

- 
- 
- 
- 
- 

# IF-705 – Automação Inteligente

## Sistemas Nebulosos

Aluizio Fausto Ribeiro Araújo  
Universidade Federal de Pernambuco  
Centro de Informática - CIn  
Departamento de Sistemas da Computação  
aluizioa@cin.ufpe.br



- 
- 
- 
- 
-

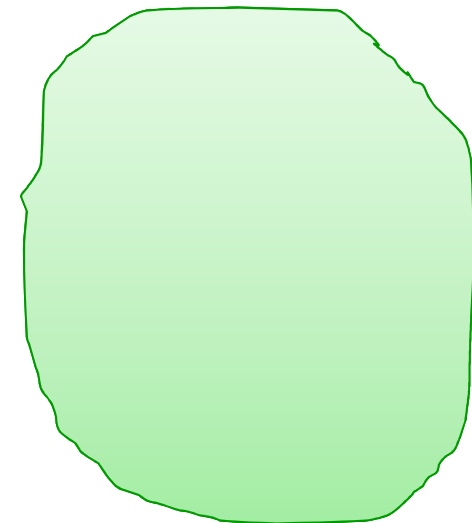
# Conteúdo

- Introdução
- Teoria dos Conjuntos Difusos
  - Conceitos Fundamentais
  - Operações Básicas em Conjuntos Nebulosos
- Lógica Nebulosa
- Funções de Pertinência
- Sistemas Nebulosos
- Exemplo



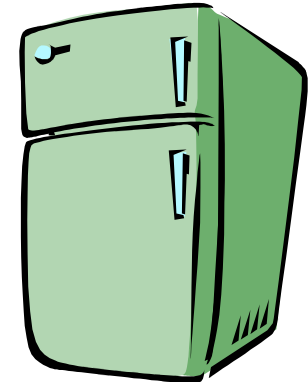
# Introdução

- Probabilidade versus Nebulosidade: Se alguém pensa sobre um objeto de forma qualquer (círculo, quadrado ou triângulo). Qual seria a afirmação mais precisa:
  - Isto é provavelmente um círculo.
  - Isto é um círculo nebuloso.



# Introdução

- Probabilidade versus Nebulosidade: Duas situações que são similares, mas diferentes:
  - Há 50% de chance de existir uma maçã no refrigerador;
  - Existe metade de uma maçã no refrigerador.



# Introdução

- Paradoxo do barbeiro de Sevilha (Bertrand Russel, 1901):
  - Há em Sevilha um barbeiro que reúne as duas condições seguintes:
    - Faz a barba de todas pessoas de Sevilha que não fazem a barba a si próprias.
    - Só faz a barba a quem não faz a barba a si próprio.
  - Considere então que:
    - Se o barbeiro não se barbeia sozinho, então ele deve fazer sua própria barba, tornando-se um homem que se barbeia sozinho.
    - Se o barbeiro se barbeia sozinho, então ele deve parar de fazer a própria barba, tornando-se um homem que não se barbeia só.



# Introdução

- Paradoxo de Sorites (monte em grego):
  - Premissa 1: Um milhão de grãos de areia formam um monte;
  - Premissa 2: Um monte menos um grão é um monte;
  - Quantos grãos de areia precisam sair para não ser um monte?
- Não há separação clara entre o que é um monte e o que não é um monte.



Monte de areia

0



- 
- 
- 
- 
- 

# Teoria dos Conjuntos Nebulosos (Fuzzy)



- 
- 
- 
- 
-

# Conceitos Fundamentais

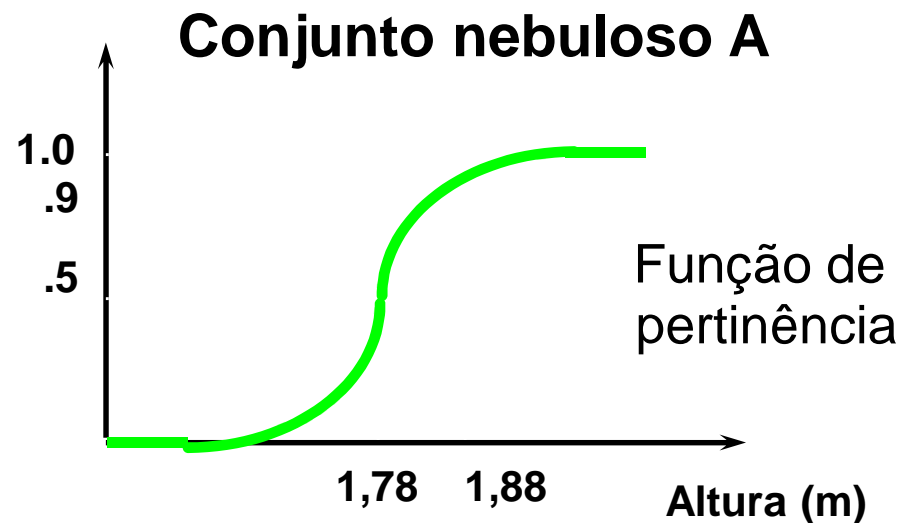
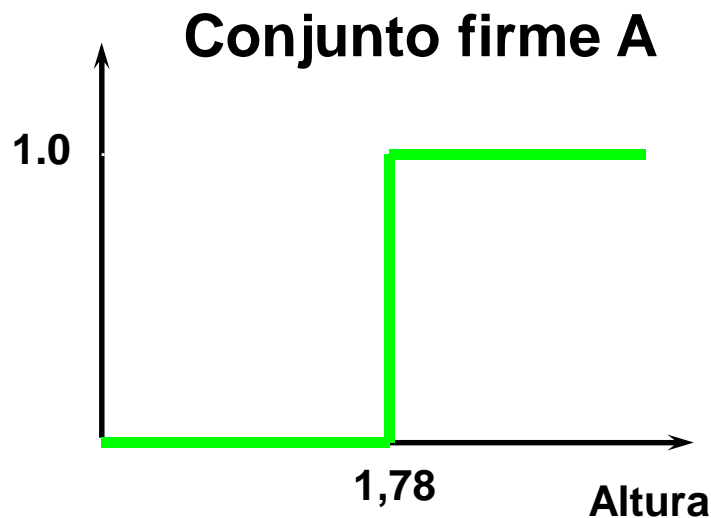
- Conjuntos nebulosos são uma extensão da teoria de conjuntos firmes (*crisps*) aplicada a conjuntos com elementos que não possuem uma definição precisa.
- Todas as operações realizadas com conjuntos podem ser realizadas em conjuntos nebulosos.
- A teoria de conjuntos nebulosos por si é um campo gigantesco de estudos que inclui: Teoria das medidas nebulosas; topologia nebulosa; álgebra nebulosa; análise nebulosa, etc.



# Conceitos Fundamentais

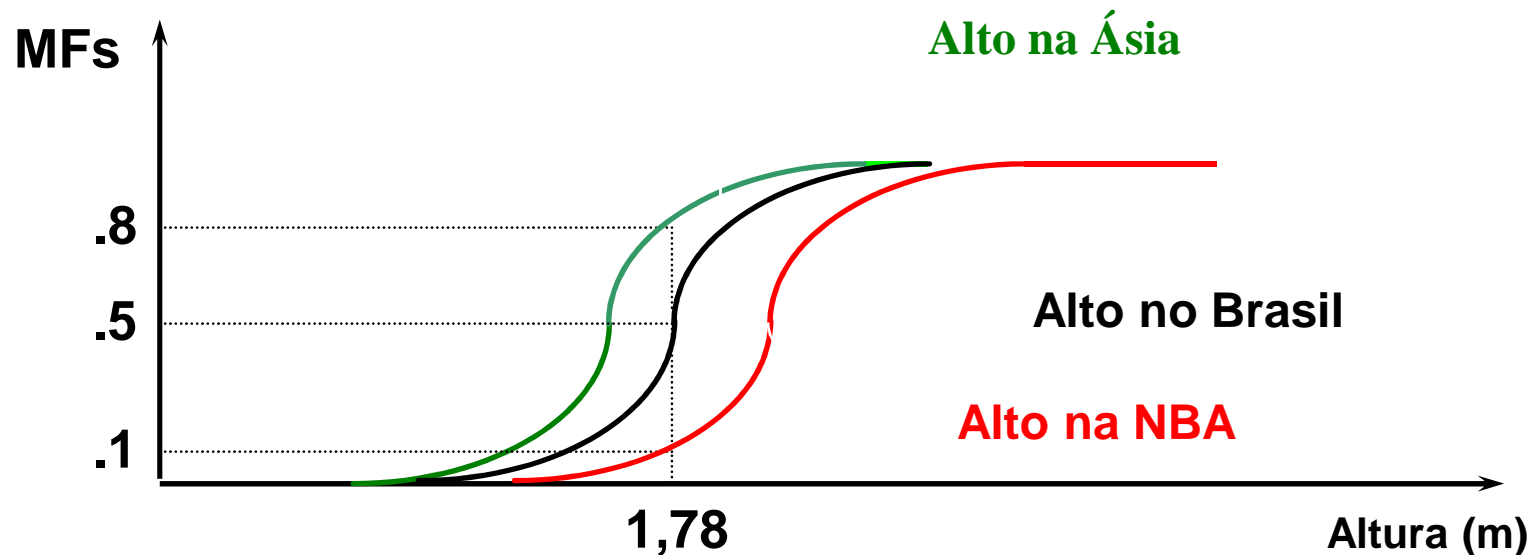
- Conjuntos com fronteiras nebulosas

**A = conjunto de pessoas altas**



# Conceitos Fundamentais

- Funções de pertinência (NFs), características:
  - Medidas subjetivas;
  - Não são funções de probabilidade.



# Conceitos Fundamentais

- Seja  $U$  o conjunto universo, então
  - Um conjunto nebuloso  $A$  em  $U$  é caracterizado por uma função de pertinência  $\mu_A(x)$  com valores no intervalo  $[0,1]$  para um dado elemento  $x$ .
  - Esta é uma generalização da noção normal de conjunto, onde um elemento  $x$  está (1) ou não está (0) em um conjunto.

# Conceitos Fundamentais

- Um conjunto nebuloso  $A$  em  $U$  pode ser representado como um conjunto de pares ordenados de elementos genéricos  $x$  e seus respectivos valores de pertinência. Ou seja:

$$A = \{(x, \mu_A(x)) \mid x \in U\}$$

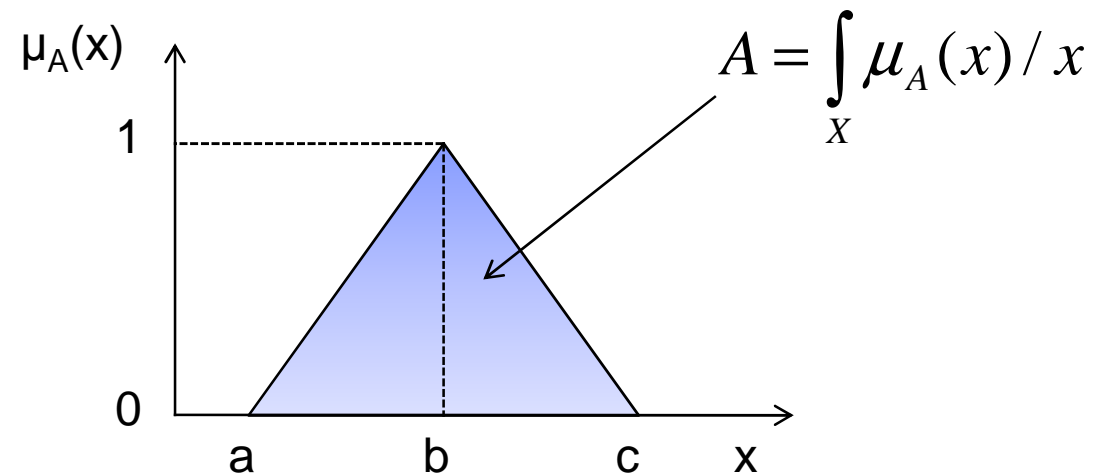
- Um conjunto nebuloso  $A$  pode ser denotado por operador contínuo ou discreto de união lógica, com separador:

$$A = \int_X \mu_A(x) / x, \quad \text{se } X \text{ for contínuo,}$$

$$A = \sum_{x_i \in X} \mu_A(x_i) / x_i, \quad \text{se } X \text{ for discreto.}$$

# Conceitos Fundamentais

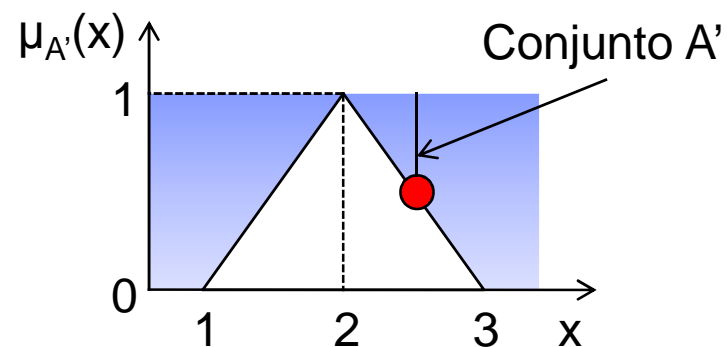
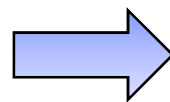
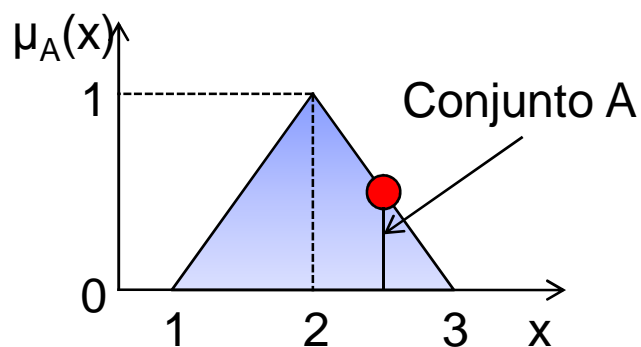
- Graficamente um conjunto nebuloso pode ser representado pela área sob a curva da função de pertinência  $\mu_A$ :



# Operações Básicas com Conjuntos Nebulosos

- Complemento

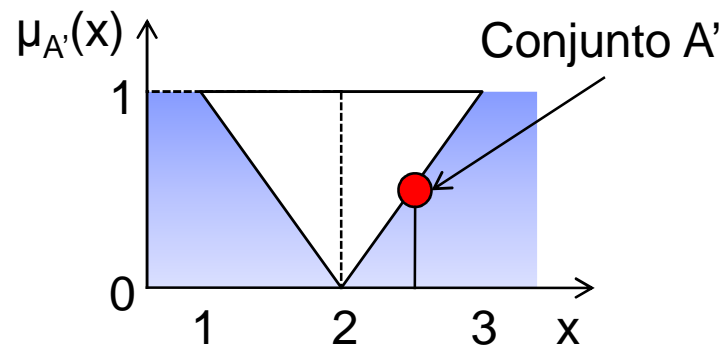
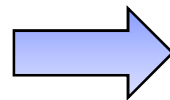
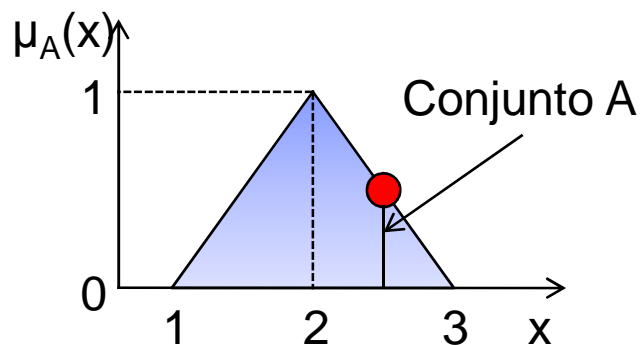
$$\mu_{A'}(x) = 1 - \mu_A(x)$$



# Operações Básicas com Conjuntos Nebulosos

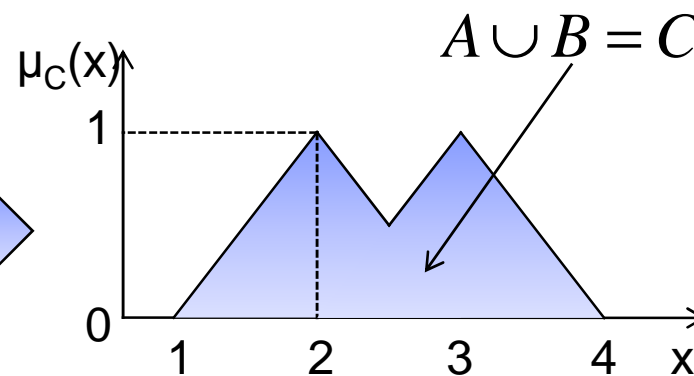
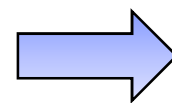
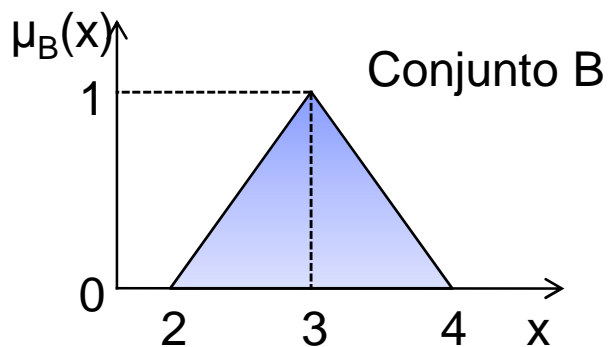
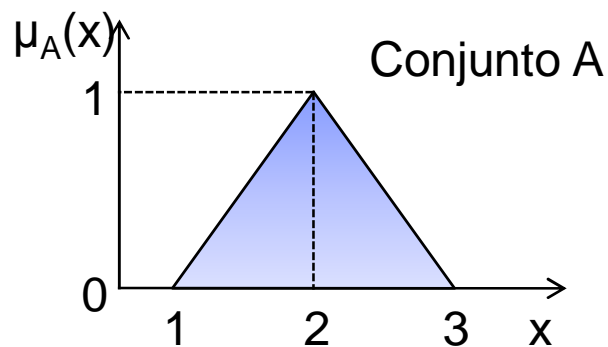
- Complemento

$$\mu_{A'}(x) = 1 - \mu_A(x)$$



# Operações Básicas com Conjuntos Nebulosos

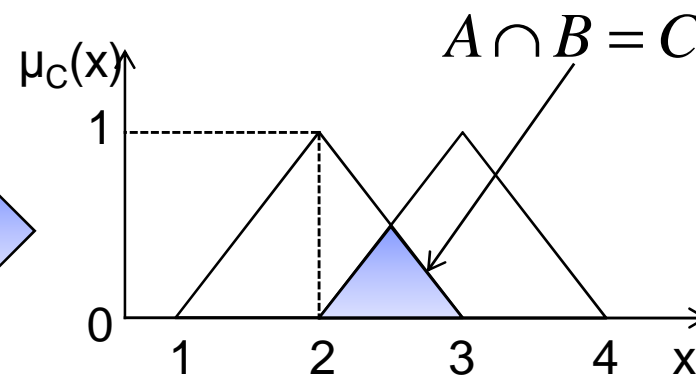
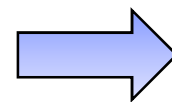
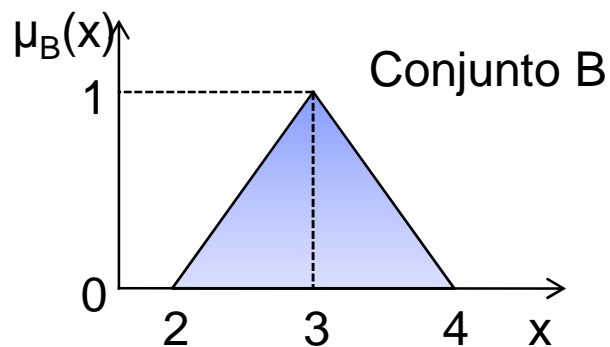
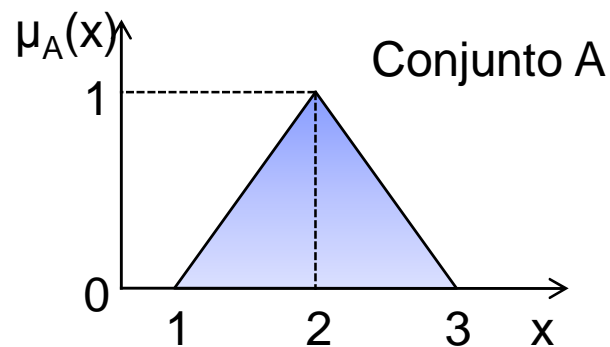
- União





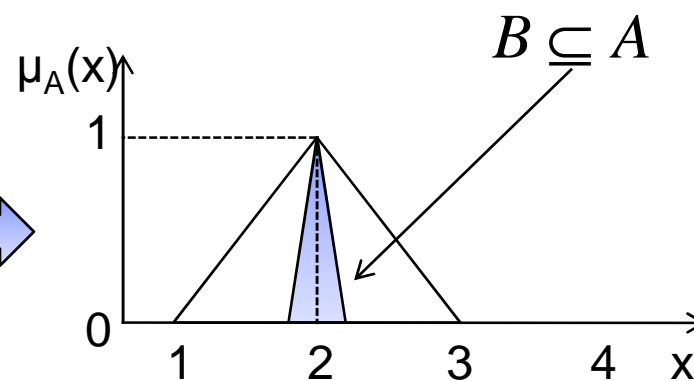
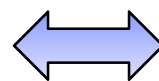
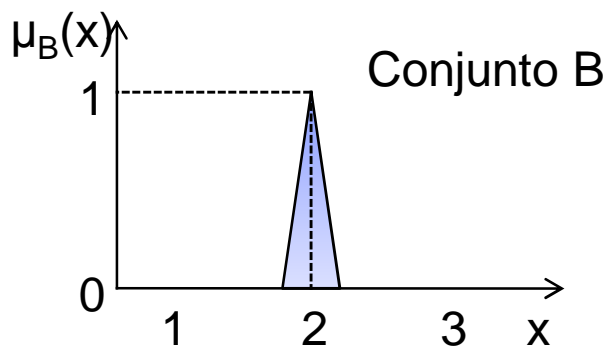
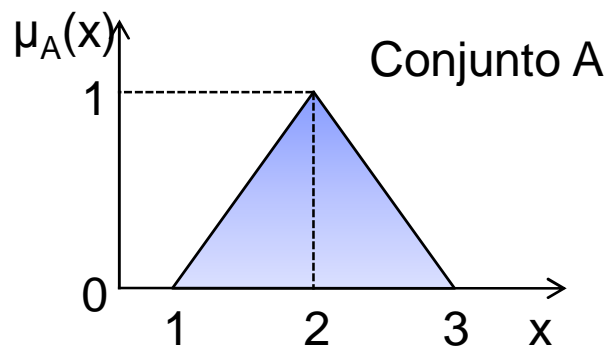
# Operações Básicas com Conjuntos Nebulosos

- Interseção



# Operações Básicas com Conjuntos Nebulosos

- Contido



# Lógica Nebulosa

- Lógica é o estudo dos métodos e princípios do raciocínio, onde o raciocínio permite obter novas proposições a partir de proposições já existentes.
- Na lógica clássica as proposições são sempre verdadeiras ou falsas.
- Lógica nebulosa generaliza lógica clássica: do verdadeiro e falso para valores de proposições que se estendem de 0 (completamente falso) e 1 (completamente verdadeira).

# Lógica Nebulosa

- Um AND entre dois conjuntos nebulosos é equivalente a operação de interseção.
- Um OR entre dois conjuntos nebulosos é equivalente a operação de união.
- O NOT de um conjunto nebuloso é equivalente ao complemento do conjunto.

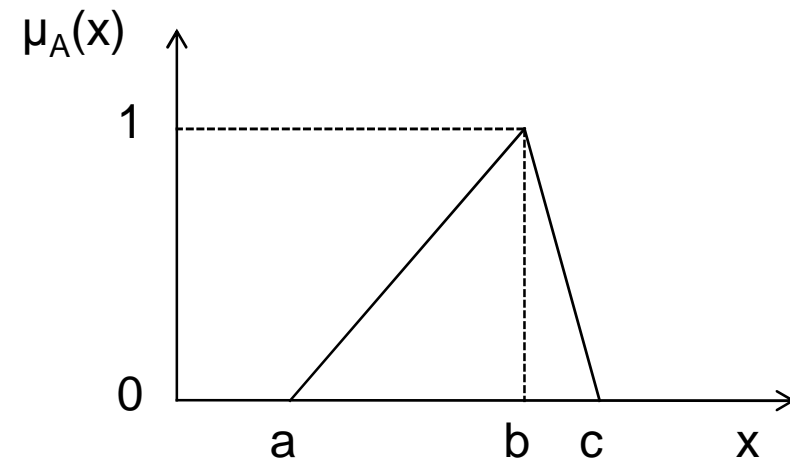
# Funções de Pertinência

- A pertinência  $\mu(\cdot)$  de um conjunto nebuloso (*fuzzy*) pode ser qualquer função limitada no intervalo  $[0,1]$ .
- Expressa a *possibilidade* de um determinado elemento  $x$  ser membro de um conjunto nebuloso.
- As funções de pertinência mais utilizadas são:
  - Triangular
  - Normal
  - Trapezoidal

# Funções de Pertinência

- Funções de pertinência mais utilizadas podem ser:
  - Triangular

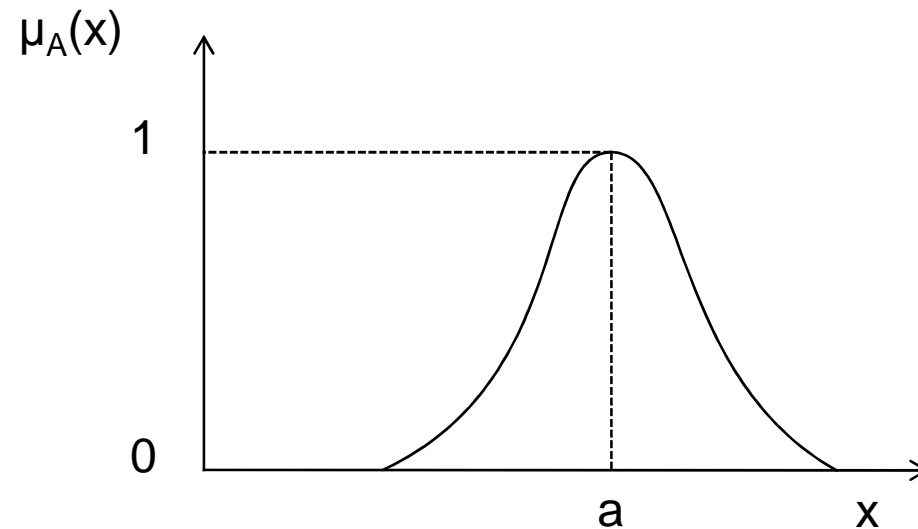
$$\mu_A(x) = \begin{cases} \frac{x-a}{b-a}, & a \leq x \leq b; \\ \frac{c-x}{c-b}, & b \leq x \leq c; \\ 0, & x < a \mid x > c. \end{cases}$$



# Funções de Pertinência

- Funções de pertinência mais utilizadas podem ser:
  - Normal

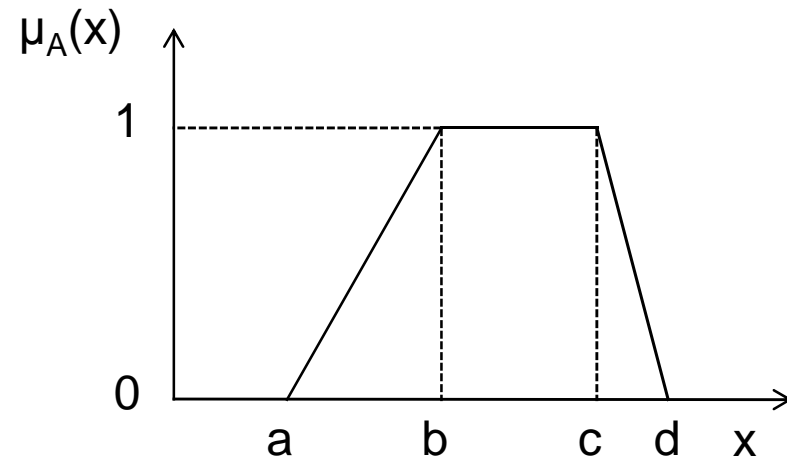
$$\mu_A(x) = e^{-\left(\frac{x-a}{b}\right)^2}, b > 0$$



# Funções de Pertinência

- Funções de pertinência mais utilizadas podem ser:
  - Trapezoidal

$$\mu_A(x) = \begin{cases} 0, & x < a; \\ \frac{x-a}{b-a}, & a \leq x \leq b; \\ 1, & b \leq x \leq c; \\ \frac{d-x}{d-c}, & c < x \leq d; \\ 0, & x > d. \end{cases}$$





# Sistemas Nebulosos

- São sistemas definidos através de um conjunto de regras do tipo IF/THEN com variáveis nebulosas. Exemplo:

$R^0$ : ...

$R^i$ : IF  $x_0$  is  $A_0^i$  and ...  $x_n$  is  $A_n^i$  THEN  $y_0$  is  $B_0^i$  and ...  $y_m$  is  $B_m^i$

...

$R^k$ : ...

- onde temos  $n$  variáveis de entrada  $x_n$ ,  $m$  variáveis de saída  $y_m$ ,  $k$  regras  $R^i$ ,  $n$  conjuntos de entrada  $A_n$  e  $m$  conjuntos de saída  $B_m$ .



# Sistemas Nebulosos

- As regras de um sistema nebuloso utilizam  $k$  premissas e  $k$  conseqüências.

$R^0$ : ...

$R^i$ : IF  $x_0$  is  $A_0^i$  and ...  $x_n$  is  $A_n^i$  THEN  $y_0$  is  $B_0^i$  and ...  $y_m$  is  $B_m^i$

...

$R^k$ : ...

Premissa

Conseqüência

# Sistemas Nebulosos

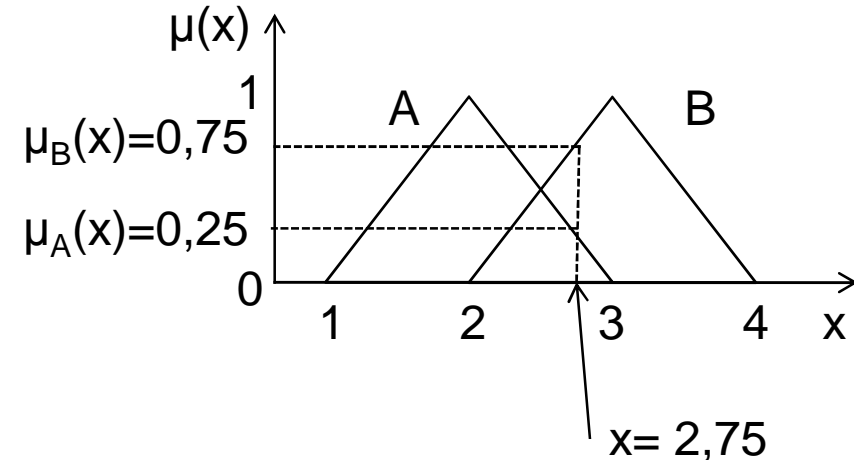
## “Fuzzyficação”

- É o processo de atribuir um grau de pertinência  $\mu_A(x_n)$  de uma dada variável de entrada  $x_n$  a um conjunto nebuloso  $A_n$ .
- Para toda asserção “ $x$  is  $A$ ”, sempre existe um grau de pertinência entre 0 e 1 da variável  $x$  em relação ao conjunto  $A$ :
  - Isto é,  $x_n \text{ is } A_n \rightarrow \mu_{A_n}(x); [0,1]$

# Sistemas Nebulosos

## “Fuzzyficação”: Exemplo

- Para uma variável de entrada  $x=2,75$  e para os conjuntos nebulosos  $A$  e  $B$ , representados na figura ao lado, temos:
  - $x$  tem 75% de possibilidade de pertencer ao conjunto  $B$ .
  - $x$  tem 25% de possibilidade de pertencer ao conjunto  $A$ .

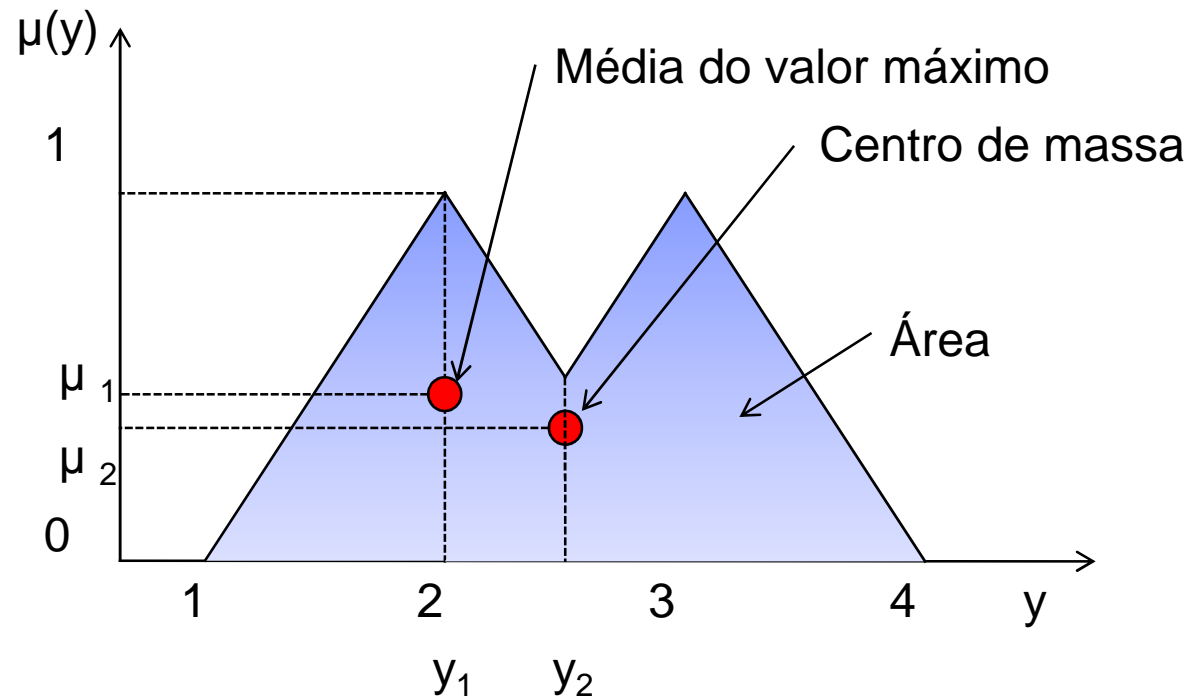


# Sistemas Nebulosos

## “Defuzzyficação”

- É o processo de se obter um valor real para  $y$  uma vez dados os  $i$ -ésimos graus de pertinências  $\mu_B^i(y_{med}^i)$  para uma variável  $y_{med}^i$  de saída.
- Existem várias alternativas para “Defuzzificação” tais como:
  - Utilizar o valor médio do máximo de  $\mu(y)$ .
  - Utilizar o centro de gravidade da área sobre  $\mu(y)$ .
  - Utilizar alguma combinação linear de  $\mu(y)$ .

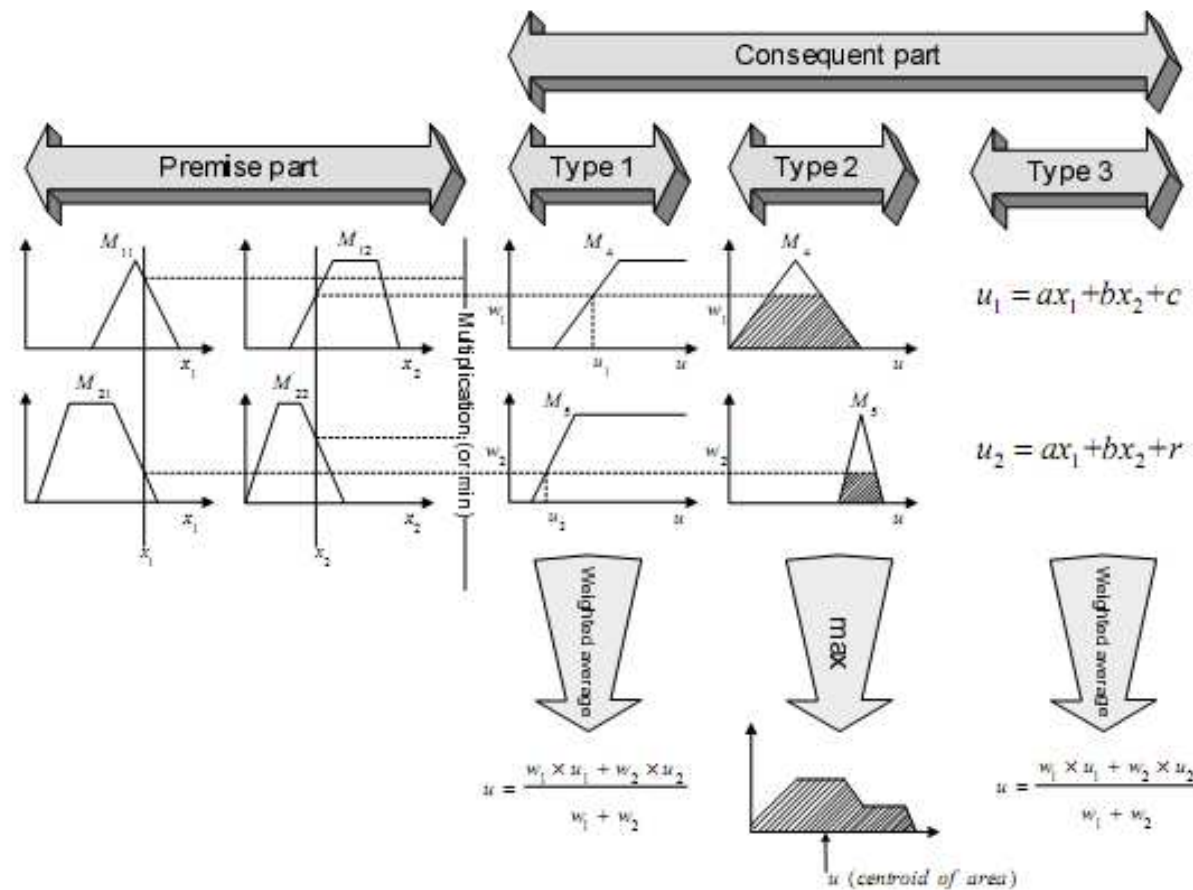
# Sistemas Nebulosos “Defuzzyficação”



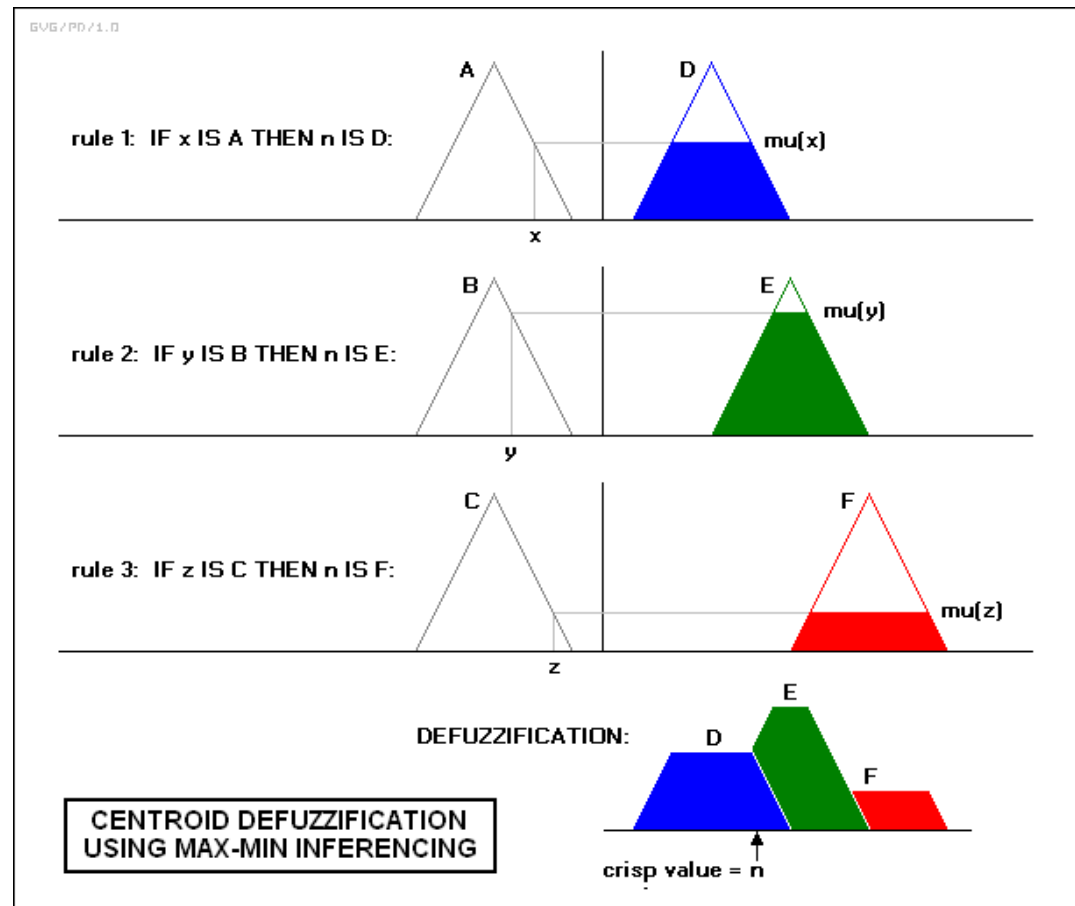
$$y_3 = k \cdot A + b$$

# Sistemas Nebulosos

## “Defuzzyficação”: Exemplo



# Exemplo de um Sistema Nebuloso





# Referências

- **Atualizar**
- Shaw, I. S. , Simões, M. G. (2001). *Controle e Modelagem Fuzzy*. Edgard Blücher; 1ª reimpressão, ISBN: 85-212-0248-2.
- Zhang, H. & Liu, D. (2006). *Fuzzy Modeling and Fuzzy Control (Control Engineering)*. Birkhäuser Boston, 1 edition. ISBN-10: 0817644911, ISBN-13: 978-0817644918.