

# **Evolução Diferencial**

Tiago Pessoa Ferreira de Lima  
tpfl2@cin.ufpe.br

# Roteiro

- Introdução
- Histórico
- Motivação
- Conceitos Básicos
- Controle de Parâmetros
- Estratégias
- Variações
- Conclusão

# Introdução

- Evolução Diferencial (ED) é um algoritmo de otimização estocástico, baseado em uma população de soluções, que opera através de passos computacionais similares aos empregados pela maioria dos Algoritmos Evolucionários (AE).

# Histórico

- **1995** - Primeira publicação;
- **1996** - Participa da Primeira Competição Internacional em Computação Evolutiva durante o IEEE Congress on Evolutionary Computation, e conquista o terceiro lugar geral;
- **1997** - Storn, R. e Price, K., "Differential Evolution - a Simple and Efficient Heuristic for Global Optimization over Continuous Spaces", Journal of Global Optimization;
- **1999** - Seção dedicada a DE no livro New Ideas in Optimization;

# Histórico

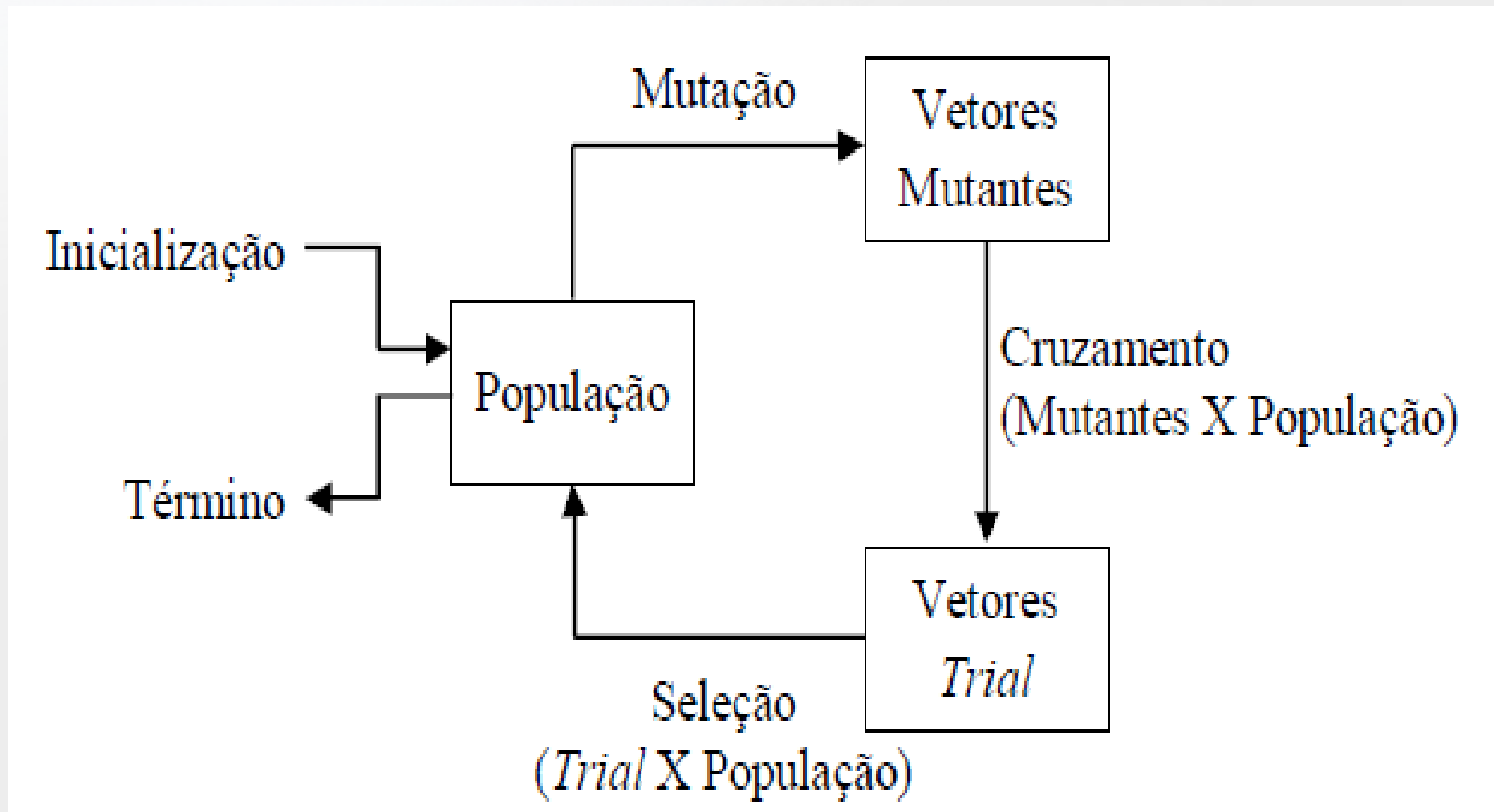
- **2005** - Primeiro livro dedicado a DE, intitulado Differential Evolution: A Practical Approach to Global Optimization;
- **2006** - Sessão especial sobre DE no WCCI-CEC'06;
- **2008** - Avanços na Evolução Diferencial;
- **2009** - Tópico dedicado a DE na IEEE Transactions on Evolutionary Computation.

# Motivação

- Simples e fácil de implementar;
- Performance superior em relação a precisão, velocidade de convergência e robustez
- Poucos parâmetros de controle ( $F$ ,  $Cr$  e  $NP$ ).

# Conceitos Básicos

- **Algoritmo**



# Conceitos Básicos

- **Inicialização**

- Cada indivíduo, também conhecido por genoma ou cromossomo, é um vetor de dimensão D.

$$\mathbf{X}_{i,G} = \{x_{1,i,G}, x_{2,i,G}, \dots, x_{D,i,G}\}$$




# Conceitos Básicos

- **Inicialização**

- Cada indivíduo, também conhecido por genoma ou cromossomo, é um vetor de dimensão D.

$$\mathbf{X}_{i,G} = \{ \mathbf{x}_{1,i,G}, \mathbf{x}_{2,i,G}, \dots, \mathbf{x}_{D,i,G} \}$$

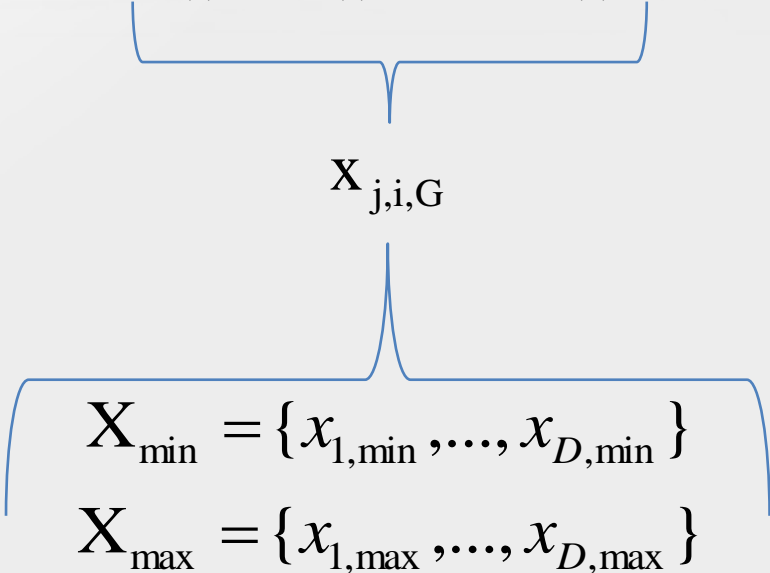

$$\mathbf{x}_{j,i,G}$$

# Conceitos Básicos

- **Inicialização**

- Cada indivíduo, também conhecido por genoma ou cromossomo, é um vetor de dimensão  $D$ .

$$\mathbf{X}_{i,G} = \{ \mathbf{x}_{1,i,G}, \mathbf{x}_{2,i,G}, \dots, \mathbf{x}_{D,i,G} \}$$


$$\mathbf{x}_{j,i,G}$$

$$\mathbf{X}_{\min} = \{ x_{1,\min}, \dots, x_{D,\min} \}$$

$$\mathbf{X}_{\max} = \{ x_{1,\max}, \dots, x_{D,\max} \}$$

# Conceitos Básicos

- **Inicialização**

- Cada indivíduo, também conhecido por genoma ou cromossomo, é um vetor de dimensão D.

$$\mathbf{X}_{i,G} = \{x_{1,i,G}, x_{2,i,G}, \dots, x_{D,i,G}\}$$

$$x_{j,i,G}$$

$$\mathbf{X}_{\min} = \{x_{1,\min}, \dots, x_{D,\min}\}$$

$$\mathbf{X}_{\max} = \{x_{1,\max}, \dots, x_{D,\max}\}$$

$$x_{j,i,0} = x_{j,\min} + \mathit{rand}(0,1)(x_{j,\max} - x_{j,\min})$$

# Conceitos Básicos

- **Mutação**

- Os vetores mutantes são gerados a partir da perturbação dos membros da geração.

$$V_{i,G} = X_{base} + F(X_{r1,G} - X_{r2,G})$$

# Conceitos Básicos

- **Mutação**

- Os vetores mutantes são gerados a partir da perturbação dos membros da geração.

$$V_{i,G} = X_{base} + F(X_{r1,G} - X_{r2,G})$$



São **escolhidos aleatoriamente** a partir do intervalo  $[1, NP]$  e são **mutuamente distintos** entre si

# Conceitos Básicos

- **Mutação**

- Os vetores mutantes são gerados a partir da perturbação dos membros da geração.

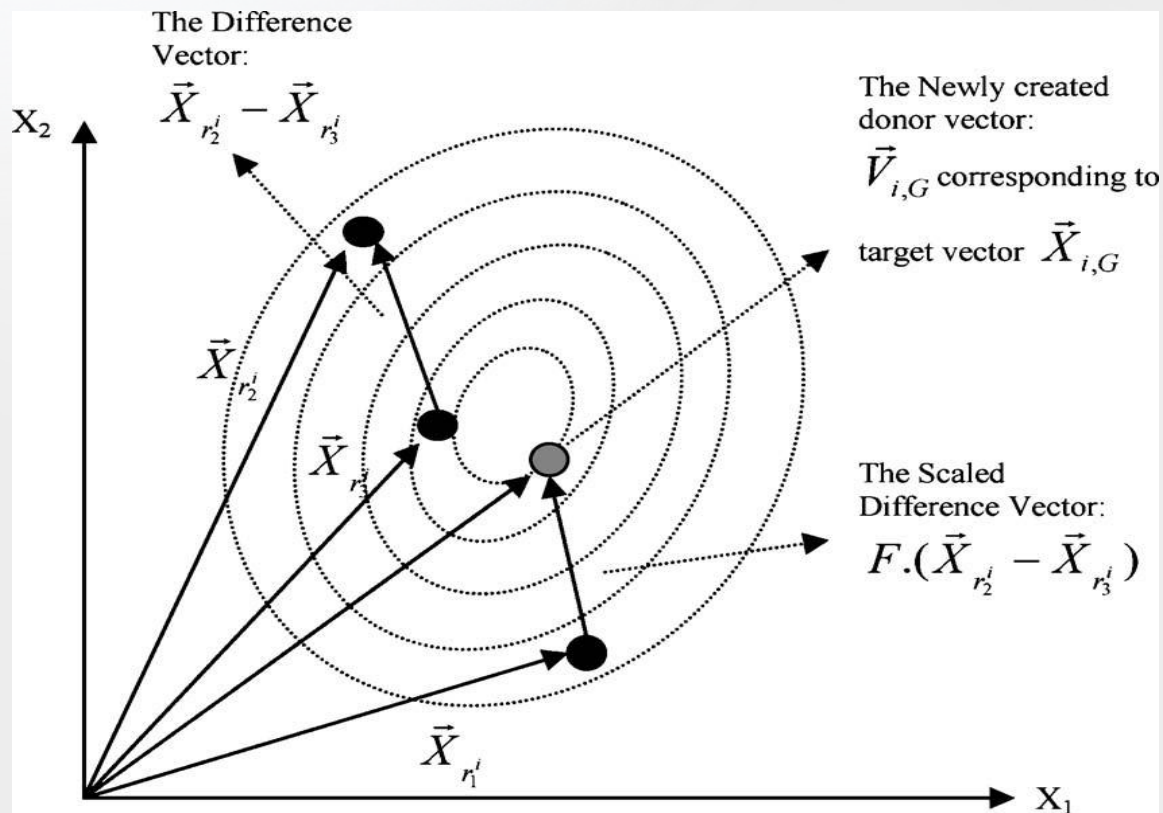
$$V_{i,G} = X_{base} + F(X_{r1,G} - X_{r2,G})$$



É um parâmetro usado para **ponderar a diferença e controlar o ritmo de evolução** da população

# Conceitos Básicos

- **Mutação**



# Conceitos Básicos

- **Cruzamento**

- O cruzamento é introduzido para aumentar a diversidade dos indivíduos que sofreram mutação. Assim, os membros da população e os vetores mutantes trocam atributos para formar o vetor *trial*.

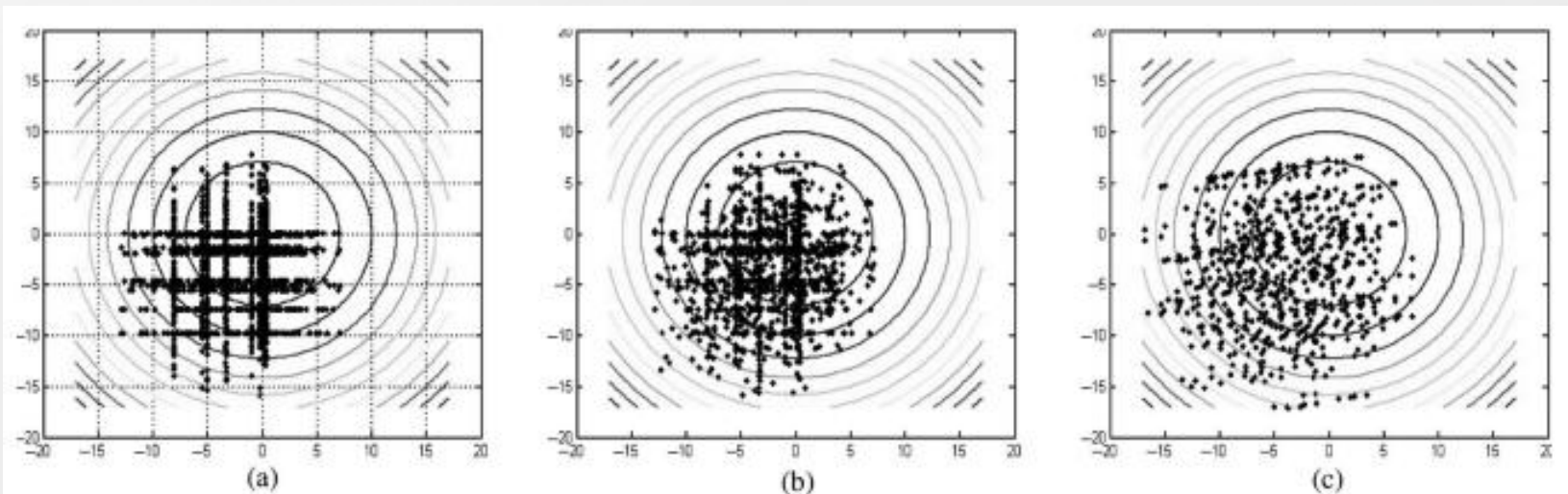
$$U_{i,G} = \{u_{1,i,G}, u_{2,i,G}, \dots, u_{D,i,G}\}$$



# Conceitos Básicos

- **Cruzamento**

- Taxa de cruzamento ( $Cr$ ): atua como um limiar que determina quando o vetor *trial* herda um atributo do vetor mutante ou do vetor atual da população



Distribuições empíricas dos vetores *trial* para três valores diferentes de  $Cr$ .

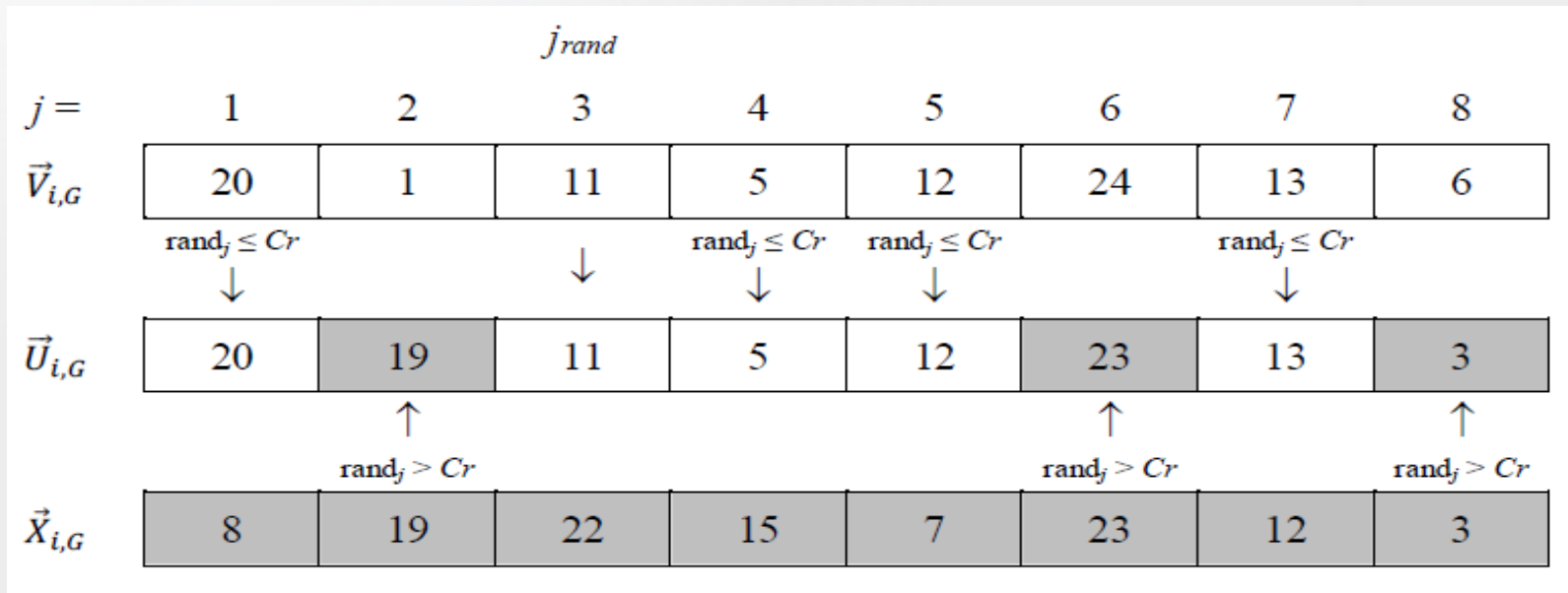
(a)  $Cr = 0$ . (b)  $Cr = 0,5$ . (c)  $Cr = 1,0$ .

# Conceitos Básicos

- **Cruzamento**
  - Binomial (DE/bin);
  - Exponencial (DE/exp);

# Conceitos Básicos

- **Cruzamento**
  - Binomial (DE/bin)\*



\* Este tipo de cruzamento tem similaridades com o cruzamento uniforme, realizado pelos Algoritmos Genéticos

# Conceitos Básicos

- **Cruzamento**
  - Exponencial (DE/exp)

	$n$							
$j =$	1	2	3	4	5	6	7	8
$\vec{V}_{i,G}$	20	1	11	5	12	24	13	6
			início →	$\text{rand}_j \leq Cr$	$\text{rand}_j \leq Cr$	$\text{rand}_j \leq Cr$	$\text{rand}_j \leq Cr$	
				↓	↓	↓	↓	
$\vec{U}_{i,G}$	8	19	22	5	12	24	13	3
	↑	↑	↑					↑
								$\text{rand}_j > Cr$
$\vec{X}_{i,G}$	8	19	22	15	7	23	12	3

# Conceitos Básicos

- **Seleção**

$$X_{i,G+1} = \begin{cases} U_{i,G} & \text{se } f(U_{i,G}) \leq f(X_{i,G}) \\ X_{i,G} & \text{se não} \end{cases}$$

# Conceitos Básicos

- **Término**

```
1  início
2  // INICIALIZAÇÃO
3  Gere aleatoriamente a população inicial de  $NP$  indivíduos
4  // AVALIAÇÃO
5  Avalie cada indivíduo
6  enquanto o critério de parada não for satisfeito faça
7    para  $i = 1$  até  $NP$ 
8      // MUTAÇÃO
9      Selecione o vetor base  $\vec{X}_{base,G}$ 
10     Selecione aleatoriamente da população atual  $\vec{X}_{r1,G}$  sendo  $\vec{X}_{r1,G} \neq \vec{X}_{base,G}$ 
11     Selecione aleatoriamente da população atual  $\vec{X}_{r2,G}$  sendo  $\vec{X}_{r2,G} \neq \vec{X}_{r1,G} \neq \vec{X}_{base,G}$ 
12     Calcule o vetor mutante  $\vec{V}_{i,G} = \vec{X}_{base,G} + F \times (\vec{X}_{r1,G} - \vec{X}_{r2,G})$ 
13     // CRUZAMENTO
14     Gere  $j_{rnd} = \text{randint}(1,D)$ 
15     para  $j = 1$  até  $D$ 
16       se  $j = j_{rnd}$  ou  $\text{rand}(0,1) \leq Cr$ 
17          $u_{j,i,G} = v_{j,i,G}$ 
18       se não
19          $u_{j,i,G} = x_{j,i,G}$ 
20     fim se
21   fim para
22   // AVALIAÇÃO
23   Avalie o novo indivíduo  $\vec{U}_{i,G}$ 
24   // SELEÇÃO
25   se  $f(\vec{U}_{i,G}) \leq f(\vec{X}_{i,G})$ 
26      $\vec{X}_{i,G+1} = \vec{U}_{i,G}$ 
27   se não
28      $\vec{X}_{i,G+1} = \vec{X}_{i,G}$ 
29   fim se
30 fim para
31 fim enquanto
32 fim
```

# Conceitos Básicos

- **Término**

- A condição de término pode ser definida por:
  - Por um número máximo de gerações;
  - Quando o melhor valor da função objetivo não apresentar mudança em sucessivas gerações;
  - A função objetivo alcançar um valor pré-estabelecido.

# Controle de Parâmetros

- Apesar do pequeno número de parâmetros, um dos principais problemas na Evolução Diferencial é a sua forte dependência de parâmetros.
- Indicações de Storn e Prince:
  - $F \in [0.5, 1.0]$
  - $CR \in [0.8, 1.0]$
  - $NP = 10D$



# Controle de Parâmetros

- Como a Evolução Diferencial é um processo dinâmico e adaptativo, usar parâmetros rígidos parece ir contra estes princípios. Para tratar esta questão, métodos de configuração automática têm sido desenvolvidos e são classificados como:
  - Determinístico;
  - Adaptativo;
  - Autoadaptativo.

# Controle de Parâmetros

- Determinístico:

Ocorre quando o valor dos parâmetros é alterado por alguma regra determinística sem uso de nenhum feedback do processo de busca.

# Controle de Parâmetros

- Adaptativo:  
Ocorre quando alguma forma de feedback do processo de busca é usada para determinar a direção e/ou magnitude da alteração do parâmetro.

# Controle de Parâmetros

- Autoadaptativo:

Ocorre quando os parâmetros a serem configurados são codificados na representação do indivíduo e passam a sofrer ação dos operadores de mutação e recombinação.

# Estratégias

- A fim de facilitar a discriminação das principais variantes da Evolução Diferencial, a notação ***DE/x/y/z*** foi introduzida, onde:
  - ***x***: especifica o vetor a ser mutado;
  - ***y***: determina o número de diferenças utilizadas na etapa da mutação; e
  - ***z***: indica o esquema de cruzamento adotado;

# Estratégias

- ***DE/rand/1***

- Mutaçãõ:

$$V_{i,G} = X_{r0,G} + F(X_{r1,G} - X_{r2,G})$$

- ***DE/rand/2***

- Mutaçãõ:

$$V_{i,G} = X_{r0,G} + F(X_{r1,G} - X_{r2,G}) + F(X_{r3,G} - X_{r4,G})$$

# Estratégias

- ***DE/best/1***

- Mutaçãõ:

$$V_{i,G} = X_{best,G} + F(X_{r1,G} - X_{r2,G})$$

- ***DE/best/2***

- Mutaçãõ:

$$V_{i,G} = X_{best,G} + F(X_{r1,G} - X_{r2,G}) + F(X_{r3,G} - X_{r4,G})$$

# Estratégias

- ***DE/current-to-best/1***

- Mutaçãõ:

$$V_{i,G} = X_{i,G} + F(X_{best,G} - X_{i,G})$$

- ***DE/current-to-best/2***

- Mutaçãõ:

$$V_{i,G} = X_{i,G} + F(X_{best,G} - X_{i,G}) + F(X_{r1,G} - X_{r2,G})^*$$

\* Tem similaridade com a fórmula de atualização da velocidade do PSO



# Estratégias

- Ainda não existe um método para se identificar a priori qual a melhor estratégia a se adotar para um problema. A escolha é baseada em tentativa e erro.

# Estratégias

- **Bioinformática**
  - Otimização de bioprocessos: *DE/rand/1/bin* [S140]
- **Reconhecimento de Padrões**
  - Clusterização de dados: *DE/rand/1/bin* [S140]
  - Extração de características : *DE/rand/1/bin* [S153]
- **Redes Neurais Artificiais**
  - Treinamento de redes feed-forward: *DE/rand/1/bin* [S157] e *DE/current-to-best/1/bin* [S159]
- **Sistemas de Controle**
  - Sistema de Identificação: *DE/rand/1/bin* [S123-S126]

# Variações

- **Differential Evolution Using Trigonometric Mutation;**
- **DE/rand/1/Either-Or**
- **Self-adaptative Differential Evolution (jDE)**
- **Adaptive Differential Evolution with optional external archive (JADE)**
- **Differential Evolution with global and local neighborhoods (DEGL)**
- **Differential Evolution with Adaptive Selection of Mutation Strategies (SaDE)**
- **Hybride Differential Evolution Algorithms**

# Variações

- **Differential Evolution Using Trigonometric Mutation**
  - Proposta por Fan e Lampinen (2003) para acelerar o desempenho da Evolução Diferencial;
  - Para implementar este esquema, são necessários 3 vetores aleatórios e distintos entre si.

# Variações

- **Differential Evolution Using Trigonometric Mutation**

- A partir dos 3 vetores selecionados, são calculados os coeficientes de ponderação de acordo com as equações:

$$p' = |f(X_{r1,G})| + |f(X_{r2,G})| + |f(X_{r3,G})|$$

$$p_1 = |f(X_{r1,G})| / p'$$

$$p_2 = |f(X_{r2,G})| / p'$$

$$p_3 = |f(X_{r3,G})| / p'$$

# Variações

- **Differential Evolution Using Trigonometric Mutation**

- Seja  $\tau$  a taxa de mutação trigonométrica no intervalo  $[0,1]$ .  
Então, o esquema de mutação trigonométrico pode ser expresso como:

$$V_{i,G} = \begin{cases} (X_{r1,G} + X_{r2,G} + X_{r3,G})/3 + (p_2 - p_1) \cdot (X_{r1,G} - X_{r2,G}) + (p_3 - p_2) \cdot (X_{r2,G} - X_{r3,G}) + (p_1 - p_3) \cdot (X_{r3,G} - X_{r1,G}) & \text{se } \text{rand}(0,1) \leq \tau \\ X_{r1,G} + F \cdot (X_{r2,G} - X_{r3,G}) & \text{se não} \end{cases}$$

# Variações

- **DE/rand/1/Either-Or**

- Nesta variação, proposta por Prince *et al.* (2005), o vetor trial é um puro mutante com a probabilidade PF ou o resultado de recombinação com a probabilidade 1-PF.

$$U_{i,G} = \begin{cases} X_{base,G} + F \cdot (X_{r1,G} - X_{r2,G}) & \text{se } \text{rand}(0,1) \leq PF \\ X_{base,G} + K \cdot (X_{r1,G} + X_{r2,G} - 2X_{base,G}) & \text{se não} \end{cases}$$

- Prince *et al.* (2005). recomendam o valor  $k = (F+1)/2$  como uma boa escolha para o parâmetro k para um dado F.
- Esta variação apresenta resultados competitivos contra as estratégias *rand/1/bin* e *current-to-best/1/bin* em recentes estudos (Das *et al.*, 2009).

# Variações

- **Self-adaptative Differential Evolution (jDE)**

- Variação proposta por Brest e Maucec (2006) para evitar o ajuste manual dos parâmetros  $F$  e  $Cr$  através da inclusão de dois valores extras no intervalo  $[0,1]$  em cada indivíduo.

$$\mathbf{X}_{i,G} = \{x_{1,i,G}, x_{2,i,G}, \dots, x_{D,i,G}, F_{i,G}, CR_{i,G}\}$$



# Variações

- **Self-adaptative Differential Evolution (jDE)**

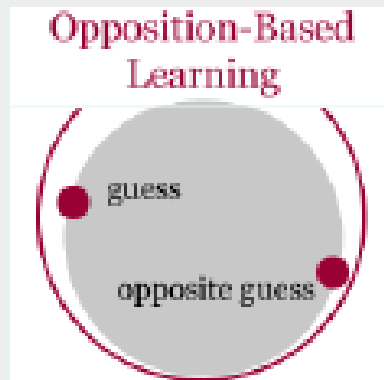
- A cada geração, o indivíduo  $X_i$  tem seus parâmetros  $F$  e  $CR$  alterados com o seguinte esquema:

$$F_i = \begin{cases} F_l + F_u \cdot U_{[0,1]} & \text{se } U_{[0,1]} \leq \tau_1 \\ F_i & \text{se não} \end{cases}$$

$$Cr_i = \begin{cases} U_{[0,1]} & \text{se } U_{[0,1]} \leq \tau_2 \\ Cr_i & \text{se não} \end{cases}$$

# Variações

- **Opposition-Based Differential Evolution (ODE)**
  - Variação proposta por Rahnamayan *et al.* (2008) baseada na ideia de que pode-se melhorar a chance de uma solução candidata estar próxima do ótimo global checando simultaneamente a “solução oposta”.



# Variações

- **Opposition-Based Differential Evolution (ODE)**

- Definição de número oposto:

- Dado um número real  $x \in [a,b]$ , seu número oposto é definido por:

$$\bar{x} = a + b - x$$

- Definição de ponto oposto:

- O ponto oposto  $\bar{\mathbf{P}} = \{\bar{x}_1, \bar{x}_2, \dots, \bar{x}_D\}$  é definido por:

- $\bar{x}_i = a_i + b_i - x_i$

# Variações

- **Opposition-Based Differential Evolution (ODE)**
  - Na inicialização, a população “oposta” é calculada e os NP melhores indivíduos são selecionados.
  - Da mesma forma, a cada geração, a população oposta é calculada com uma probabilidade  $J_r$  ( $\epsilon(0,0.004)$ ).

# Variações

- **Adaptive Differential Evolution with optional external archive (JADE)**

- Variação proposta por Zhang e Sanderson (2009) que utiliza a estratégia *DE/current-to-pbest*, um arquivo opcional e adapta os parâmetros *CR* e *P*;

- *DE/current-to-pbest/2*

- Mutação:

$$V_{i,G} = X_{i,G} + F_i(X_{best,G}^p - X_{i,G}) + F_i(X_{r1,G} - X_{r2,G})^*$$

\* Extens o da estratégia DE/current-to-best

# Variações

- Adaptive Differential Evolution with optional external archive (JADE)
  - Algoritmo

```
1 begin
2   Set  $\mu_{CR} = 0.5$ ;  $\mu_F = 0.5$ ;  $A = \emptyset$ 
3   Create a random initial population
4   while termination criterion not met do
5      $S_F = \emptyset$ ;  $S_{CR} = \emptyset$ 
6     for  $i = 1$  to  $NP$  do
7       Generate  $CR_i = randn_i(\mu_{CR}, 0.1)$ ,  $F_i = randc_i(\mu_F, 0.1)$ 
8       Randomly choose  $\mathbf{x}_{best,g}^p$  as one of the 100p% best vectors
9       Randomly choose  $\mathbf{x}_{r1,g} \neq \mathbf{x}_{i,g}$  from current population  $\mathbf{P}$ 
10      Randomly choose  $\mathbf{x}_{r2,g} \neq \mathbf{x}_{r1,g} \neq \mathbf{x}_{i,g}$  from  $\mathbf{P} \cup \mathbf{A}$ 
11       $\mathbf{v}_{i,g} = \mathbf{x}_{i,g} + F_i(\mathbf{x}_{best,g}^p - \mathbf{x}_{i,g}) + F_i(\mathbf{x}_{r1,g} - \mathbf{x}_{r2,g})$ 
12      Generate  $j_{rand} = randint(1, D)$ 
13      for  $j = 1$  to  $D$  do
14        if  $j = j_{rand}$  or  $rand(0, 1) < CR_i$  then
15           $u_{j,i,g} = v_{j,i,g}$ 
16        else
17           $u_{j,i,g} = x_{j,i,g}$ 
18        end
19      end
20      if  $f(\mathbf{x}_{i,g}) \leq f(\mathbf{u}_{i,g})$  then
21         $\mathbf{x}_{i,g+1} = \mathbf{x}_{i,g}$ 
22      else
23         $\mathbf{x}_{i,g+1} = \mathbf{u}_{i,g}$ ;  $\mathbf{x}_{i,g} \rightarrow \mathbf{A}$ ;  $CR_i \rightarrow S_{CR}$ ;  $F_i \rightarrow S_F$ 
24      end
25    end
26    Randomly remove solutions from  $\mathbf{A}$  so that  $|\mathbf{A}| \leq NP$ 
27     $\mu_{CR} = (1 - c) \cdot \mu_{CR} + c \cdot mean_A(S_{CR})$ 
28     $\mu_F = (1 - c) \cdot \mu_F + c \cdot mean_L(S_F)$ 
29  end
30 end
```

# Variações

- **Differential Evolution with global and local neighborhoods (DEGL)**
  - Foi desenvolvida por Das *et al.* (2009) no qual uma família de variantes da estratégia *DE/current-to-best/1* é proposta.
  - Propõe dois modelos de vizinhança:
    - Modelo de vizinhança local;
    - Modelo de vizinhança global.

# Variações

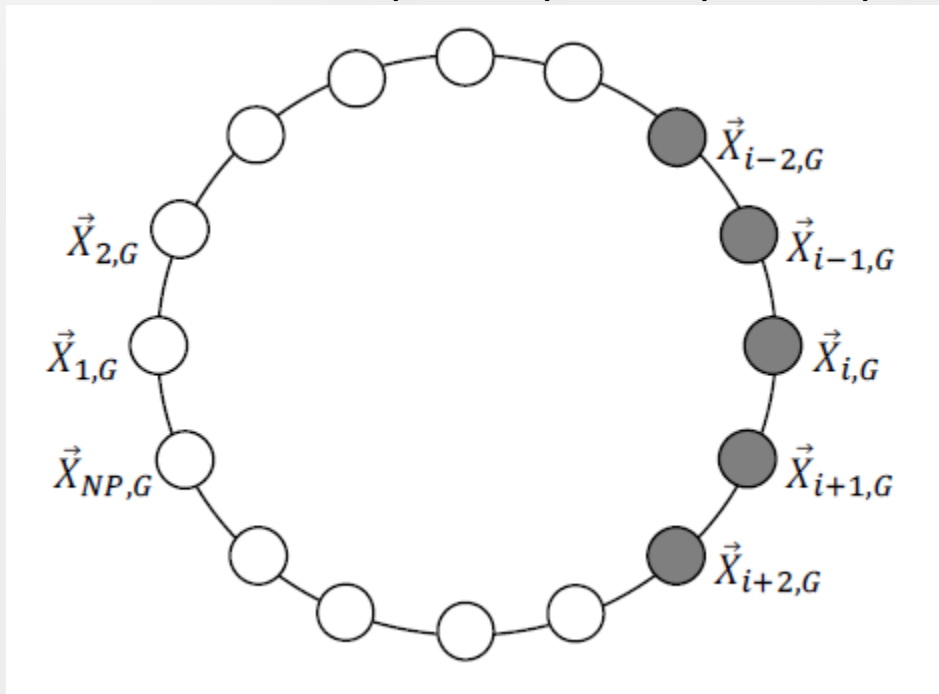
- **Differential Evolution with global and local neighborhoods (DEGL)**
  - A vizinhança de um vetor é formada pelo conjunto de vetores ao qual se está conectado.
  - Cada vetor possui uma vizinhança de raio  $k$ , onde  $k$  é um inteiro tal que  $0 < k \leq ((NP-1)/2)$ .



# Variações

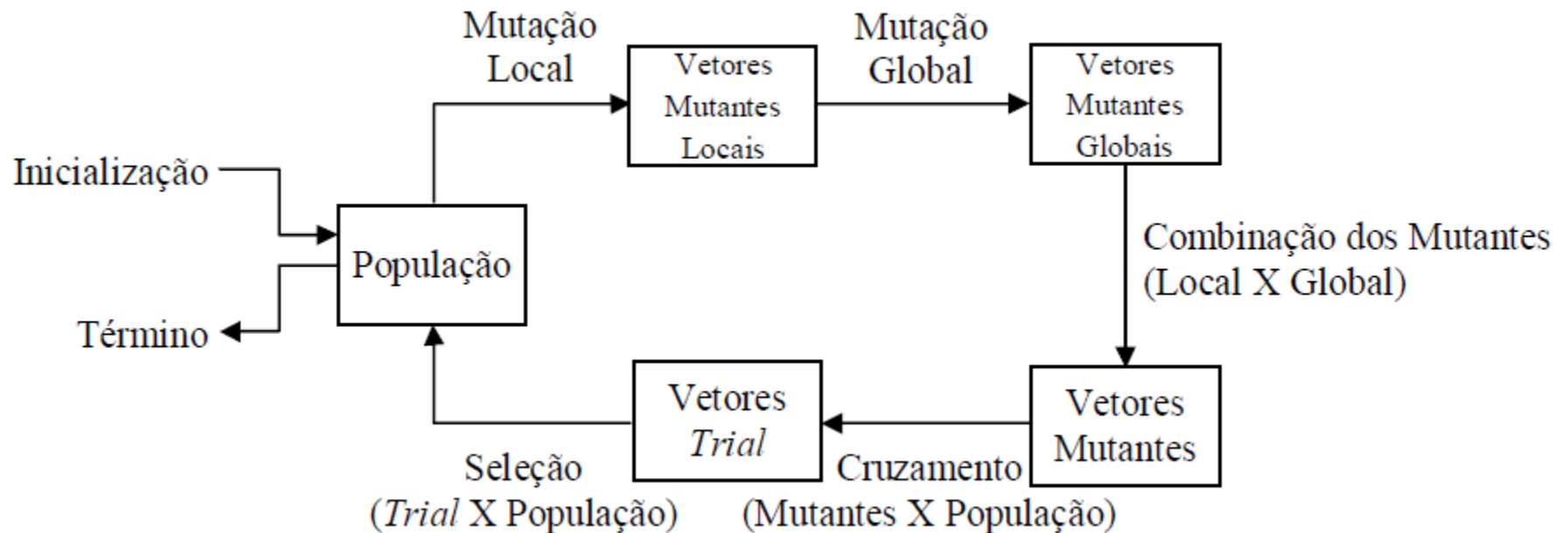
- **Differential Evolution with global and local neighborhoods (DEGL)**

- A vizinhança possui formato de anel, ou seja, o vetor  $X_{i,G}$  é vizinho dos vetores  $X_{i-2,G}$ ,  $X_{i-1,G}$ ,  $X_{i+1,G}$ ,  $X_{i+2,G}$  para  $k = 2$ .



# Variações

- **Differential Evolution with global and local neighborhoods (DEGL)**
  - Algoritmo



# Variações

- **Differential Evolution with global and local neighborhoods (DEGL)**

- Mutação Local:

- Na mutação da DEGL, é criado um vetor mutante local para cada membro da população usando o melhor vetor da vizinhança deste membro e mais dois outros vetores selecionados aleatoriamente também de sua vizinhança.

$$L_{i,G} = X_{i,G} + \alpha(X_{n\_besti,G} - X_{i,G}) + \beta(X_{p,G} - X_{q,G})^*$$

\*  $p \neq q \neq i$

# Variações

- **Differential Evolution with global and local neighborhoods (DEGL)**

- Mutação Global:

- De forma similar, o vetor mutante global é criado

$$G_{i,G} = X_{i,G} + \alpha(X_{g\_best,G} - X_{i,G}) + \beta(X_{r1,G} - X_{r2,G})^*$$

\*  $r1 \neq r2 \neq i$

# Variações

- **Differential Evolution with global and local neighborhoods (DEGL)**
  - Depois de criados os vetores mutantes local e global, eles são combinados a fim de formar o vetor mutante

$$V_{i,G} = w.G_{i,G} + (1-w).L_{i,G}^*$$

\*A estratégia DE/current-to-best/1 é equivalente à DEGL quando  $w$  for 1

# Variações

- **Differential Evolution with global and local neighborhoods (DEGL)**
  - Esquemas de seleção e adaptação de  $w$ :
    - Peso Incremental
    - Peso Randômico
    - Peso Autoadaptativo

# Variações

- **Differential Evolution with global and local neighborhoods (DEGL)**

- Esquemas de seleção e adaptação de  $w$ :
  - Peso Incremental: todos os vetores têm o mesmo  $w$  que é iniciado em 0 e é incrementado até 1 durante o processo.

- Linear

$$W_G = \frac{G}{G_{\max}}$$

- Exponencial

$$W_G = \exp\left(\frac{G}{G_{\max}} \cdot \ln(2)\right) - 1$$

# Variações

- **Differential Evolution with global and local neighborhoods (DEGL)**
  - Esquemas de seleção e adaptação de  $w$ :
    - Peso Randômico: o peso de cada vetor varia de acordo com uma distribuição randômica uniforme entre 0 e 1.

$$W_{i,G} = rand(0,1)^*$$

\*A aleatoriedade pode diminuir a velocidade de convergência



# Variações

- **Differential Evolution with global and local neighborhoods (DEGL)**
  - Esquemas de seleção e adaptação de  $w$ :
    - Peso Autoadaptativo: cada vetor possui seu próprio  $w$ .

$$A_{i,G} = \{ \underbrace{X_{1,i,G}, X_{2,i,G}, \dots, X_{D,i,G}}_{X_{i,G}}, \underbrace{W_{i,G}}_{S_{i,G}} \}$$

# Variações

- **Differential Evolution with global and local neighborhoods (DEGL)**

- Esquemas de seleção e adaptação de  $w$ :
  - Peso Autoadaptativo
    - $X_{i,G}$  evolui através dos vetores mutantes local e global.
    - $S_{i,G}$  evolui apenas de forma global

$$w'_{i,G} = w_{i,G} + F \cdot (w_{g\_best,G} - w_{i,G}) + F \cdot (w_{r1,G} - w_{r2,G})$$

# Variações

- **Differential Evolution with Adaptive Selection of Mutation Strategies (SaDE)**
  - Proposto por Quin *et al.* (2009) com a característica do emprego de múltiplas estatégias, sendo elas:
    - Estratégia 1: rand/1;
    - Estratégia 2: rand-to-best/2;
    - Estratégia 3: rand/2;
    - Estratégia 4: current-to-rand/1.

# Variações

- **Differential Evolution with Adaptive Selection of Mutation Strategies (SaDE)**
  - O indivíduo é codificado com probabilidades relacionadas à aplicação das estratégias de mutação, probabilidades de cruzamento CR, para cada uma das estratégias e um parâmetro F geral.

$$\mathbf{X}_{i,G} = \{ \mathbf{x}_{1,i,G}, \mathbf{x}_{2,i,G}, \dots, \mathbf{x}_{D,i,G}, p_i^1, p_i^2, p_i^3, p_i^4, CR_i^1, CR_i^2, CR_i^3, CR_i^4, F_i \}^*$$

$$* \sum_{k=1}^4 p_i^k = 1$$

# Variações

- **Differential Evolution with Adaptive Selection of Mutation Strategies (SaDE)**
  - Quando a população inicial é gerada, as probabilidades de cada indivíduo são fixas em 0.25
  - Durante as PA\* gerações seguintes, para cada indivíduo, o número de gerações bem sucedidas  $n_s^k$  relativa a uma determinada mutação é salvo. De forma análoga é salvo o número de gerações mal sucedidas  $n_f^k$

\*PA se refere ao período de aprendizado

# Variações

- **Differential Evolution with Adaptive Selection of Mutation Strategies (SaDE)**
  - No final do período de aprendizado, as probabilidades são atualizadas para cada indivíduo  $X_i$  em cada geração  $G$ , de acordo com a fórmula:

$$p_i^k = \frac{S_i^k}{\sum_{k=1}^4 S_i^k}$$

onde:

$$S_i^k = \frac{\sum_{g=G-PA}^{G-1} n_s^k}{\sum_{g=G-PA}^{G-1} n_s^k + \sum_{g=G-PA}^{G-1} n_f^k} + \epsilon$$

# Variações

- **Differential Evolution with Adaptive Selection of Mutation Strategies (SaDE)**
  - O ajuste do parâmetro CR também é autoadaptado. Quando a população é gerada,  $CR_i^k$  é fixado em 0.5
  - Durante as primeiras PA gerações, cada  $CR_i^k$  é atualizado da seguinte forma:

$$CR_i^k = N[CR_i^k, 0.1]$$

# Variações

- **Differential Evolution with Adaptive Selection of Mutation Strategies (SaDE)**
  - Durante o período de aprendizagem, para cada estratégia de mutação, o conjunto de cruzamento que levam à geração de descendentes bem sucedidos  $CR_s^k$  são salvos.
  - Depois do período de aprendizado,  $CR_i^k$  é atualizado usando-se a mediana do conjunto  $CR_s^k$  no esquema

$$CR_i^k = N[\textit{mediana}(CR_s^k), 0.1]$$



# Variações

- **Differential Evolution with Adaptive Selection of Mutation Strategies (SaDE)**
  - A atualização do parâmetro  $F$  não utiliza nenhuma forma de feedback e é de acordo com a equação abaixo:

$$F_i = N[0.5, 0.3]$$

# Variações

- **Hybride Differential Evolution Algorithms**
  - A Evolução Diferencial tem sido hibridizada com vários algoritmos de otimização global como:
    - Otimização por Enxame de Partículas (PSO);
    - Sistemas de Colônias de Formigas (AIS);
    - Resfriamento Simulado (SA);

# Conclusão

- Evolução Diferencial constitui uma vertente interessante dentro da Computação Evolutiva. Tal abordagem se mostra bastante simples e eficiente em diversos contextos.

# Referências

- Storn, R. e Price, K., "Differential Evolution - a Simple and Efficient Adaptive Scheme for Global Optimization over Continuous Spaces", Technical Report TR-95-012, ICSI, 1995.
- Storn, R. e Price, K., "Differential Evolution - a Simple and Efficient Heuristic for Global Optimization over Continuous Spaces", Journal of Global Optimization, Kluwer Academic Publishers, vol. 11, pp. 341 - 359, 1997.
- Rahnamayan, S., Tizhoosh, H. R., Salama, M. M. A., "Opposition-Based Differential Evolution Algorithms", Proceedings of IEEE Congress on Evolutionary Computation, 2006.
- Dasrputa, S., Das, S., Biswas, A. e Abraham, A., "On Stability and Convergence of the Population-Dynamics in Differential Evolution", AI Communications, vol. 22, 2009.
- Brest, J., Greiner, S., Boškovič, B., Mernik, M. e Zumer, V., "Self-Adapting Control Parameters in Differential Evolution: A Comparative Study on Numerical Benchmark Problems", IEEE Transactions on Evolutionary Computation, 2006.