \in \Psi_j} \left\| \boldsymbol{\mu}_j - \mathbf{x}_p \right\|^2$$

onde Ψ_j é o conjunto dos *nv* vetores mais próximos a $\boldsymbol{\mu}_j$.

Treinamento Não-supervisionado

- Determinação da largura do campo receptivo por distância euclidiana entre centros:

$$\sigma = \alpha \left\| \boldsymbol{\mu}_j - \boldsymbol{\mu}_{j(mprox)} \right\|$$

onde $1 \leq \alpha \leq 1{,}5.$

- Determinação da largura do campo receptivo por distância euclidiana entre os centros determinados pelo método k-médias:

$$\sigma_j^2 = \frac{1}{na} \sum_{\mathbf{x}_p \in S_j} \left\| \boldsymbol{\mu}_j - \mathbf{x}_p \right\|^2$$

onde S_j é o agrupamento contendo na vetores de entrada.

Aprendizagem em Redes RBF

- **Treinamento Supervisionado**
  - Os pesos entre a camada escondida e a de saída são calculados de modo a minimizar o erro entre a saída desejada e a saída obtida.
  - Os pesos são determinados por um método que resolva o problema de minimização do erro: (a) método dos mínimos quadrados; (b) método da regra delta; ou (c) matriz pseudo-inversa.

Treinamento Supervisionado

- Esta etapa compreende a determinação dos pesos entre a camada escondida e a de saída. Inicia-se pelo cálculo do erro que é função da resposta dada pela rede comparada com a resposta que se deseja dela. Há algumas maneiras de calcular o erro.
  - Soma dos erros quadráticos (SSE – sum of squared error)

$$SSE = \sum_{j=1}^{npad} \left\| \mathbf{y}_d^{(i)} - \mathbf{y}_o^{(i)} \right\|^2$$

  - Erro quadrático médio (MSE - mean squared error)

$$MSE = \frac{1}{npad} \sum_{j=1}^{npad} \left\| \mathbf{y}_d^{(i)} - \mathbf{y}_o^{(i)} \right\|^2$$

UFPE

Centro de Informática UFPE

Treinamento Supervisionado

– Erro relativo médio (MRE – mean relative error)

$$MRE = \frac{1}{npad} \sum_{j=1}^{npad} \left\| \frac{\mathbf{y}_d^{(i)} - \mathbf{y}_o^{(i)}}{\mathbf{y}_d^{(i)}} \right\|^2$$

– Raiz do erro quadrático médio (RMSE – root mean squared error)

$$RMSE = \sqrt{\frac{1}{npad} \sum_{j=1}^{npad} \left\| \mathbf{y}_d^{(i)} - \mathbf{y}_o^{(i)} \right\|^2}$$

onde $\mathbf{y}_d^{(i)}$ e $\mathbf{y}_o^{(i)}$ são o i-ésimo padrão desejado e o obtido e $npad$ é o número total de padrões.

- Depois de calculado o erro, este é minimizado por procedimentos tais como a regra delta, o método dos mínimos quadrados, e a matriz pseudo-inversa (os dois últimos, métodos lineares).

Estratégias de Treinamento

- Busca-se o compromisso entre precisão e generalização. Para tal, duas estratégias de treinamento podem ser empregadas: *hold-out* e validação cruzada (*crossvalidation*).
  - *Hold-out*: O conjunto de padrões é dividido em três grupos: treinamento, validação e teste. Cada topologia com seus centros tem seu desempenho testado com respeito aos três conjuntos.
  - *Crossvalidation*: Todos os padrões (em geral poucos) são considerados para treinamento. Assim, divide-se os padrões em *ng* grupos, seleciona-se aleatoriamente *ng*-1 conjuntos para treinamento e testa-se a rede com o conjunto não selecionado. Repete-se o processo até todos os conjuntos serem usados para testes. A partir daí, calcula-se o erro (*E*).

$$E = \frac{1}{ng}\sum_{j=1}^{ng} E_i^{\,2}$$

Centro de Informática UFPE

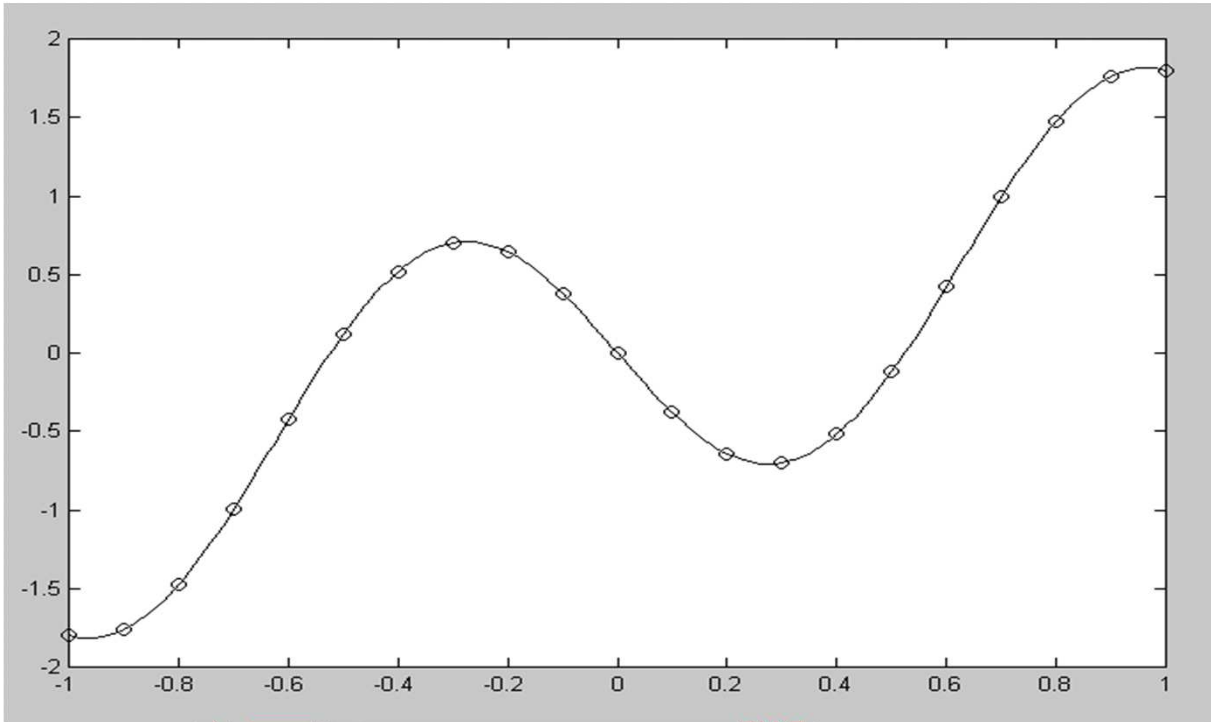
U F P E

Desempenho das Redes RBF

- As redes RBF foram aplicadas com sucesso na aproximação de funções (Broomhead e Lowe, 1988; Lee e Kil, 1988; Casdagli, 1989; Moody e Darken, 1989a, 1989b) e em problemas de classificação (Nirajan e Fallside, 1988; Nowlan, 1990; Lee, 1991; Wettschereck e Dieterich, 1992; Vogt, 1993).
- Em tarefas difíceis de aproximação/interpolação (por exemplo, predição da série caótica de Mackey-Glass T instantes de tempo no futuro, T>50), redes RBF que empregam a técnica de agrupamento no posicionamento dos campos receptivos podem alcançar desempenho comparável ao das redes MÇP-BP, enquanto requerem tempo de treinamento algumas ordens de grandeza menor.

Exemplo de Emprego de Redes RBF

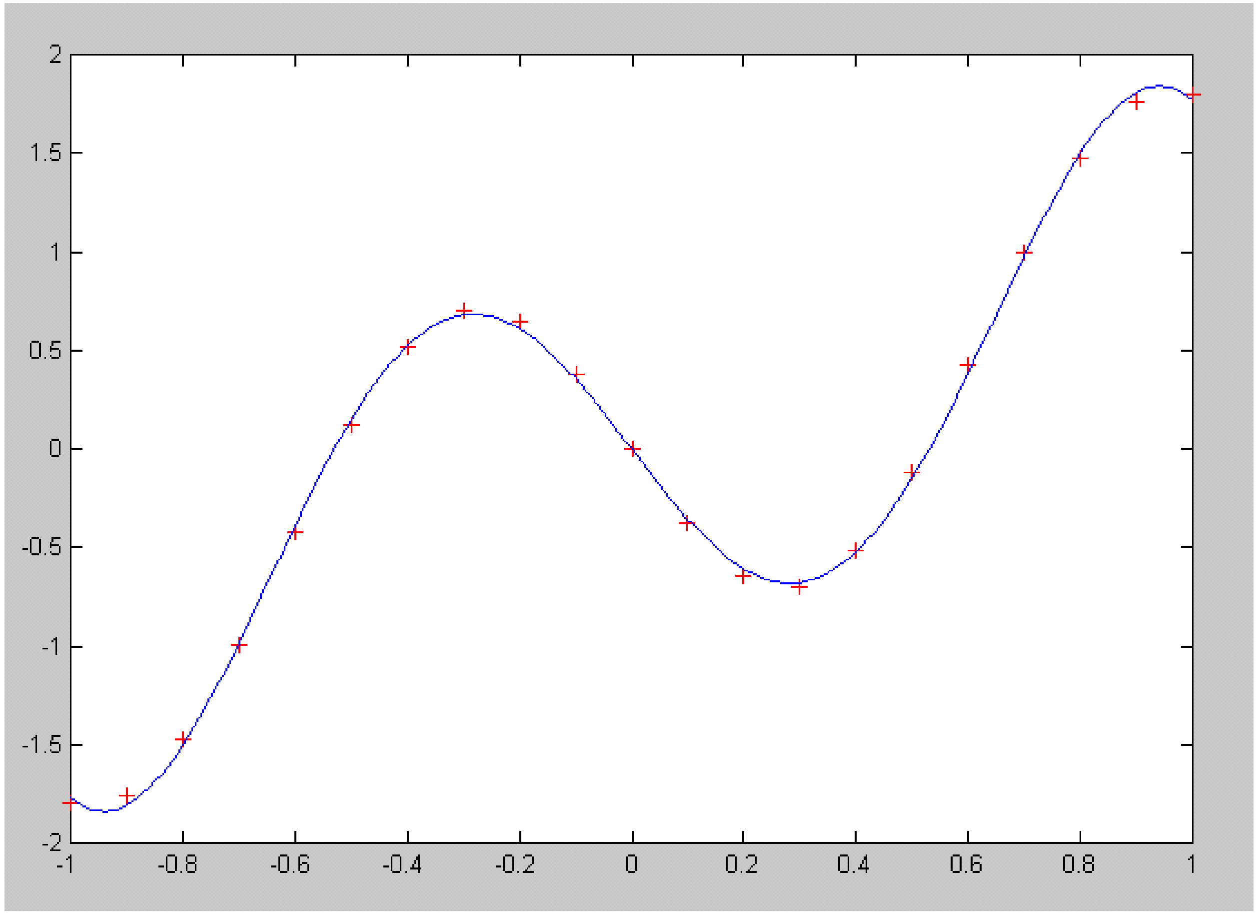
- Rede RBF para aproximar uma função e verificar papel dos parâmetros livres (os campos receptivos) afetam seu desempenho.
- A função: $y = f(x) = sen(x) - sen(5x)$ (Figura 1). Apresentam-se à rede 21 pares X-Y (círculos) onde X é a entrada e Y é sua saída desejada.



Exemplo de Emprego de Redes RBF

- A rede utilizada é composta por uma unidade de entrada, que recebe o valor de X, 21 unidades escondidas fixas (com centros localizados sobre os valores de entrada, que estão igualmente espaçados, ou seja, os centros estão fixados em uma “grade” regular) e uma unidade linear de saída, que produz o valor de Y. Os pesos da primeira camada são unitários e fixos e os pesos da segunda camada serão ajustados no treinamento. O erro será calculado pela função SSE.
- Depois de treinada, a rede aproxima a função dada com boa precisão e poderia ser utilizada para interpolação. O resultado está no gráfico da Figura 2, onde a linha cheia representa a saída da rede para 201 valores de entrada e as cruzes representam os 21 pontos apresentados à rede durante o treinamento.

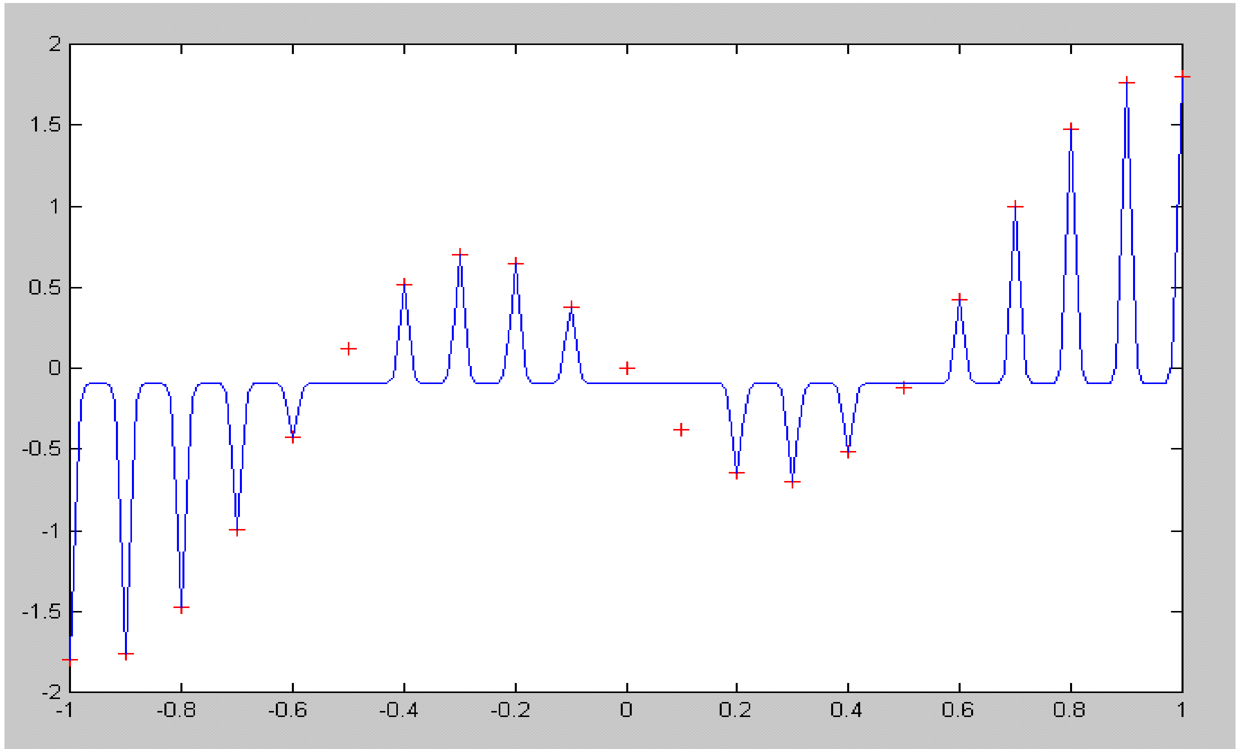
Exemplo de Emprego de Redes RBF



Centro de Informática UFPE

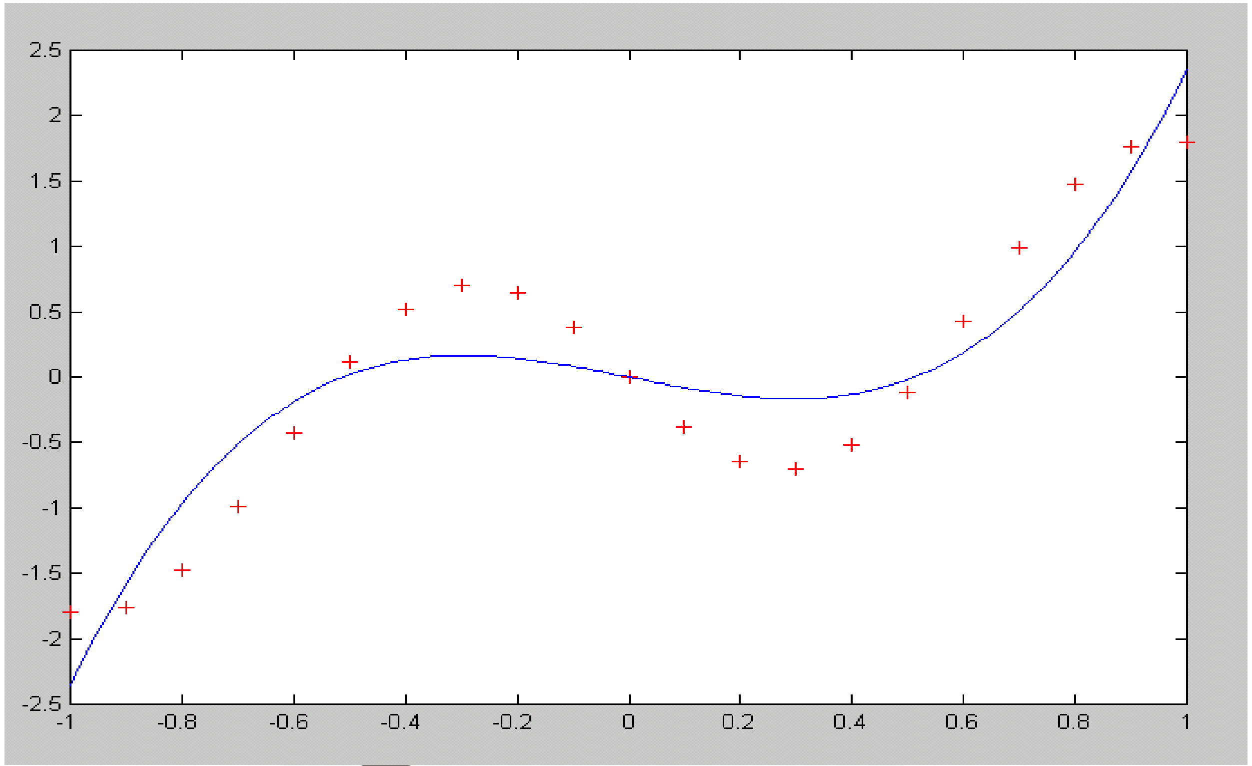
Exemplo de Emprego de Redes RBF

- Considere mesma rede anterior mas os campos receptivos são muito menores. Na Figura abaixo a linha cheia representa a saída da rede para 201 pontos de entrada e as cruzes representam os 21 pontos utilizados durante o treinamento da rede.



Exemplo de Emprego de Redes RBF

- Considere a mesma rede com campos receptivos muito grandes. O resultado visto na Figura abaixo onde linha cheia representa a saída da rede para 201 pontos de entrada e as cruzes representam os 21 pontos utilizados de treinamento.



Referências

- Hassoun, M. H. (1995). *Fundamentals of Artificial Neural Networks*. Cambridge: The MIT Press.
- Haykin, S. O. (2009). *Neural Networks and Learning Machines*. McMaster University, Ontario Canada, 3rd ed.