IF-705 – Automação Inteligente
Controle Não Linear

Paulo Henrique Muniz Ferreira
Aluízio Fausto Ribeiro Araújo
Universidade Federal de Pernambuco
Centro de Informática – Cin
{phmf,aluizioa}@cin.ufpe.br

Sumário

- Introdução
- Definições
- Modelagem de Espaço de Estado
  - *Modelo linear em tempo contínuo*
  - *Modelo não linear*
- Teoria da Estabilidade de Lyapunov
- Sistema em Tempo Discreto
- Estratégia de Controle Não Linear

Introdução

- Sistemas de controle convencionais são projetados usando modelos matemáticos
  - Equações diferenciais
  - Equações de diferenças
- Modelo matemático de um sistema deve ser:
  - Suficientemente simples
  - Suficientemente precisos
- Modelagem em espaço de estados

Introdução

- Quase a totalidade dos sistemas físicos são não-lineares.
- Abordagens:
  - Linearização
  - Técnicas de controle não-linear

Norma de Sinais

- Denotada por $\| \;\; \|$ é uma função que associa a um número real:
  - $\|x\| \geq 0$
  - $\|x\| = 0$ sse $x = 0$
  - $\|ax\| = |a|\|x\|$ para $a \in \mathbb{R}$
  - $\|x + y\| \leq \|x\| + \|y\|$

- *1-norma, 2-norma* e ∞-*norma*:
  - $\|x\|_1 = \int_{-\infty}^{\infty} |x(t)| dt$
  - $\|x\|_2 = \sqrt{\int_{-\infty}^{\infty} x^2(t) dt}$
  - $\|x\|_\infty = sup|x(t)|$ onde "sup" denota *supremo*

Centro de Informática UFPE

Norma de Vetores

- Para $\boldsymbol{x} = [x_1, x_2, \dots, x_n]^T$ as *1-norma, 2-norma* e ∞-*norma*:
  - $\|\boldsymbol{x}\|_1 = \sum_{i=1}^{n} |x_i|$
  - $\|\boldsymbol{x}\|_2 = \sqrt{\sum_{i=1}^{n} {x_i}^2} = (\boldsymbol{x}^T \boldsymbol{x})^2$
  - $\|\boldsymbol{x}\|_\infty = \max_i\{|x_i|\}$
- Ex.: $\boldsymbol{x} = [2, -3, 5]^T$
  - $\|\boldsymbol{x}\|_1 = |2| + |-3| + |5| = 10$
  - $\|\boldsymbol{x}\|_2 = \sqrt{2^2 + (-3)^2 + 5^2} = 6.15$
  - $\|\boldsymbol{x}\|_\infty = \max \ \{|2|, |-3|, |5|\} = 5$

Norma de Matrizes

- Para $A = \begin{bmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1m} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{nm} \end{bmatrix}$ as *1-norma, 2-norma* e ∞*-norma*:
  - $\|A\|_1 = \max_j \sum_{i=1}^{n} |a_{ij}|$
  - $\|A\|_2 = \sqrt{\lambda_{max}(A^T A)}$ onde $\lambda_{max}(\cdot)$ denota o maior autovalor.
  - $\|A\|_\infty = \max_i \{|x_i|\}$

Função Definida Positiva

- Uma função continuamente diferenciável $f: \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^+$ é dita definida positiva em uma região $S \in \mathbb{R}^n$ que contém a origem se:
  - $f(0) = 0$
  - $f(x) > 0; x \in S$ e $x \neq 0$

- A função f é dita semidefinida positiva
  - $f(0) = 0$
  - $f(x) \geq 0; x \in S$ e $x \neq 0$

- Uma função $f(x, t)$ é dita continuamente diferenciável se f e $\frac{df}{dt}$ são contínuas

U F P E

Centro de Informática UFPE

Matriz Definida Positiva

- Uma matriz simétrica real P é definida positiva ($P > 0$) se
  - $\boldsymbol{x}^T P \boldsymbol{x} > 0$ para todo $\boldsymbol{x}$ não nulo
  - $\boldsymbol{x}^T P \boldsymbol{x} = 0$; somente se $\boldsymbol{x} = 0$

- É dita positiva semidefinida ($P \geq 0$) se
  - $\boldsymbol{x}^T P \boldsymbol{x} \geq 0$ para todo $\boldsymbol{x}$ não nulo

Modelagem de Espaço de Estados

- Essa modelagem utiliza o conceito de *estado* de um sistema.
  - O *estado* do sistema é o menor conjunto de variáveis tal que dado o estado inicial $\boldsymbol{x}_0$ e a entrado do sistema $u(t)$, $\boldsymbol{x}(t)$ pode ser determinado unicamente.
  - *Equações de Estados* descrevem o comportamento das variáveis de estados.
  - *Equações de Saída* são equações algébricas que relacionam a saída do sistema com o estado e a entrado do sistema.

- Essa técnica pode ser usadas para sistemas não lineares, variantes no tempo e multivariáveis.

Sistema Linear Invariante

- Modelagem para sistema linear invariante no tempo (LTI)

$\dot{\boldsymbol{x}}(t) = A\boldsymbol{x}(t) + B\boldsymbol{u}(t)$ equação de estados

$\boldsymbol{y}(t) = C\boldsymbol{x}(t) + D\boldsymbol{u}(t)$ equação de saída

- Normalmente um sistema governado por uma equação diferencial de ordem *n*, é expresso em termos de *n* variáveis de estado.

Sistema Linear Variante

- Modelagem para sistema linear variante no tempo (LTV)

$\dot{\boldsymbol{x}}(t) = A(t)\boldsymbol{x}(t) + B(t)\boldsymbol{u}(t)$ equação de estados

$\boldsymbol{y}(t) = C(t)\boldsymbol{x}(t) + D(t)\boldsymbol{u}(t)$ equação de saída

Sistema Não Linear

- Modelagem geral para sistema não linear

$$\dot{\boldsymbol{x}}(t) = \boldsymbol{f}(t, \boldsymbol{x}(t), \boldsymbol{u}(t))$$
$$\boldsymbol{y}(t) = \boldsymbol{h}(t, \boldsymbol{x}(t), \boldsymbol{u}(t))$$

onde $\boldsymbol{f}$ e $\boldsymbol{h}$ são funções vetoriais.

Sistema Não Linear de entradas afins

- Muito sistemas práticos podem ser representados usando modelagem de espaço de estados com entrada afim

$$\dot{\boldsymbol{x}}(t) = \boldsymbol{f}\big(\boldsymbol{x}(t)\big) + \sum_{i=1}^{p} g_i\big(\boldsymbol{x}(t)\big)u_i(t)$$
$$\boldsymbol{y}(t) = \boldsymbol{h}(\boldsymbol{x}(t))$$

Ponto de Equilíbrio

- Para o sistema não linear

$$\dot{\boldsymbol{x}} = \boldsymbol{f}(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{u})$$

onde cada f_i é continuamente diferenciável

- O ponto de equilíbrio $(\boldsymbol{x}_0, \boldsymbol{u}_0)$ é definido por:

$$\boldsymbol{f}(\boldsymbol{x}_0, \boldsymbol{u}_0) = 0$$

Linearização

- Linearização é uma técnica de aproximação de um sistema não linear por sua contraparte linear em uma região pequena em torno do ponto de operação.
- Tomando $\boldsymbol{x} = \boldsymbol{x}_0 + \Delta\boldsymbol{x}$ e $\boldsymbol{u} = \boldsymbol{u}_0 + \Delta\boldsymbol{u}$

$$\frac{d\boldsymbol{x}}{dt} = \boldsymbol{f}(\boldsymbol{x}_0 + \Delta\boldsymbol{x}, \boldsymbol{u}_0 + \Delta\boldsymbol{u})$$

- Em series de Taylor

$$= \boldsymbol{f}(\boldsymbol{x}_0, \boldsymbol{u}_0) + \frac{\partial\boldsymbol{f}}{\partial\boldsymbol{x}}(\boldsymbol{x}_0, \boldsymbol{u}_0)\Delta\boldsymbol{x} + \frac{\partial\boldsymbol{f}}{\partial\boldsymbol{u}}(\boldsymbol{x}_0, \boldsymbol{u}_0)\Delta\boldsymbol{u} + \cdots$$

Linearização

- Onde são os Jacobianos de $\boldsymbol{f}$ a respeito de $\boldsymbol{x}$ e $\boldsymbol{u}$ calculadas no ponto de Equilíbrio

$$\frac{\partial \boldsymbol{f}}{\partial \boldsymbol{x}}(\boldsymbol{x}_0, \boldsymbol{u}_0) = \begin{bmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x_1} & \cdots & \frac{\partial f_1}{\partial x_n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial f_n}{\partial x_1} & \cdots & \frac{\partial f_n}{\partial x_n} \end{bmatrix}_{\boldsymbol{x}_0, \boldsymbol{u}_0}$$

$$\frac{\partial \boldsymbol{f}}{\partial \boldsymbol{u}}(\boldsymbol{x}_0, \boldsymbol{u}_0) = \begin{bmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial u_1} & \cdots & \frac{\partial f_1}{\partial u_m} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial f_n}{\partial u_1} & \cdots & \frac{\partial f_n}{\partial u_m} \end{bmatrix}_{\boldsymbol{x}_0, \boldsymbol{u}_0}$$

Linearização

- Visto que $\boldsymbol{x}_0$ é constante

$$\frac{d\boldsymbol{x}}{dt} = \frac{d\boldsymbol{x}_0}{dt} + \frac{d(\Delta\boldsymbol{x})}{dt} = \frac{d(\Delta\boldsymbol{x})}{dt}$$

- e $\boldsymbol{f}(\boldsymbol{x}_0, \boldsymbol{u}_0) = 0$

$$\frac{d(\Delta\boldsymbol{x})}{dt} = \frac{\partial \boldsymbol{f}}{\partial \boldsymbol{x}}(\boldsymbol{x}_0, \boldsymbol{u}_0)\Delta\boldsymbol{x} + \frac{\partial \boldsymbol{f}}{\partial \boldsymbol{u}}(\boldsymbol{x}_0, \boldsymbol{u}_0)\Delta\boldsymbol{u} = A\Delta\boldsymbol{x} + B\Delta\boldsymbol{u}$$

Linearização

- Saída do sistema $\boldsymbol{y} = \boldsymbol{h}(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{u})$ e $\boldsymbol{y} = \boldsymbol{y}_0 + \Delta \boldsymbol{y}$
- Aproximando com a serie de Taylor de primeira ordem temos

$$\Delta \boldsymbol{y} = C\Delta \boldsymbol{x} + D\Delta \boldsymbol{u}$$

$$C = \frac{\partial \boldsymbol{h}}{\partial \boldsymbol{x}}(\boldsymbol{x}_0, \boldsymbol{u}_0) = \begin{bmatrix} \frac{\partial h_1}{\partial x_1} & \cdots & \frac{\partial h_1}{\partial x_n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial h_p}{\partial x_1} & \cdots & \frac{\partial h_p}{\partial x_n} \end{bmatrix}_{\boldsymbol{x}_0, \boldsymbol{u}_0} \quad D = \frac{\partial \boldsymbol{h}}{\partial \boldsymbol{u}}(\boldsymbol{x}_0, \boldsymbol{u}_0) = \begin{bmatrix} \frac{\partial h_1}{\partial u_1} & \cdots & \frac{\partial h_1}{\partial u_m} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial h_p}{\partial u_1} & \cdots & \frac{\partial h_p}{\partial u_m} \end{bmatrix}_{\boldsymbol{x}_0, \boldsymbol{u}_0}$$

Exemplo de Linearização

- Linearize o sistema

$$\dot{x}_1 = \frac{-1}{x_2^2(t)}$$

$$\dot{x}_2 = u(t)x_1(t)$$

onde $x_1(0) = x_2(0) = 1$ e $u(0) = 0$

Linearização: Pontos de Operação Além da Origem

- Linearização em outros pontos de operação
- Considere o seguinte sistema afim

$$\dot{\boldsymbol{x}} = \boldsymbol{f}(\boldsymbol{x}) + \boldsymbol{g}(\boldsymbol{x})\boldsymbol{u}$$

$$\boldsymbol{f}(\boldsymbol{x}) + \boldsymbol{g}(\boldsymbol{x})\boldsymbol{u} \approx A\boldsymbol{x} + B\boldsymbol{u}$$

$$\boldsymbol{f}(\boldsymbol{x}_0) + \boldsymbol{g}(\boldsymbol{x}_0)\boldsymbol{u} = A\boldsymbol{x}_0 + B\boldsymbol{u}$$

- Já que $\boldsymbol{u}$ é arbitrário então

$$\boldsymbol{g}(\boldsymbol{x}_0) = B$$

Linearização: Pontos de Operação Além da Origem

- Devemos encontrar um A tal que na vizinhança de $\boldsymbol{x}_0$

$$\boldsymbol{f}(\boldsymbol{x}) \approx A\boldsymbol{x}$$

$$\boldsymbol{f}(\boldsymbol{x}_0) = A\boldsymbol{x}_0$$

- Seja $\boldsymbol{a}_i^T$ a i-ésima linha da matriz A

$$f_i(\boldsymbol{x}) \approx \boldsymbol{a}_i^T \boldsymbol{x}$$

$$f_i(\boldsymbol{x}_0) = \boldsymbol{a}_i^T \boldsymbol{x}_0$$

para $i = 1, 2, \ldots, n$ e f_i é a i-ésima componente de $\boldsymbol{f}$

Linearização: Pontos de Operação Além da Origem

- Expandindo o lado esquerdo, temos

$$\dot{x}_1 = f_i(\boldsymbol{x}_0) + \nabla^T f_i(\boldsymbol{x}_0)(\boldsymbol{x} - \boldsymbol{x}_0) \approx \boldsymbol{a}_i^T \boldsymbol{x}$$

onde ∇^T é o gradiente de f_i em $\boldsymbol{x}$

- Substituindo $f_i(\boldsymbol{x}_0)$ temos

$$\nabla^T f_i(\boldsymbol{x}_0)(\boldsymbol{x} - \boldsymbol{x}_0) \approx \boldsymbol{a}_i^T (\boldsymbol{x} - \boldsymbol{x}_0)$$

Linearização: Pontos de Operação Além da Origem

- Determinamos $\boldsymbol{a}_i^T$ de forma que minimize a função de custo

$$E = \frac{1}{2} \|\nabla f_i(\boldsymbol{x}_0) - \boldsymbol{a}_i(\boldsymbol{x} - \boldsymbol{x}_0)\|^2$$

sujeito as restrições $f_i(\boldsymbol{x}_0) = \boldsymbol{a}_i^T \boldsymbol{x}_0$

- Problema de otimização convexa com solução

$$\boldsymbol{a}_i = \nabla f_i(\boldsymbol{x}_0) + \frac{f_i(\boldsymbol{x}_0) - \boldsymbol{x}_0^T \nabla f_i(\boldsymbol{x}_0)}{\|\boldsymbol{x}_0\|^2} \boldsymbol{x}_0, \qquad \boldsymbol{x}_0 \neq 0$$

Exemplo Linearização em Pontos de Operação Além da Origem

- Considere o sistema

$$\dot{x}_1 = x_2$$
$$\dot{x}_2 = -x_1 + \mu(1 - x_1^2)x_2 + u$$

onde $\boldsymbol{x}_0 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0.5 \end{bmatrix}$ e $\mu = 1$

Teoria da Estabilidade de Lyapunov

- Para o sistema não linear

$$\dot{\boldsymbol{x}} = \boldsymbol{f}(\boldsymbol{x}, t)$$

- Seja $\boldsymbol{x}_e$ um ponto de equilíbrio tal que

$$\boldsymbol{f}(\boldsymbol{x}_e) = 0$$

Definição 1.1 – Um ponto de equilíbrio é dito *estável no sentido de Lyapunov* se para todo $\epsilon \geq 0$ e qualquer $t_0 \geq 0$ existe um $\delta(\epsilon, t_0)$ tal que

$$|\boldsymbol{x}_0 - \boldsymbol{x}_e| < \delta(\epsilon, t_0) \Rightarrow |\boldsymbol{x}(t) - \boldsymbol{x}_e| < \epsilon \qquad \forall t \geq t_0$$

onde $\boldsymbol{x}(t)$ é a solução do sistema

Teoria da Estabilidade de Lyapunov

Definição 1.2 – Um ponto de equilíbrio $\boldsymbol{x}_e$ é *assintoticamente estável no sentido de Lyapunov* se $\boldsymbol{x}_e$ é estável e

$$|\boldsymbol{x}(t) - \boldsymbol{x}_e| \to 0 \qquad t \to \infty$$

- É dito que o ponto de equilíbrio $\boldsymbol{x}_e$ é *instável* se ele não for estável
- Mas, como determinar a estabilidade ou instabilidade de um ponto de equilíbrio $\boldsymbol{x}_e$
  - Método indireto
  - Método direto
    - *Função de Lyapunov*

Método Direto

- O método direto é mais robusto
  - Analisa a estabilidade de sistemas não lineares
  - Aplicável para sistemas variantes no tempo
  - Pode determinar a estabilidade assintótica e a estabilidade ordinária
  - Pode determinar a região de estabilidade assintótica ou o domínio de atração de um equilíbrio
  - Pode ajudar no projeto de um lei de controle que garante uma estabilidade assintótica global para sistemas não lineares
- O principal ponto negativo
  - Não há uma maneira sistemática para obter a função de Lyapunov

Estabilidade de Lyapunov de Sistema Invariante no Tempo

Teorema 1.2 – seja um ponto de equilíbrio $\boldsymbol{x}_e$

$$\dot{\boldsymbol{x}} = \boldsymbol{f}(\boldsymbol{x})$$

onde $\boldsymbol{f}: S \to \mathbb{R}^n$ é *Lipschitz* localmente e $S \subset \mathbb{R}^n$ é um domínio que contém a origem. Seja $V: S \to \mathbb{R}$ continuamente diferenciável e definida positiva em S

1. Se $\dot{V}(t) = \frac{\partial V}{\partial \boldsymbol{x}} \boldsymbol{f}$ é semidefinida negativa, então $\boldsymbol{x}_e$ é um ponto de equilíbrio estável
2. Se $\dot{V}(t)$ é definida negativa, então $\boldsymbol{x}_e$ é assintoticamente estável

Estabilidade de Lyapunov de Sistema Invariante no Tempo

- Em ambos casos, chamamos V de função de Lyapunov
- Se a condição é mantida para $\boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^n$ e $(|\boldsymbol{x}| \to \infty) \longrightarrow (V(\boldsymbol{x}) \to \infty)$, dizemos que a estabilidade é global
  - Caso 1: estável globalmente
  - Caso 2: assintoticamente estável
    - $V(\boldsymbol{x})$ é dita ser não limitada radialmente
- A existência da função de Lyapunov é suficiente para prova da estabilidade

Pontos do Teorema 1.2

- A falha de uma função de Lyapunov candidata não significa que o ponto de equilíbrio é não estável ou não assintoticamente estável
- Esse método permite analisar a estabilidade sem a necessidade de resolver equações diferenciais
- Não há um método geral para encontrar a função de Lyapunov. Heurísticas e conceitos físicos da dinâmica do sistema são usados para encontrar uma função candidata

Exemplos

- Considere o sistema

$$\dot{x} = -x^3$$

- Investigue a estabilidade na origem $x_e = 0$

- Considere o sistema (eq. do pêndulo)

$$\dot{x_1} = x_2$$
$$\dot{x_2} = -a \sin x_1 - b x_2$$

- Investigue a estabilidade na origem $\boldsymbol{x_e} = \boldsymbol{0}$

Teorema da Invariância de LaSalle

Conjunto Invariante – Um conjunto Ω é dito invariante de um sistema invariante no tempo se uma solução $\boldsymbol{x}(t)$ que pertence a Ω em um instante de tempo t_0 também pertence a Ω para todo $t \in \mathbb{R}$.

- Se for somente para $t \geq t_0$, então Ω é dito um conjunto invariante positivamente

Teorema 1.3 – Seja Ω um conjunto invariante positivamente e $V(\boldsymbol{x}): \Omega \to \mathbb{R}_+$ uma função continuamente diferenciável tal que $\dot{V}(\boldsymbol{x}) \leq 0 \;\; \forall \boldsymbol{x}: \boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^n$. Seja $D = \{\boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^n, \dot{V}(\boldsymbol{x}) = 0\}$ e M, o maior conjunto invariante que contido em D. Então, cada solução limitada $\boldsymbol{x}(t)$ começando em Ω converge M para quando $t \to \infty$

Teorema da Invariância de LaSalle

Corolário 1.1 – Seja $\boldsymbol{x}_e = 0$ um ponto de equilíbrio e $V(\boldsymbol{x}): D \to \mathbb{R}$ uma função continuamente diferenciável definida positiva em um domínio D contendo a origem, tal que $\dot{V}(\boldsymbol{x}) \leq 0$ in D. Façamos $S = \{\boldsymbol{x} \in D, \dot{V}(\boldsymbol{x}) = 0\}$. Suponha que S contém somente a trajetória trivial $\boldsymbol{x} = \boldsymbol{0}$ que permanece de forma idêntica em S. Então, $\boldsymbol{x}_e = 0$ é assintoticamente estável

Teorema da Invariância de LaSalle

Corolário 1.2 – Seja $\boldsymbol{x}_e = 0$ um ponto de equilíbrio e $V(\boldsymbol{x}): \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ uma função continuamente diferenciável, **ilimitada radialmente** e definida positiva tal que $\dot{V}(\boldsymbol{x}) \leq 0 \;\; \forall \boldsymbol{x}: \boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^n$. Façamos $S = \{\boldsymbol{x} \in D, \dot{V}(\boldsymbol{x}) = 0\}$. Suponha que S contém somente a trajetória trivial $\boldsymbol{x} = \boldsymbol{0}$ que permanece de forma idêntica em S. Então, $\boldsymbol{x}_e = 0$ é **globalmente** assintoticamente estável

Teorema da Instabilidade de Cheteav

Teorema 1.4 – Seja $\boldsymbol{x}_e = 0$ um ponto de equilíbrio e $V: S \rightarrow \mathbb{R}$ uma função continuamente diferenciável tal que $V(0) = 0$ e $V(\boldsymbol{x}_0) > 0$ para qualquer $\boldsymbol{x}_0$ com $\|\boldsymbol{x}_0\|$ arbitrariamente pequeno. S é um subconjunto de $\mathbb{R}^n$ que contém a origem. Definimos um conjunto U tal que $U = \{\boldsymbol{x} \in B_r; V(\boldsymbol{x}) > 0\}$ onde $r > 0$ e $B_r = \{\boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^n; \|\boldsymbol{x}\| \leq r\}$. Suponha que $\dot{V}(\boldsymbol{x}) > 0$ em U. Então, $\boldsymbol{x}_e = 0$ é instável

Estabilidade de Lyapunov de Sistema Variante no Tempo

Teorema 1.5 – seja um ponto de equilíbrio $\boldsymbol{x}_e$

$$\dot{\boldsymbol{x}} = \boldsymbol{f}(\boldsymbol{x}, t)$$

Seja $S \subset \mathbb{R}^n$ um domínio que contém a origem. Seja V continuamente diferenciável que satisfaz

1. $W_1(\boldsymbol{x}) \leq V(\boldsymbol{x}, t) \leq W_2(\boldsymbol{x})$
2. $\dot{V}(\boldsymbol{x}, t) = \frac{\partial V}{\partial t} + \frac{\partial V}{\partial x} \boldsymbol{f}(\boldsymbol{x}, t) \leq -W_3(\boldsymbol{x})$

para todo $t \geq t_0$ e $\boldsymbol{x} \subset S$, onde W_1, W_2 e W_3 são funções contínuas definida positiva em S. Então $\boldsymbol{x}_e = 0$ é uniformemente assintoticamente estável e V é chamada de função de Lyapunov. Se $W_3(\boldsymbol{x}) = 0$, então $\boldsymbol{x}_e = 0$ é uniformemente estável

Estabilidade de Lyapunov de Sistema Variante no Tempo

Corolário 1.3 – Assuma que todas as suposições no Teorema 1.5 se mantém para todo $\boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^n$ e $W_1(\boldsymbol{x}) \to \infty$ para $\|\boldsymbol{x}\| \to \infty$, então $\boldsymbol{x}_e = 0$ é globalmente uniformemente assintoticamente estável

Corolário 1.4 – Assuma que todas as suposições no Teorema 1.5 são da seguinte forma

1. $c_1\|\boldsymbol{x}\|^q \leq V(\boldsymbol{x}, t) \leq c_2\|\boldsymbol{x}\|^q$
2. $\dot{V}(\boldsymbol{x}, t) \leq -c_3\|\boldsymbol{x}\|^q$

onde c_1, c_2, c_3 e q são constantes positivas. Então, $\boldsymbol{x}_e = 0$ é exponencialmente estável. Se se mantém para todo $\boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^n$, então $\boldsymbol{x}_e = 0$ é globalmente exponencialmente estável

Exemplo

- Considere o sistema

$$\dot{x} = -x^3 \sin(t) - \frac{1}{2}x^3$$

- Investigue a estabilidade

Método Indireto de Lyapunov

Teorema 1.6 – Seja $\boldsymbol{x}_e$ um ponto de equilíbrio para o sistema não linear $\dot{\boldsymbol{x}} = \boldsymbol{f}(\boldsymbol{x})$, onde $\boldsymbol{f}: D \to \mathbb{R}^n$ é continuamente diferenciável e D é a vizinhança da origem. Seja a matriz Jacobiana A em $\boldsymbol{x}_e = 0$

$$A = \left.\frac{\partial \boldsymbol{f}}{\partial \boldsymbol{x}}\right|_{\boldsymbol{x}_e}$$

Seja $\lambda_i, i = 1, 2, \ldots, n$ os autovalores de A. Então,

1. A origem é assintoticamente estável se $\Re(\lambda_i(A)) < 0$ para todos i
2. A origem é instável, se para algum i, $\Re(\lambda_i(A)) > 0$

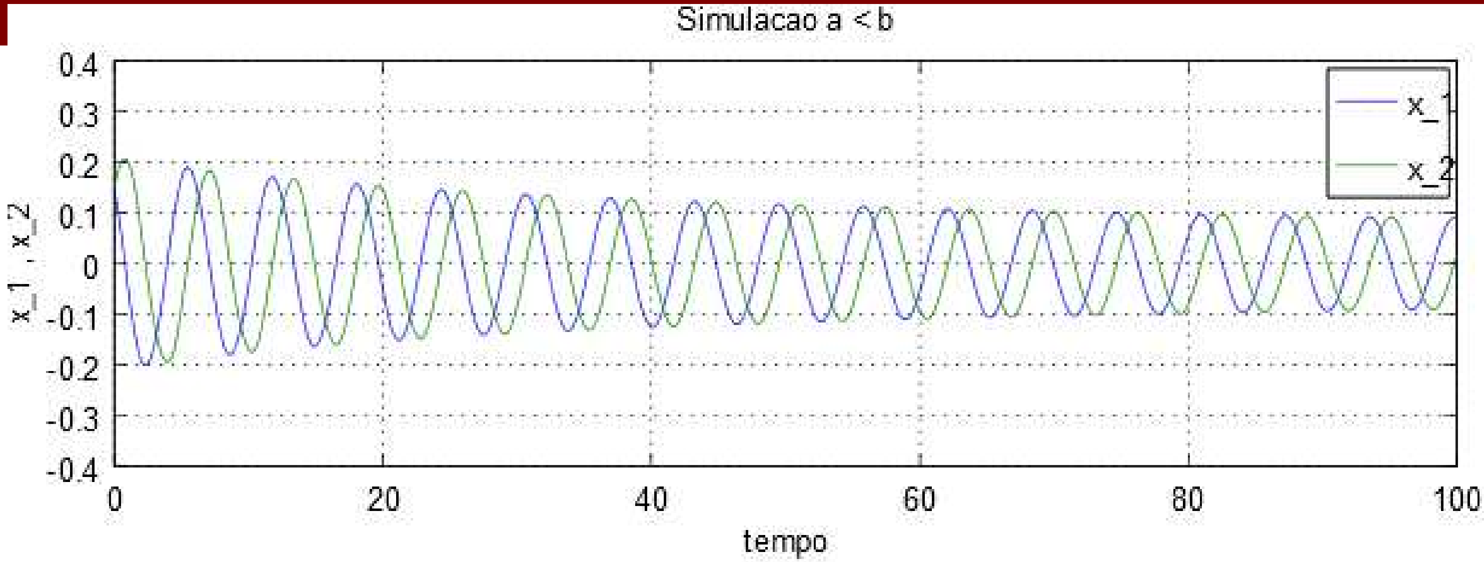
Exemplo

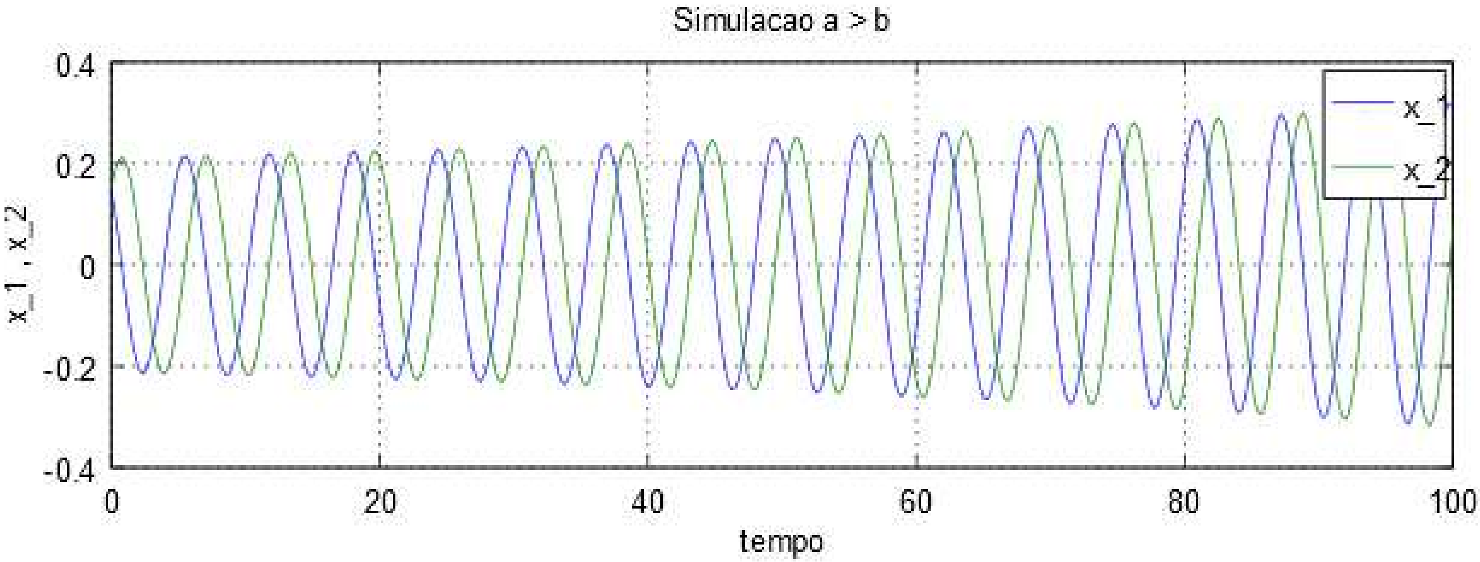
- Considere o sistema

$$\dot{x}_1 = -x_2 + a x_1 x_2^2$$
$$\dot{x}_2 = x_1 - b x_1^2 x_2$$
$$a \neq b$$

- Investigue a estabilidade no ponto de equilíbrio

Simulação - Exemplo





Estabilidade de Lyapunov para Sistemas Lineares

- É possível encontrar uma função de Lyapunov para sistema lineares da forma

$$\dot{\boldsymbol{x}} = A\boldsymbol{x}$$

- Escolha como uma função de Lyapunov a forma quadrática

$$V(\boldsymbol{x}) = \boldsymbol{x}^T P\boldsymbol{x}$$

onde P é uma matriz simétrica definida positiva. Então

$$\begin{aligned} \dot{V}(\boldsymbol{x}) &= \dot{\boldsymbol{x}}^T P\boldsymbol{x} + \boldsymbol{x}^T P\dot{\boldsymbol{x}} \\ &= -\boldsymbol{x}^T Q\boldsymbol{x} \end{aligned}$$

onde $A^T P + PA = -Q$

- Se Q for definida positiva, então o sistema é assintoticamente estável

UFPE

Centro de Informática

UFPE

Estabilidade de Lyapunov para Sistemas Lineares

- Podemos escolher $Q = I$ e encontrar P que resolve a equação

$$A^T P + PA = -I$$

- E verificar se P é definida positiva
- Podemos usar o comando *lyap* do MATLAB para encontrar P

Sistema de Tempo Discreto

- Sistema de tempo discreto LTI

$$\boldsymbol{x}(k+1) = A\boldsymbol{x}(k) + B\boldsymbol{u}(k)$$
$$\boldsymbol{y}(k) = C\boldsymbol{x}(k) + D\boldsymbol{u}(k)$$

onde $\boldsymbol{x}(0)$ é a condição inicial. $\boldsymbol{x}(k)$, $\boldsymbol{y}(k)$ e $\boldsymbol{u}(k)$ são o estado, a saída e a entrada do sistema

- Sistema de tempo discreto não linear

$$\boldsymbol{x}(k+1) = \boldsymbol{f}(k, \boldsymbol{x}(k), \boldsymbol{u}(k))$$
$$\boldsymbol{y}(k) = \boldsymbol{h}(k, \boldsymbol{x}(k), \boldsymbol{u}(k))$$

Sistema de Tempo Discreto

- Modelagem sistema de tempo discreto não linear com entrada afim

$$\boldsymbol{x}(k+1) = \boldsymbol{f}\big(\boldsymbol{x}(k)\big) + \boldsymbol{g}\big(\boldsymbol{x}(k)\big)\boldsymbol{u}(k)$$
$$\boldsymbol{y}(k) = \boldsymbol{h}(\boldsymbol{x}(k))$$

Modelos ARMAX e NARMAX

- ARMAX – Modelo autorregressivo de médias móveis com entrada exógenas
- NARMAX – Não linear ARMAX
- Modelo ARMAX

$$y(k) = \sum_{i=1}^{n} a_i y(k-i) + \sum_{i=0}^{m} b_i u(k-i)$$

- Modelo NARMAX

$$y(k) = f(y(k-1), \dots, y(k-n), u(k-d), \dots, u(k-d-m+1))$$

Centro de Informática
UFPE

Estabilidade de Lyapunov para Sistema de Tempo Discreto

Teorema 1.2 – seja um ponto de equilíbrio $\boldsymbol{x}_e = 0$

$$\boldsymbol{x}(k+1) = \boldsymbol{f}(\boldsymbol{x}(k))$$

onde $\boldsymbol{f}: S \rightarrow \mathbb{R}^n$ é *Lipschitz* localmente e $S \subset \mathbb{R}^n$ é um domínio que contém a origem. Seja $V: S \rightarrow \mathbb{R}$ continuamente diferenciável e definida positiva em S

1. Se $\Delta V(\boldsymbol{x}(k)) = V(\boldsymbol{x}(k+1)) - V(\boldsymbol{x}(k))$ é semidefinida negativa, então $\boldsymbol{x}_e = 0$ é um ponto de equilíbrio estável
2. Se $\Delta V(\boldsymbol{x}(k))$ é definida negativa, então $\boldsymbol{x}_e = 0$ é assintoticamente estável

Estabilidade de Lyapunov para Sistemas Lineares

- É possível encontrar uma função de *Lyapunov* para sistema lineares da forma

$$\boldsymbol{x}(k+1) = A\boldsymbol{x}(k)$$

- Escolha como uma função de *Lyapunov* a forma quadrática

$$V(\boldsymbol{x}(k)) = \boldsymbol{x}^T(k)P\boldsymbol{x}(k)$$

onde P é uma matriz simétrica definida positiva. Então

$$\Delta V(\boldsymbol{x}(k)) = \boldsymbol{x}^T(k+1)P\boldsymbol{x}(k+1) - \boldsymbol{x}^T(k)P\boldsymbol{x}(k)$$
$$= -\boldsymbol{x}^T Q\boldsymbol{x}$$

onde $A^T PA - P = -Q$

- Se Q for definida positiva, então o sistema é assintoticamente estável

Estabilidade de Lyapunov para Sistemas Lineares

- Podemos escolher $Q = I$ e encontrar P que resolve a equação

$$A^T P A - P = -I$$

- E verificar se P é definida positiva
- Podemos usar o comando *dlyap* do MATLAB para encontrar P

Estratégias de Controles Não Lineares

- Problema de controle
  - Regulação
    - O objetivo do controle é manter o sistema em um estado específico;
    - Ex.: Altura de um Satélite, Controle de temperatura de um sala.
  - Rastreamento
    - O objetivo do controle é fazer que o sistema siga uma trajetória específica (um valor que varia ao longo do tempo);
    - Ex.: Controlar o efetuador para seguir uma trajetória pré-estabelecida.

Estratégias de Controles Não Lineares

- Sistema não linear

$$\dot{\boldsymbol{x}} = \boldsymbol{f}(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{u}, t)$$

- Regulação
  - Objetivo é encontrar um lei de controle $\boldsymbol{u}$ tal que comece em uma região S e faça o estado do sistema $\boldsymbol{x}$ convirja para $\boldsymbol{x}^d$, o estado desejada do sistema que é um vetor de constantes
- Rastreamento
  - Objetivo é encontrar um lei de controle $\boldsymbol{u}$ tal que comece em uma região S e faça o estado do sistema $\boldsymbol{x}$ convirja para $\boldsymbol{x}^d$, o estado desejada do sistema que é um vetor com valores variando ao longo do tempo

Controle em Feedback Linearization

- A ideia é tonar sistema não linear em linear a partir da realimentação e de uma lei de controle adequada
- Existe uma classe de sistemas não lineares que isso é possível
- Considere a classe de sistema não lineares de única entrada afim

$$\frac{d}{dt}\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \cdots \\ x_{n-1} \\ x_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x_2 \\ x_3 \\ \cdots \\ x_n \\ f(\boldsymbol{x}) + g(\boldsymbol{x})u \end{bmatrix}$$

assuma que $g(\boldsymbol{x}) \neq 0$.

Controle em Feedback Linearization

- Se escolher $u = \frac{1}{g(\boldsymbol{x})}[-f(\boldsymbol{x}) + k_v r + \gamma_1 e^{(n-1)} + \cdots + \gamma_{n-1} e^{(1)} + \cdots + \dot{x}_{nd}]$ onde
  - $e = y^d - y$
  - $r = e^{(n-1)} + \gamma_1 e^{(n-2)} + \cdots + \gamma_{n-1} e$ (potência denota derivadas)
- O erro em malha fechada se torna

$$\dot{r} = -k_v r$$

- k_v e γ_i são parâmetros de projeto positivos

Exemplo

- Considere

$$ml^2\ddot{q} + b\dot{q} + mgl\sin q = \tau$$

onde $m = 1$, $l = 1$, $g = 1$ e $b = 0{,}1$

- Proponha uma lei de controle que linearize o sistema ao coloca-lo em malhar fechada

Abordagem Backstepping

- Considere um sistema não linear de segunda ordem com seguinte forma

$$\dot{x}_1 = f_1(x_1) + g_1(x_1)x_2 \qquad (1)$$
$$\dot{x}_2 = f_2(x_1, x_2) + u \qquad (2)$$

- Conhecido como forma de realimentação estrita (*strict feedback form*)
- A variável x_2 em (1) é considerada um controle virtual e é calculada para fazer o subsistema (2) estável
  - Lei de controle x_2^d
  - Ação de controle u vai ser calculado para que o subsistema (2) seja estável e x_2 siga x_2^d

Exemplo

- Considere um sistema não linear

$$\dot{x}_1 = x_2$$
$$\dot{x}_2 = -10\sin(x_1) + u$$

- Projete um controlador *backstepping*

Abordagem Backstepping Generalizada

- Considere um sistema não linear

$$\dot{x}_1 = f_1(x_1) + g_1(x_1)x_2$$
$$\dot{x}_2 = f_2(x_1, x_2) + g_2(x_1, x_2)x_3$$
$$\dot{x}_3 = f_3(x_1, x_2, x_3) + g_3(x_1, x_2, x_3)x_4$$
$$\cdots = \cdots$$
$$\dot{x}_m = f_m(x_1, x_2, \dots, x_m) + g_m(x_1, x_2, \dots, x_m)u$$

  - $x_i \in \mathbb{R}^n, i = 1, 2, \dots, m$ denota o estado do sistema
  - $u \in \mathbb{R}^n$ é o vetor de comandos de controle
  - $f_i, g_i \in \mathbb{R}^{n \times n}$ são funções não lineares
  - g_i são conhecidas e invertível

Abordagem Backstepping Generalizada

- Método
  - Escolhemos um valor desejado x_{2d} para x_2 tal que o subsistema $\dot{x}_1 = f_1(x_1, x_{2d})$ faça seguir estavelmente x_1 para x_{1d}
  - Então, agora, selecionamos x_{3d} para x_3, para que x_2 rastre x_{2d}
  - Esse procedimento é repetido
  - Por fim, escolhemos $u(t)$ tal que x_m para x_{md}

Centro de Informática
UFPE

Integrador Backstepping

- Caso especial quando a entrada de controle é conectada ao sistema através de um integrador ou uma cadeia de integradores
- Considere o sistema

$$\dot{\boldsymbol{x}} = f(\boldsymbol{x}) + g(\boldsymbol{x})\xi, \qquad f(0) = 0 \quad (1)$$
$$\dot{\xi} = u \quad (2)$$

onde ξ é conhecido como um controle virtual.

- Suponha que a lei de controle $u = \alpha(\boldsymbol{x})$ estabiliza o sistema (1)
- Definimos z com a variável de erro $z = \xi - \alpha(\boldsymbol{x})$

Integrador Backstepping

- Façamos $V(\boldsymbol{x})$ a função de Lyapunov aumentada do subsistema (1)

$$V_a(\boldsymbol{x}, z) = V(\boldsymbol{x}) + \frac{1}{2}z^2$$

- Derivando

$$\dot{V}_a(\boldsymbol{x}, z) = \dot{V}(\boldsymbol{x}) + z\dot{z}$$

$$= \frac{\partial V}{\partial \boldsymbol{x}}(f + g\alpha + gz) + z\left(u - \frac{\partial \alpha}{\partial \boldsymbol{x}}(f + g\alpha + gz)\right)$$

$$= \frac{\partial V}{\partial \boldsymbol{x}}(f + g\alpha) + z\left(u - \frac{\partial \alpha}{\partial \boldsymbol{x}}(f + g\alpha + gz) + \frac{\partial V}{\partial \boldsymbol{x}}g\right)$$

$$\leq -W(\boldsymbol{x}) + z\left(u - \frac{\partial \alpha}{\partial \boldsymbol{x}}(f + g\alpha + gz) + \frac{\partial V}{\partial \boldsymbol{x}}g\right)$$

Integrador Backstepping - Exemplo

- Onde u pode ser escolhida tal que a função de *Lyapunov* aumentada é definida negativa
- Exemplo:

$$\dot{x}_1 = -x_1^3 + x_2 \quad (1)$$
$$\dot{x}_2 = x_2^2 + u \quad (2)$$

- Projete um controlador *backstepping*.

Centro de Informática UFPE

Integrador Backstepping - Exemplo

1. Aqui x_2 pode ser tratada como entrada de controle do subsistema (1). Definimos um controle virtual α para (1) e um variável do erro $z = x_2 - \alpha$. Então, a eq. (1) fica

$$\dot{x}_1 = -x_1^3 + z + \alpha$$

2. Função de *Lyapunov* $V(x_1) = \frac{1}{2}x_1^2$

$$\dot{V}(x_1) = x_1(-x_1^3 + z + \alpha)$$

3. Selecionando $\alpha = -kx_1$, onde $k_1 \geq 0$

$$\dot{V}(x_1) = -x_1^4 + x_1 z + -kx_1^2$$
$$\dot{\alpha} = -k_1(-x_1^3 + x_2)$$

Integrador Backstepping - Exemplo

4. A equação de estado virtual

$$\dot{z} = \dot{x}_2 - \dot{\alpha} = x_2^2 + u + k_1(-x_1^3 + x_2)$$

5. Função de *Lyapunov* aumentada $V_a(\boldsymbol{x}, z) = V + \frac{1}{2}z^2$

$$\dot{V}_a = \dot{V} + z\dot{z}$$

$$= -x_1^4 - k_1 x_1^2 + x_1 z + z\left(x_2^2 + u + k_1(-x_1^3 + x_2)\right)$$

$$= -x_1^4 - k_1 x_1^2 + z(x_1 + x_2^2 + u + k_1(-x_1^3 + x_2))$$

6. Selecionando u que estabilize o sistema

$$u = -k_2 z - (x_1 + x_2^2 + k_1(-x_1^3 + x_2))$$

$$u = -k_2(x_2 + k_1 x_1) - (x_1 + x_2^2 + k_1(-x_1^3 + x_2))$$

Sistemas de Estado Realimentado Linearizável

- *State Feedback Linearizable Systems*
- Considere o sistema não-linear

$$\dot{\boldsymbol{x}} = A\boldsymbol{x} + B(\boldsymbol{f}(\boldsymbol{x}) + \boldsymbol{g}(\boldsymbol{x})\boldsymbol{u})$$

onde $\boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^n$, $\boldsymbol{u} \in \mathbb{R}^m$ e (A, B) formam um par controlável.

$\boldsymbol{f}: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$ e $\boldsymbol{g}: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^{m \times m}$ seja *Lipschitz* e $\boldsymbol{g}$ é invertível

- Definimos $\boldsymbol{e} = \boldsymbol{x} - \boldsymbol{x}^d$, onde $\boldsymbol{x}^d$ é constante (prob. de regulação)

$$\boldsymbol{u} = \frac{1}{\boldsymbol{g}(\boldsymbol{x})}(-\boldsymbol{f}(\boldsymbol{x}) + K\boldsymbol{e})$$

onde K é escolhido tal que $A_k = A + BK$ é uma *Hurwitz*.

Sistemas de Estado Realimentado Linearizável

- Isso reduz o termo $\boldsymbol{f}(\boldsymbol{x}) + \boldsymbol{g}(\boldsymbol{x})\boldsymbol{u}$ a $K\boldsymbol{e}$

$$\begin{aligned}\dot{\boldsymbol{e}} = \dot{\boldsymbol{x}} &= A\boldsymbol{x} + B(\boldsymbol{f}(\boldsymbol{x}) + \boldsymbol{g}(\boldsymbol{x})\boldsymbol{u}), \qquad \dot{\boldsymbol{x}}^d = 0 \\ &= A\boldsymbol{e} + A\boldsymbol{x}^d + BK\boldsymbol{e} \\ &= A_k\boldsymbol{e} + A\boldsymbol{x}^d\end{aligned}$$

- O erro em malha fechada é linear, e converge a zero se $A\boldsymbol{x}^d = 0$ ou $\boldsymbol{x}^d = 0$

Exemplo

- Considere

$$\dot{x}_1 = x_2$$
$$\dot{x}_2 = -a\sin(x_1) + u$$

Implementante um controle onde $\begin{bmatrix} x_1^d \\ x_2^d \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{\pi}{4} \\ 0 \end{bmatrix}$

Bibliografia Básica

- Laxmidhar Behera e Indrani Kar. *Intelligent Systems and Control: Principles and Applications*. Oxford University Press, 2009.
- Alireza Rahrooh, Scott Shepard, *Identification of nonlinear systems using NARMAX model*, Nonlinear Analysis: Theory, Methods & Applications, Volume 71, Issue 12, 15 December 2009, Pages e1198-e1202, ISSN 0362-546X, http://dx.doi.org/10.1016/j.na.2009.01.150.

Leituras Recomendas

- Capítulo 1 – Non-linear Control: Primer de Laxmidhar Behera e Indrani Kar. *Intelligent Systems and Control: Principles and Applications*. Oxford University Press, 2009.
- Capítulo 43 – Lyapunov Stability Seções 43.1 e 43.2; William S. Levine, *The Control Systems Handbook: Control System Advanced Methods*, Second Edition