ES 413 Sinais e Sistemas

Fundamentos Matemáticos

Prof. Aluizio Fausto Ribeiro Araújo

Depto. of Sistemas de Computação

Centro de Informática - UFPE

Introdução

Conteúdo

- **Números Complexos**
- **Sinais Senoidais**
- **Plotagem de Sinais**
- **Expansão em Frações Parciais**
- **Vetores e Matrizes**
- **Miscelânea**

Números Complexos (i)

- **História do Sistema Numérico**
  - Inicialmente considerava-se apenas números naturais (inteiros positivos) para enumerar objetos e organismos no dia a dia (e.g., crianças, pedras).
  - Inclusão de frações para necessidade de medir continuamente quantidades variáveis advindas da agricultura (e.g., comprimento de um campo, peso de mercadorias). Os egípcios e os babilônicos sabiam utilizar frações.
  - Pitágoras descobriu os números irracionais que só foram incluídos no sistemas de números mais tarde com Descartes.
  - Os números negativos foram entendidos por hindus medievais (em meados do século 10). Foi reconhecido a existência de dois valores de raiz quadrada para um número positivo. Mais tarde, em Florença e Veneza renascentistas, o sistema bancário fez uso de números negativos para retiradas maiores que depósitos.
  - Na época de Descartes e Newton os números imaginários vieram a ser incluídos no sistema numérico.
    - Em 1777 o matemático suiço Leonhard Euler introduziu notação *i* que depois virou *j* devido à notação padrão de corrente em Eng. Elétrica.

Números Complexos (ii)

- **Definição de Número Imaginário**

  $$j^2 = -1$$

  e

  $$\sqrt{-1} = \pm j$$

  Por exemplo,

  $$\sqrt{-4} = \sqrt{4} \times \sqrt{-1} = \pm 2j$$

- **Origens de Números Complexos**
  - Aceitos por matemáticos em passo intermediário no método para solucionar equação cúbica (Gerolamo Cardano, 1545):

    $x^3 + ax + b = 0, \quad$ cuja solução é :

    $$x = \sqrt[3]{-\frac{b}{2} + \sqrt{\frac{b^2}{4} + \frac{a^3}{27}}} + \sqrt[3]{-\frac{b}{2} - \sqrt{\frac{b^2}{4} + \frac{a^3}{27}}}$$

    Para, $a = -15, b = -4; \quad$ tem-se $x = \sqrt[3]{2 + \sqrt{-121}} + \sqrt[3]{2 - \sqrt{-121}}$

Números Complexos (iii)

- **Utilidade de um Número Complexo**
  - Problemas do mundo real devem iniciar a partir de números reais e terminar neles também, contudo, os cálculos para obter os resultados podem seguir "atalhos" quando se utiliza números complexos.
- **Álgebra de Números Complexos**
  - Notação de números complexos:

$$z = a + jb, \quad \text{onde} \begin{cases} \text{parte real (abscissa) :} & \operatorname{Re} z = a \\ \text{parte imaginária (ordenada) :} & \operatorname{Im} z = b \end{cases}$$

Em coordenadas polares tem-se :

$$a = r\cos q$$

$$b = rsenq; \quad \text{assim,}$$

$$z = a + jb = r\cos q + j\,rsenq \;\therefore$$

$$z = r\left(\cos q + jsenq\right)$$

Números Complexos (iv)

- **Álgebra de Números Complexos**
  - A fórmula de Euler determina:

$$e^{jq} = \cos q + j\,sen q,$$

Prova - se através da série de Maclaurin para expandir os termos :

$$e^{jq} = 1 + jq + \frac{(jq)^2}{2!} + \frac{(jq)^3}{3!} + \frac{(jq)^4}{4!} + \frac{(jq)^5}{5!} + \frac{(jq)^6}{6!} + \ldots$$

$$= 1 + jq - \frac{q^2}{2!} - j\frac{q^3}{3!} + \frac{q^4}{4!} + j\frac{q^5}{5!} - \frac{q^6}{6!} - \ldots$$

$$\cos q = 1 - \frac{q^2}{2!} + \frac{q^4}{4!} - \frac{q^6}{6!} + \frac{q^8}{8!} - \ldots$$

$$sen q = q - \frac{q^3}{3!} + \frac{q^5}{5!} - \frac{q^7}{7!} + \ldots$$

Números Complexos (iv.a)

- **Álgebra de Números Complexos**

Série de Maclaurin é a expansão da série de Taylor em torno de zero.

Esta série recebeu estenome devido ao matemático escocês MacLaurin

$$f(x) = f(0) + f^{|}(0)x + \frac{f^{(2)}(0)}{2!}x^2 + \frac{f^{(3)}(0)}{3!}x^3 + \ldots + \frac{f^{(n)}(0)}{n!}x^n + \ldots$$

Exemplos de séries de MacLaurin

$$\frac{1}{1-x} = 1 + x + x^2 + x^3 + x^4 + \ldots \qquad -1 < x < 1$$

$$e^x = 1 + x + \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{6}x^3 + \frac{1}{24}x^4 + \ldots \qquad -\infty < x < \infty$$

Números Complexos (v)

- **Álgebra de Números Complexos**
  - A fórmula de Euler determina:

$$e^{jq} = \cos q + j\,senq,$$

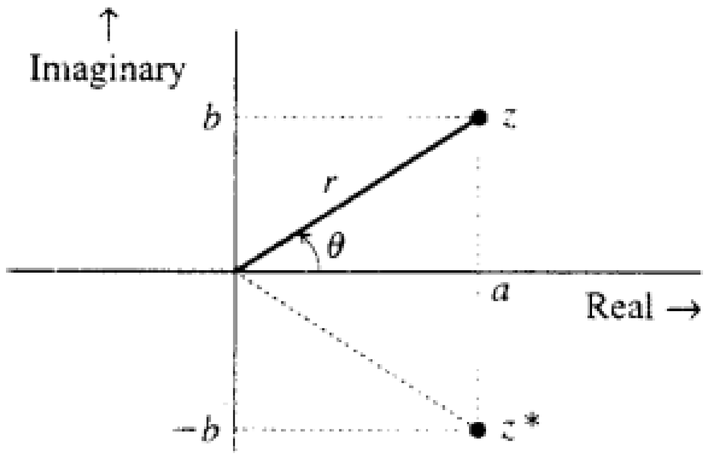

Figure B.2 Representation of a number in the complex plane.

Números Complexos (vi)

- **Álgebra de Números Complexos**
  - Tem-se então as equivalências:

$$e^{jq} = \cos q + j\, sen q,$$

$$z = a + j\,b \therefore z = r\,e^{jq}$$

Número complexo pode ser expresso em forma cartesiana ou polar :

$$a = r\cos q, \qquad b = r sen q;$$

$$r = \sqrt{a^2 + b^2}, \qquad q = \tan^{-1}\left(\frac{b}{a}\right)$$

  - Em termos de magnitude e ângulo tem-se:

$$z = |z| e^{j\angle z}, \quad \text{onde } |z| = r, \quad \angle z = q,$$

Como conseqüência :

$$\frac{1}{z} = \frac{1}{re^{jq}} = \frac{1}{r} e^{-jq} = \frac{1}{|z|} e^{-j\angle z}$$

Números Complexos (vii)

- **Álgebra de Números Complexos**
  - Definição de conjugado de um número complexo imagem de z com respeito ao eixo horizontal):

    $$z^* = a - jb = r\,e^{-jq} \;\therefore z^* = |z|r\,e^{-j\angle z}$$

  - A soma de um número complexo e seu conjugado é um número real:

    $$z + z^* = (a + jb) + (a - jb) = 2a = 2\,\mathrm{Re}\,z$$

  - O produto de um número complexo e seu conjugado é também um número real:

    $$zz^* = (a + jb)(a - jb) = a^2 + j\,ab - j\,ab - b^2(j)(-j) \therefore$$

    $$zz^* = a^2 + b^2 = |z|^2$$

Números Complexos (viii)

- **Álgebra de Números Complexos**
  - No plano complexo, um número complexo é representado por um ponto distando *r* da origem, formando um ângulo *?* com o eixo horizontal. Esta maneira é válida para representar casos particulares tais como:

$$e^{\pm jnp} = -1, \qquad n \text{ é um inteiro ímpar}$$

$$e^{\pm j2np} = 1, \qquad n \text{ é um inteiro}$$

$$e^{jp/2} = j,$$

$$e^{-jp/2} = -j,$$

de modo geral pode-se dizer que

$$e^{\pm jnp/2} = \begin{cases} \pm j, & \text{para } n = 1,5,9,13,\ldots \\ \mp j, & \text{para } n = 3,7,11,15,\ldots \end{cases}$$

Lembrando que $a = r\cos q, b = rsenq$

Números Complexos (ix)

- **Álgebra de Números Complexos**
  - Gráfico dos pontos particulares:

$$e^{\pm jnp} = -1; \quad e^{\pm j2np} = 1; \quad e^{jp/2} = j; \quad e^{-jp/2} = -j$$

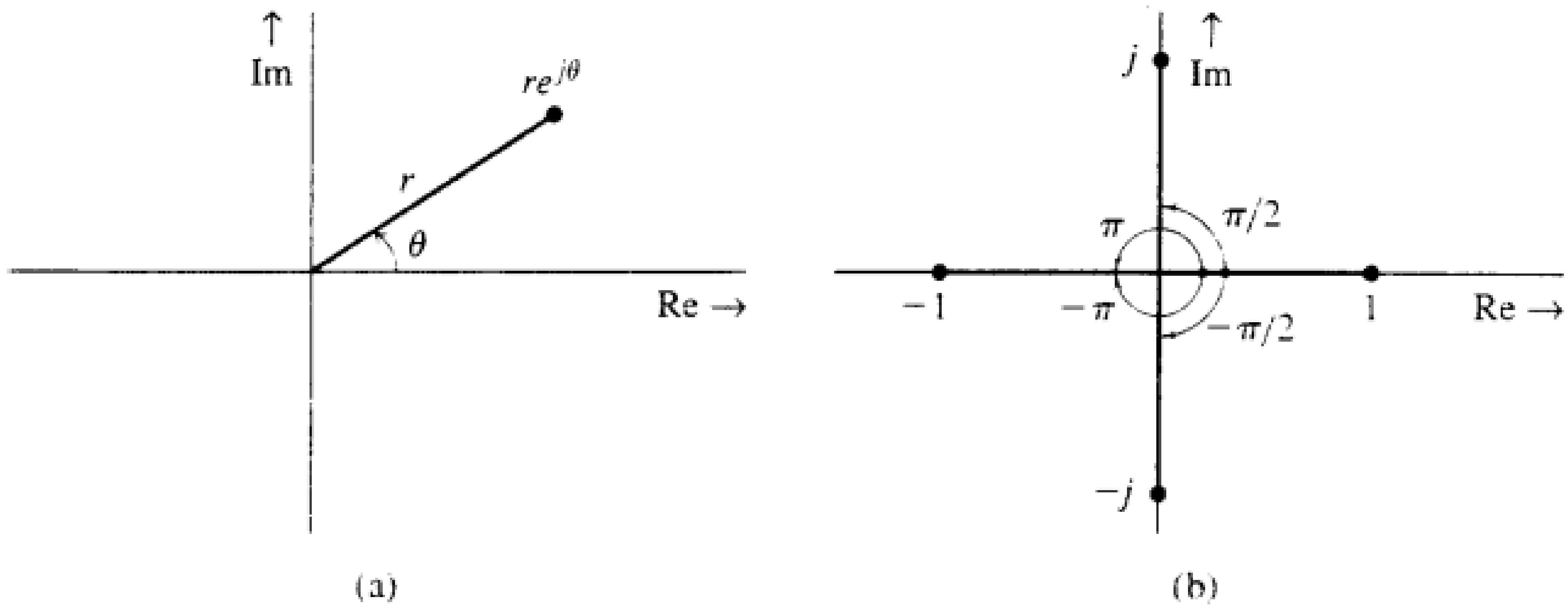

Figure B.3 Understanding some useful identities in terms of $re^{j\theta}$.

Números Complexos (x)

- **Álgebra de Números Complexos**
  - Pode-se também determinar o limite abaixo:

$$\lim_{t\to\infty} e^{(a+jw)t} = \lim_{t\to\infty}\left(e^{at}.e^{jwt}\right) = \begin{cases} 0, & a < 0 \\ \infty, & a > 0 \end{cases}$$

$$\text{pois } \left|e^{jwt}\right| = \left|re^{jq}\right| = 1, \quad \text{para } r = 1$$

Exemplos : Encontre a outra representação para

(a) $z_1 = 2 + j3$

$$\left.\begin{aligned} r &= |z| = \sqrt{a^2 + b^2 =} \sqrt{2^2 + 3^2} = \sqrt{13} = 3.605551, \\ q &= \angle z = \tan^{-1}\left(\frac{b}{a}\right) = \tan^{-1}\left(\frac{3}{2}\right) = 56.3^0 \end{aligned}\right\}, z_1 = 3.605551\mathrm{e}^{\mathrm{j}56.3^0}$$

(b) $2e^{jp/3}$

$$z_2 = r\cos q + jrsenq = 2\cos(p/3) + j2sen(p/3) = 1 + j\sqrt{3}$$

Números Complexos (xi)

- **Álgebra de Números Complexos**
  - Operações Aritméticas:

    Adição e subtração devem utilizar coordenadas cartesianas

    $$z_1 = 5e^{j53.1} = 3 + j4, \qquad z_2 = \sqrt{13}\,e^{j56.3} = 2 + j3, \quad \text{então}$$

    $$z_1 + z_2 = (3 + j4) + (2 + j3) = (3 + 2) + j(4 + 3) = 5 + j7$$

    Multiplicação e divisão são compatíveis com ambas representações

    $$z_1 = r_1\, e^{jq_1}, \qquad z_2 = r_2\, e^{jq_2}$$

    $$z_1 z_2 = \left(r_1\, e^{jq_1}\right).\left(r_2\, e^{jq_2}\right) = r_1 r_2 \left(e^{j(q_1 + q_2)}\right)$$

    $$\frac{z_1}{z_2} = \frac{\left(r_1\, e^{jq_1}\right)}{\left(r_2\, e^{jq_2}\right)} = \frac{r_1}{r_2}\left(e^{j(q_1 - q_2)}\right)$$

Números Complexos (xii)

- **Álgebra de Números Complexos**
  - Potenciação e Radiciação:

Potenciação e radiciação são operações compatíveis com ambas representações, embora fique mais simples com representação polar:

Para $z = r\,e^{jq}$

$$z^n = \left(r\,e^{jq}\right)^n = r^n . e^{jnq}$$

$$z^{1/n} = \left(r\,e^{jq}\right)^{1/n} = r^{1/n} . e^{jq/n}$$

Formalmente há n valores para a radiciação acima

$$z^{1/n} = \left[r\,e^{jq}\right]^{1/n} = \left[r\,e^{j(q+2pk)}\right]^{1/n} = r^{1/n} . e^{j(q+2pk)/n}$$

Números Complexos (xiii)

- **Álgebra de Números Complexos**
  - Exemplos:

Para $z_1 = 3 + j4 = 5e^{j53.1^0}$ e $z_2 = 2 + j3 = \sqrt{13}\,e^{j56.3^0}$

Multiplicação (forma cartesinana):

$$z_1.z_2 = (3 + j4).(2 + j3) = (6 + j8 + j9 - 12) = (-6 + j17)$$

Multiplicação (forma polar):

$$z_1.z_2 = \left(5e^{j53.1^0}\right)\left(\sqrt{13}\,e^{j56.3^0}\right) = \left(5\sqrt{13}\right)\left(e^{j53.1^0}e^{j56.3^0}\right) = 5\sqrt{13}.e^{j109.4^0}$$

Divisão (forma cartesinana):

$$\frac{z_1}{z_2} = \frac{(3 + j4).(2 - j3)}{(2 + j3).(2 - j3)} = \frac{18 - j1}{2^2 - (j)^2.3^2} = \frac{18 - j1}{13} = \frac{18}{13} - \frac{j1}{13}$$

Divisão (forma polar):

$$\frac{z_1}{z_2} = \frac{\left(5e^{j53.1^0}\right)}{\left(\sqrt{13}\,e^{j56.3^0}\right)} = \frac{5}{\sqrt{13}}\left(e^{j(53.1^0 - 56.3^0)}\right) = \frac{5}{\sqrt{13}}\left(e^{-j3.2}\right)$$

Números Complexos (xiv)

- **Álgebra de Números Complexos**
  - Logaritmos:

$$\log(z_1 z_2) = \log z_1 + \log z_2$$

$$\log(z_1/z_2) = \log z_1 - \log z_2$$

$$a^{(z_1+z_2)} = a^{z_1} \times a^{z_2}$$

$$z^c = e^{c \ln z}$$

$$a^z = e^{z \ln a}$$

Se

$$z = \left(r\, e^{jq}\right) = r\,.e^{j(q \pm 2kp)}, \qquad k = 0,1,2,3,\ldots$$

Então

$$\ln z = \ln\left(r\,.e^{j(q \pm 2kp)}\right) = \ln r \pm j(q \pm 2kp), \qquad k = 0,1,2,3,\ldots$$

O valor de $\ln z$ para $k = 0$ é chamado o valor principal de $\ln z$.

Sinais Senoidais (i)

- **Introdução**
  - Apresentação:

Seja a expressão abaixo :

$x(t) = C\cos(2\pi f_0 t + \theta)$

O cosseno de um ângulo repete-se a cada 2π, isto é :

$\cos\varphi = \cos(\varphi + 2n\pi) \qquad n = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots$

Deste modo, o valor de *x(t)* se repete para cada $1/f_0$ segundos, assim,

$$T_0 = \frac{1}{f_0}, \quad \begin{cases} f_0 & \text{é a freqüência (em hertz) da seinoidal;} \\ T_0 & \text{é o período (em segundos) da seinoidal.} \end{cases}$$

Sinais Senoidais (ii)

- **Introdução**

Re - escrevendo a expressão anterior :

$$x(t) = C\cos(w_0 t + q)$$

$$\text{onde tem - se que} \begin{cases} C & \text{é a amplitude da seinoidal;} \\ q & \text{é a fase (em radianos) da seinoidal;} \\ w_0 = 2p\, f_0 & \text{é a freqüência em radianos da seinoidal.} \end{cases}$$

$T_0 = 1 / f_0 = 1 / (w_0 / 2p) \therefore T_0 = 2p / w_0$, ou ainda,

$w_0 = \dfrac{2p}{T_0}$, daqui em diante w_0 pode ser chamado de freqüência.

Dois casos especiais que merecem destaque :

$x(t) = C\cos(w_0 t)$, $\quad q = 0$;

$x(t) = C\cos(w_0 t - p/2) = C\, sen(2p\, f_0 t)$, $\quad q = -p/2$

Sinais Senoidais (iii)

- **Introdução**
  - Exemplo:

$$x(t) = C\cos w_0 t$$

$$x(t) = C\,\text{sen}\, w_0 t$$

$$x(t) = C\cos\left(w_0 t - 60^0\right)$$

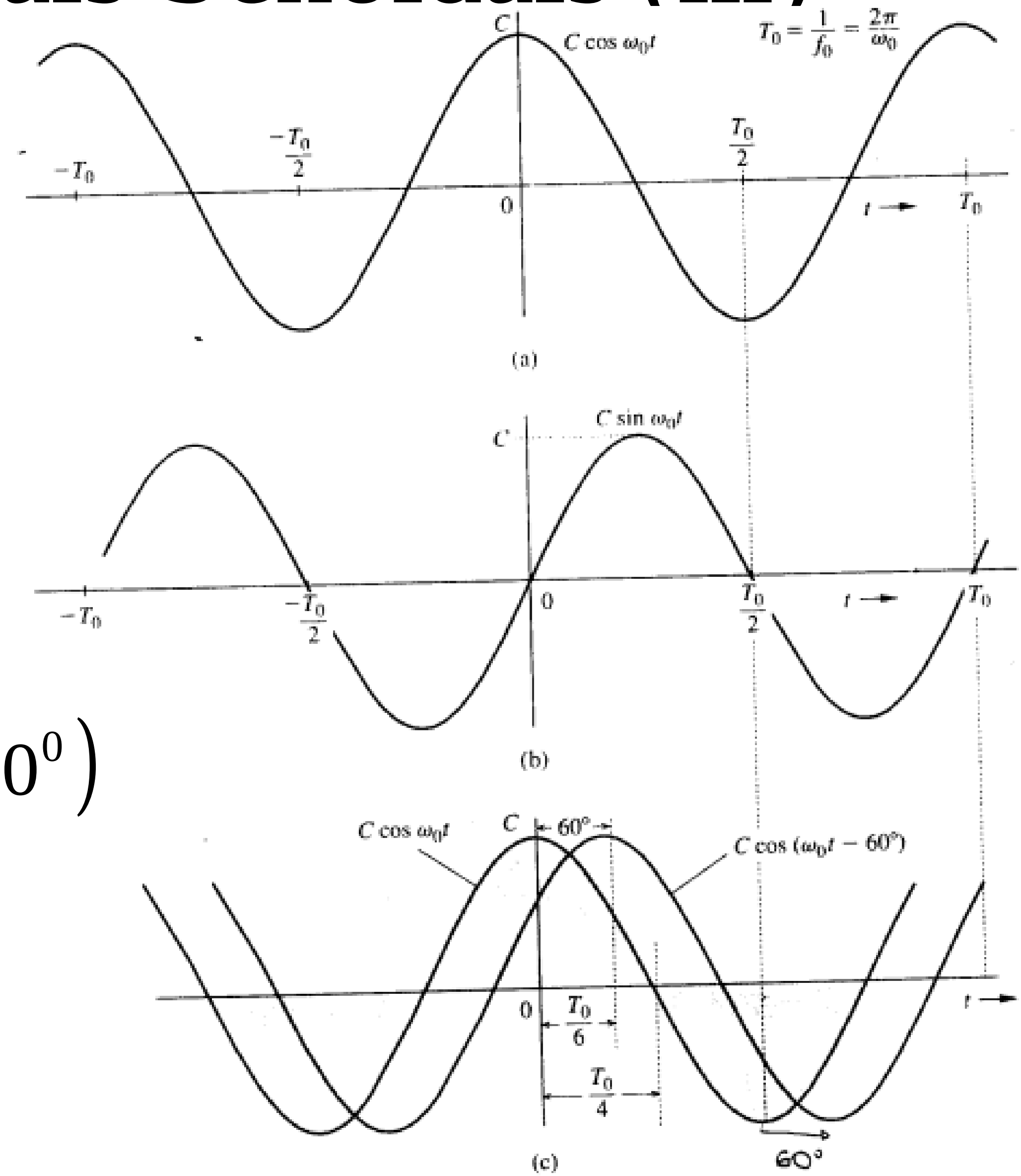

Figure B.6 Sketching a sinusoid.

Sinais Senoidais (iv)

- **Adição de Senoidais**
  - Dois sinais senoidais com a mesma freqüência e fases diferentes podem ser adicionados para formar uma outra senoidal com a mesma freqüência.

Das relações trigonométricas, tem-se que:

$$C\cos(w_0 t + q) = C\cos q\,\cos w_0 t - C\,\mathrm{sen}\,q\,\mathrm{sen}\,w_0 t \;\therefore$$

$$C\cos(w_0 t + q) = a\cos w_0 t + b\,\mathrm{sen}\,w_0 t$$

onde, $\quad a = C\cos q, \quad b = -C\,\mathrm{sen}\,q$

Portanto, pode-se escrever:

$$a\cos w_0 t + b\,\mathrm{sen}\,w_0 t = C\cos(w_0 t + q)$$

onde, $C = \sqrt{a^2 + b^2}; \quad q = \tan^{-1}\left(\frac{-b}{a}\right)$

Sinais Senoidais (v)

- **Adição de Senoidais**
  - Pode-se usar fazores para representar senoidais.

Representa - se o sinal senoidal $C\cos(w_0 t + q)$ por uma fasor

de tamanho C e ângulo q. Logo tem - se que

$a \cos w_0 t$ é representado por um fasor horizontal de módulo a $(? = 0)$.

$b \,\mathrm{sen}\, w_0 t$ é representado por um fasor vertical de módulo a $(? = -p/2)$,

pois $\mathrm{sen}\, w_0 t = \cos(w_0 t - -p/2)$.

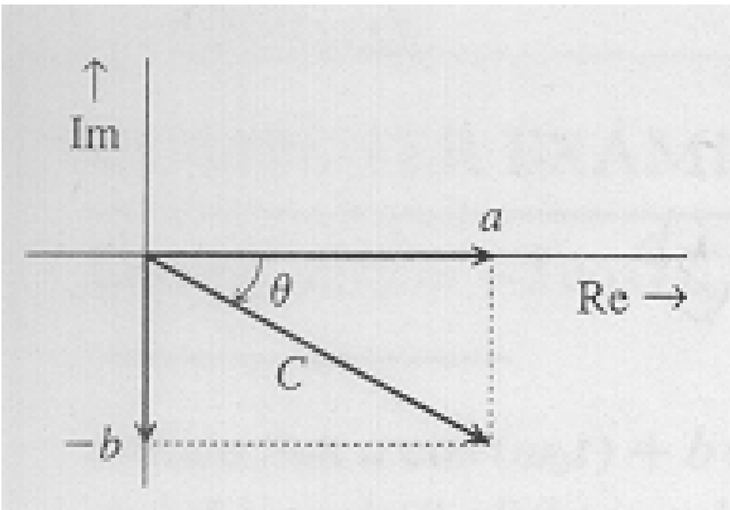

Figure B.7 Phasor addition of sinusoids.

Sinais Senoidais (vi)

- **Expressos por Exponenciais**
  - Utiliza-se a Fórmula de Euler.

$$\cos j = \frac{1}{2}\left(e^{jj} + e^{-jj}\right)$$

$$\text{sen}\, j = \frac{1}{2j}\left(e^{jj} - e^{-jj}\right)$$

No sentido inverso tem-se :

$$e^{jj} = \cos j + j\,\text{sen}\, j$$

$$e^{-jj} = \cos j - j\,\text{sen}\, j$$

Plotagem de Sinais (i)

- **Exponenciais Monotônicas**
  - Familiarizar com o traçado destes sinais comuns para sistemas:

Dois sinais que variam monotonicamente : $e^{-at}, e^{at}; \quad a > 0.$

Exemplo : $e^{-at}; \quad a = 2, t > 0.$ Para $t_c = 1/a \Rightarrow e^{-a(1/a)} = 1/e \cong 0.37$

Constante de tempo da exponencial (t_c) para traçar gráfico (Figura 10) :

- A constante de tempo é *0,5*.
- A cada intervalo igual a constante de tempo, o valos de *x(t)* cai para 37% do valor no início deste intervalo.
- Os pares formados pelos múltiplos das constantes de tempo e os valores de *x(t)* podem ser usados para esboçar o gráfico.

Plotagem de Sinais (ii)

- **Exponenciais Monotônicas** (gráfico dos exemplos anteriores)**:**

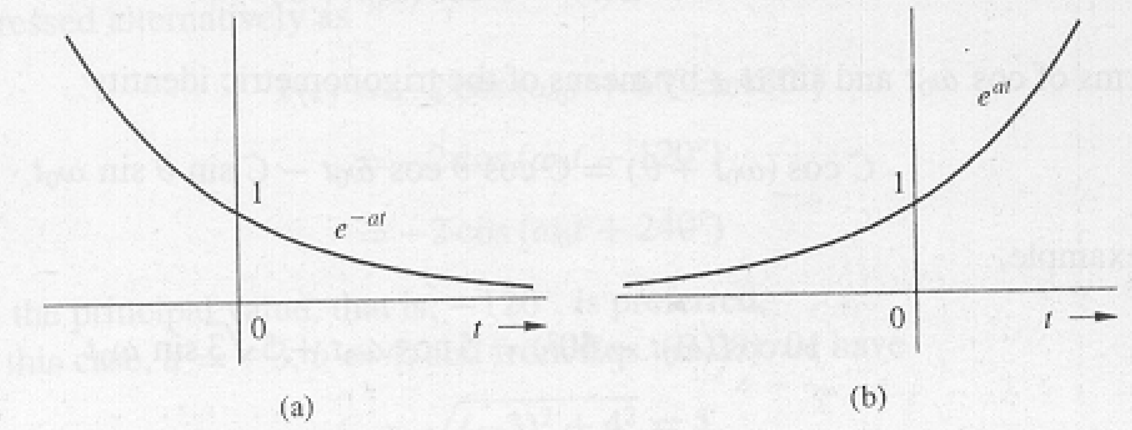

Figure B.9 Monotonic exponentials.

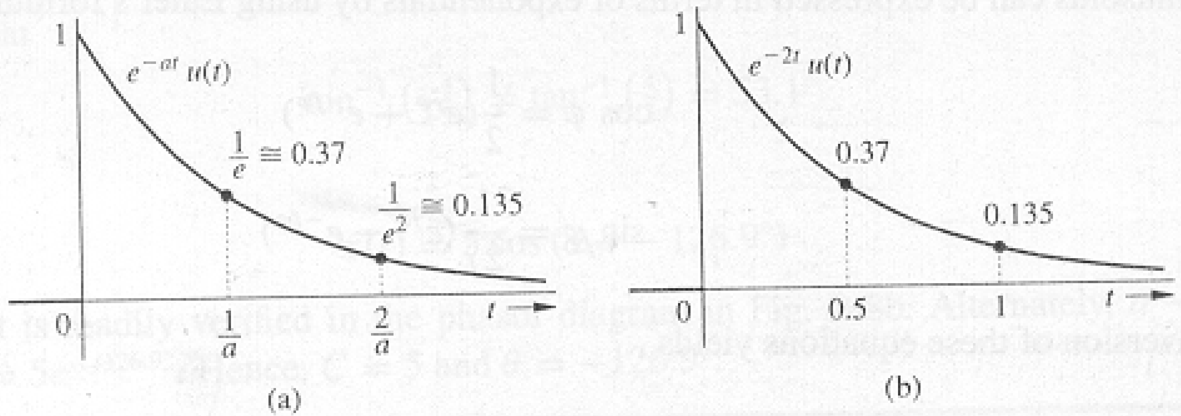

Figure B.10 (a) Sketching e^{-at}. (b) Sketching e^{-2t}.

Plotagem de Sinais (iii)

- **Senoidal Variando Exponencialmente**

Sinal típico :

$$x(t) = Ae^{-at}\cos(w_0 t + q).$$

Exemplo específico :

$$x(t) = 4e^{-2t}\cos(6t - \frac{p}{3}).$$

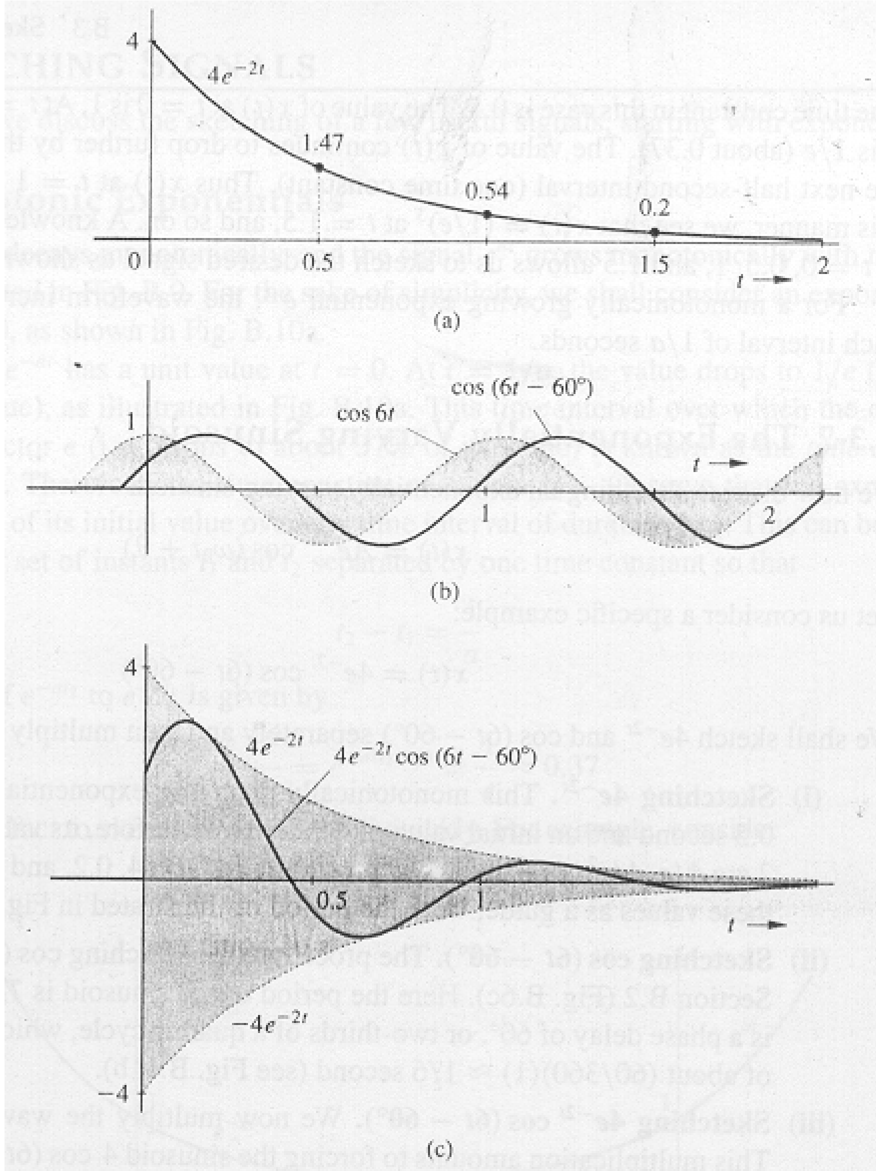

Figure B.11 Sketching an exponentially varying sinusoid.

Expansão em Frações Parciais (i)

- **Principal Objetivo**
  - Expandir uma função própria, ocorrendo em sistemas lineares e invariantes no tempo, em frações parciais:
    - Funções, chamadas de funções racionais, são razões entre dois polinômios, expressas como:

$$F(x) = \frac{P(x)}{Q(x)} = \frac{b_m x^m + b_{m-1} x^{m-1} + \ldots + b_1 x + b_0}{x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \ldots + a_1 x + a_0}$$

    - A função F(x) é imprópria se $m \geq n$ e própria se $m < n$.
    - Um função imprópria pode ser sempre re-escrita como a soma de um polinômio e uma função própria, por exemplo:

$$F(x) = \frac{2x^3 + 9x^2 + 11x + 2}{x^2 + 4x + 3} = 2x + 1 + \frac{x - 1}{x^2 + 4x + 3}$$

Expansão em Frações Parciais (ii)

- **Método de Limpar Frações (Clearing Fractions)**
  - Função racional re-escrita como uma soma de frações parciais com coeficientes desconhecidos a serem determinados igualando-se coeficientes de potências idênticas dos dois lados.

Exemplo : Expandir a função racional :

$$F(x) = \frac{x^3 + 3x^2 + 4x + 6}{(x+1)(x+2)(x+3)^2} = \frac{k_1}{x+1} + \frac{k_2}{x+2} + \frac{k_3}{x+3} + \frac{k_4}{(x+3)^2}$$

multiplica - se ambos os lados pelo denominador de *F(x)* :

$$x^3 + 3x^2 + 4x + 6 = k_1\left[(x+2)(x+3)^2\right] + k_2\left[(x+1)(x+3)^2\right] + k_3\left[(x+1)(x+2)(x+3)\right] + k_4\left[(x+1)(x+2)\right] \therefore$$

$$x^3 + 3x^2 + 4x + 6 = k_1(x^3 + 8x^2 + 21x + 18) + k_2(x^3 + 7x^2 + 15x + 9) + k_3(x^3 + 6x^2 + 11x + 6) + k_4(x^2 + 3x + 2) \therefore$$

Expansão em Frações Parciais (iii)

- **Método de Limpar Frações (Clearing Fractions)**

$$x^3 + 3x^2 + 4x + 6 = x^3(k_1 + k_2 + k_3) + x^2(8k_1 + 7k_2 + 6k_3 + k_4) +$$
$$x(21k_1 + 15k_2 + 11k_3 + 3k_4) + (18k_1 + 9k_2 + 6k_3 + 2k_4) \therefore$$

Iguala-se os coeficientes de mesma potência:

$$k_1 + k_2 + k_3 = 1$$

$$8k_1 + 7k_2 + 6k_3 + k_4 = 3$$

$$21k_1 + 15k_2 + 11k_3 + 3k_4 = 4$$

$$18k_1 + 9k_2 + 6k_3 + 2k_4 = 6$$

Resolvendo-se o sistema de equações acima, tem-se:

$k_1 = 1, \quad k_2 = -2, \quad k_3 = 2, \quad k_4 = -3,$ resultando em:

$$F(x) = \frac{1}{x+1} - \frac{2}{x+2} + \frac{2}{x+3} - \frac{3}{(x+3)^2}$$

Expansão em Frações Parciais (iv)

- **Método Encobrir de Heaviside (Cover-up) ou Resíduos**
  - Expansão para quando não há repetição dos fatores de $Q(x)$ e a função é própria ($m<n$).

Seja a função racional própria:

$$F(x) = \frac{P(x)}{Q(x)} = \frac{b_m x^m + b_{m-1} x_{m-1} + \ldots + b_1 x + b_0}{x^n + a_{n-1} x_{n-1} + \ldots + a_1 x + a_0} \therefore$$

$$F(x) = \frac{P(x)}{(x - l_1)(x - l_2)\ldots(x - l_n)} = \frac{k_1}{(x - l_1)} + \ldots + \frac{k_i}{(x - l_i)} + \ldots + \frac{k_n}{(x - l_n)}$$

multiplica-se ambos os lados por $x - l_i$ para achar k_i :

$$(x - l_i)F(x)\Big|_{x = l_i} = \frac{k_1 (x - l_i)}{(x - l_1)} + \ldots + k_i + \ldots + \left.\frac{k_n (x - l_i)}{(x - l_n)}\right|_{x = l_i} \therefore$$

$$(x - l_i)F(x)\Big|_{x = l_i} = k_i$$

Expansão em Frações Parciais (v)

- **Método Encobrir de Heaviside (Cover-up) ou Resíduos**
  - Exemplo: Expandir *F(x)* em frações parciais:

$$F(x) = \frac{2x^2+9x-11}{(x+1)(x-2)(x+3)} = \frac{k_1}{x+1} + \frac{k_2}{x-2} + \frac{k_3}{x+3}$$

Emcobre-se o denominadores de k_1 :

$$k_1 = (x+1)F(x)\Big|_{x=-1} = (x+1)\frac{2x^2+9x-11}{(x+1)(x-2)(x+3)}\Bigg|_{x=-1} \therefore$$

$$k_1 = \frac{2(-1)^2+9(-1)-11}{((-1)-2)((-1)+3)} = \frac{-18}{-6} \therefore\ k_1 = 3$$

Analogamente encontra-se os demais coeficientes

$$k_2 = (x-2)F(x)\Big|_{x=2} = \therefore k_2 = 1; \quad k_3 = (x+3)F(x)\Big|_{x=-3} = \therefore k_3 = -2$$

Assim tem-se : $F(x) = \dfrac{3}{x+1} + \dfrac{1}{x-2} - \dfrac{2}{x+3}$

Expansão em Frações Parciais (vi)

- **Método Encobrir de Heaviside (Cover-up) ou Resíduos**
  - Fatores complexos de *Q(x)*: Segue-se o mesmo procedimento.

Exemplo : Seja a função racional própria :

$$F(x) = \frac{4x^2 + 2x + 18}{(x+1)(x+2-j3)(x+2+j3)} = \frac{k_1}{(x+1)} + \frac{k_2}{(x+2-j3)} + \frac{k_3}{(x+2+j3)}$$

multiplica - se ambos os lados por $x - l_i$ para achar k_i :

$$k_1 = (x+1)F(x)\big|_{x=-1} = \frac{4(-1)^2 + 2(-1) + 18}{((-1)^2 + 4(-1) + 13)} = \frac{20}{10} = 2$$

$$k_2 = (x+2-j3)F(x)\big|_{x=-2+j3} = \frac{4(-2+j3)^2 + 2(-2+j3) + 18}{((-2+j3)+1)((-2+j3)+2+j3)} = 1 + j2$$

$$k_3 = (x+2+j3)F(x)\big|_{x=-2-j3} = \frac{4(-2-j3)^2 + 2(-2-j3) + 18}{((-2-j3)+1)((-2-j3)+2-j3)} = 1 - j2$$

Assim $k_1 = 2,\ k_2 = \sqrt{5}\,e^{j63.43^0},\ k_3 = \sqrt{5}\,e^{-j63.43^0}$.

Expansão em Frações Parciais (vii)

- **Método Encobrir de Heaviside (Cover-up) ou Resíduos**
  - Fatores quadráticos de *Q(x)*: Combina-se dois termos vindos de fatores complexos conjugados em um fator quadrático.

Exemplo : Seja a função racional própria :

$$F(x) = \frac{4x^2 + 2x + 18}{(x+1)(x^2+4x+13)} = \frac{k_1}{(x+1)} + \frac{c_1 x + c_2}{(x^2+4x+13)}$$

o coeficiente k_1 é encontrado pelo método de Heaviside, Portanto :

$$\frac{4x^2 + 2x + 18}{(x+1)(x^2+4x+13)} = \frac{2}{(x+1)} + \frac{c_1 x + c_2}{(x^2+4x+13)}$$

os coeficiente c_1 e c_2 são encontrados por método de limpar frações :

$$4x^2 + 2x + 18 = 2(x^2+4x+13) + (c_1 x + c_2)(x+1)$$

$$= (2+c_1)x^2 + (8+c_1+c_2)x + (26+c_2) \therefore$$

$$c_1 = 2; \quad c_2 = -8$$

Expansão em Frações Parciais (viii)

- **Fatores Repetidos de Q(x)**
  - Método Encobrir de Heaviside (Cover-up) adaptado.

Seja a função racional própria:

$$F(x) = \frac{P(x)}{(x-l)^r (x-a_1)(x-a_2)\ldots(x-a_n)} \therefore$$

$$F(x) = \frac{a_0}{(x-l)^r} + \frac{a_1}{(x-l)^{r-1}} + \ldots + \frac{a_{r-1}}{(x-l)} + \frac{k_1}{(x-a_1)} + \ldots + \frac{k_n}{(x-a_n)} \therefore$$

os coeficientes k_i são determinados pelo método de Heaviside.

Para encontrar os coeficientes a_j (igualdade para função e derivadas),

$$a_j = \frac{1}{j!} \frac{d^j}{dx^j} \left[(x-l)^r F(x) \right]_{x=l}$$

Expansão em Frações Parciais (ix)

- **Fatores Repetidos de Q(x)**

Exemplo : Seja a função racional própria :

$$F(x)=\frac{4x^3+16x^2+23x+13}{(x+1)^3(x+2)}=\frac{a_0}{(x+1)^3}+\frac{a_1}{(x+1)^2}+\frac{a_2}{(x+1)}+\frac{k}{(x+2)}$$

multiplica - se ambos os lados por $x-l_i$ para achar k_i :

$$k=(x+2)F(x)\Big|_{x=-2}=\frac{4(-2)^3+16(-2)^2+23(-2)+13}{((-2)+1)^3}=\frac{1}{1}=1$$

$$a_0=(x+1)^3F(x)\Big|_{x=-1}=\frac{4(-1)^3+16(-1)^2+23(-1)+13}{((-1)+2)}=\frac{2}{1}=2$$

$$a_1=\frac{d}{dx}\left[(x+1)^3F(x)\right]_{x=-1}=\frac{d}{dx}\left[\frac{4x^3+16x^2+23x+13}{(x+2)}\right]_{x=-1}$$

$$a_2=\frac{1}{2!}\frac{d^2}{dx^2}\left[(x+1)^3F(x)\right]_{x=-1}=\frac{1}{2}\frac{d^2}{dx^2}\left[\frac{4x^3+16x^2+23x+13}{(x+2)}\right]_{x=-1}$$

Expansão em Frações Parciais (x)

- **Fatores Repetidos de Q(x)**

Exemplo (continuação):

Lembrando que:

$$\frac{d}{dx}\left(\frac{u}{v}\right)=\frac{v(du/dx)-u(dv/dx)}{v^2}$$

assim tem-se que:

$$a_1=\frac{d}{dx}\left[\frac{4x^3+16x^2+23x+13}{(x+2)}\right]_{x=-1}\quad\therefore$$

$$a_1=\left.\frac{(x+2)(12x^2+32x+23)-(4x^3+16x^2+23x+13)(1)}{(x+2)^2}\right|_{x=-1}\quad\therefore$$

$$a_1=\frac{((-1)+2)(12(-1)^2+32(-1)+23)-(4(-1)^3+16(-1)^2+23(-1)+13)}{((-1)+2)^2}=1$$

Expansão em Frações Parciais (xi)

- **Fatores Repetidos de Q(x)**

Exemplo (continuação) : Analogamente, tem-se que :

$$a_2 = \frac{1}{2!}\frac{d}{dx}\left[\frac{(x+2)(12x^2+32x+23)-(4x^3+16x^2+23x+13)(1)}{(x+2)^2}\right]_{x=-1} \therefore$$

$$a_2 = \frac{1}{2!}\frac{d}{dx}\left[\frac{8x^3+40x^2+64x+33}{(x+2)^2}\right]_{x=-1} \therefore$$

$$a_2 = \frac{1}{2}\left.\frac{(x+2)^2(24x^2+80x+64)-(8x^3+40x^2+64x+33)(2(x+2))}{(x+2)^4}\right|_{x=-1} \therefore$$

$$a_2 = \frac{1}{2}[\frac{((-1)+2)^2(24(-1)^2+80(-1)+64)}{((-1)+2)^4} -$$

$$\frac{(8(-1)^3+40(-1)^2+64(-1)+33)(2((-1)+2))}{((-1)+2)^4}] = \frac{1}{2}\left(\frac{8-2}{1}\right) = 3$$

Regra de Cramer (i)

- **Utilização típica:**
  - Solucionar sistema de equações lineares.

    Seja n equações lineraes simultâneas com n icógnitas :

$$a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1n}x_n = y_1$$
$$a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \ldots + a_{2n}x_n = y_2$$
$$\vdots$$
$$a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + \ldots + a_{nn}x_n = y_n$$

Estas equações podem ser expressas na forma matricial :

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \ldots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \ldots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ldots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \ldots & a_{nn} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ y_n \end{bmatrix}$$

Regra de Cramer (ii)

- **Descrição do Procedimento:**
  - Operações para solução do sistema de equações lineares.

Considere a matriz $\mathbf{A}$ e seu determinante $|\mathbf{A}| \neq 0$

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \dots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{bmatrix}$$

Assim, o vetor $\mathbf{x}$ tem uma única solução dada pela fórmula de Cramer :

$$x_k = \frac{|\mathbf{D}_k|}{|\mathbf{A}|}, \qquad k = 1,2,\dots,n$$

onde $|\mathbf{D}_k|$ é $|\mathbf{A}|$ com a *k-ésima* coluna substituída por $\mathbf{y}$.

Regra de Cramer (iii)

– Exemplo:

Resolva o sistema de equaçõe lineares simultâneas:

$$2x_1 + x_2 + x_3 = 3$$

$$x_1 + 3x_2 - x_3 = 7$$

$$x_1 + x_2 + x_3 = 1$$

Em forma matricial tem-se: $\mathbf{Ax} = \mathbf{Y} \therefore \begin{bmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 1 & 3 & -1 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 \\ 7 \\ 1 \end{bmatrix},$

O determinante de $\mathbf{A}$ é calculado como: $|\mathbf{A}| = \begin{vmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 1 & 3 & -1 \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix} = 4 \neq 0$

Regra de Cramer (iv)

– Exemplo (continuação):

Como o determinante é diferente de zero, então a solução única é:

$$x_1 = \frac{|\mathbf{D}_1|}{|\mathbf{A}|} = \frac{1}{|\mathbf{A}|}\begin{vmatrix} 3 & 1 & 1 \\ 7 & 3 & -1 \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix} = \frac{8}{4} = 2$$

$$x_2 = \frac{|\mathbf{D}_2|}{|\mathbf{A}|} = \frac{1}{|\mathbf{A}|}\begin{vmatrix} 2 & 3 & 1 \\ 1 & 7 & -1 \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix} = \frac{4}{4} = 1$$

$$x_3 = \frac{|\mathbf{D}_3|}{|\mathbf{A}|} = \frac{1}{|\mathbf{A}|}\begin{vmatrix} 2 & 1 & 3 \\ 1 & 3 & 7 \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix} = \frac{-8}{4} = -2$$

Vetores e Matrizes (i)

- **Vetor:**
  - Entidade especificada por n variáveis em uma dada ordem (n-tupla ordenada) é um vetor n-dimensional. Assim,

Um vetor $\mathbf{x}$ de dimensão n pode ser representado por :

$$\mathbf{x} = \begin{bmatrix} x_1 & x_2 & \dots & x_n \end{bmatrix} \quad \text{(vetor linha);}\ \mathbf{x} = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} \quad \text{(vetor coluna)}$$

Representa-se matriz (array de variáveis ordenadas) de dimensão $m \times n$:

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \dots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{bmatrix}$$

Vetores e Matrizes (ii)

- **Transformação Linear:**
  - Um sistema de equações lineares simultâneas pode ser visto como a transformação de um vetor em outro (transformação linear de vetores).

Seja m equações lineraes simultâneas com n icógnitas :

$$\left.\begin{array}{c} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1n}x_n = y_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \ldots + a_{2n}x_n = y_2 \\ \vdots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \ldots + a_{mn}x_n = y_m \end{array}\right\} \Leftrightarrow \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \ldots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \ldots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ldots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \ldots & a_{mn} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ y_m \end{bmatrix}$$

Em forma compacta pode-se escrever $\mathbf{Ax} = \mathbf{y}$.

a_{ij} é definido como o elemento da *i-ésima* linha e *j-ésima* coluna.

Vetores e Matrizes (iii)

- **Definições e Propriedades:**

$$\text{Seja a Matriz } A, m\times n: \quad \mathbf{A} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \dots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{bmatrix}, \quad \text{define-se}$$

$$\text{Matriz diagonal}: \ a_{ij} = 0,\ a_{ii} \neq 0,\ \forall i,j, (n\times n).$$

$$\text{Matriz identidade ou unitária}(\mathbf{I}): \ a_{ij} = 0,\ a_{ii} = 1,\ \forall i,j, (n\times n).$$

$$\text{Matriz simétrica}: \ a_{ij} = a_{ji},\ \forall i,j, (n\times n).$$

$$\text{Matriz zero}: \ a_{ij} = a_{ii} = 0,\ \forall i,j, (m\times n).$$

$$\text{Matrizes idênticas } (\mathbf{A} = \mathbf{B}): a_{ij} = b_{ij},\ \forall i,j, (m\times n)$$

$$\text{Matriz transposta } (\mathbf{B} = \mathbf{A}^{\mathbf{T}}): (b_{ji})_{n\times m} = (a_{ij})_{m\times n}.$$

Vetores e Matrizes (iv)

- **Álgebra de Matrizes:**

Considere duas matrizes $\mathbf{A}$ e $\mathbf{B}$ de dimensão $m \times n$:

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \dots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{bmatrix}, \quad \mathbf{B} = \begin{bmatrix} b_{11} & b_{12} & \dots & b_{1n} \\ b_{21} & b_{22} & \dots & b_{2n} \\ \vdots & \vdots & \dots & \vdots \\ b_{m1} & b_{m2} & \dots & b_{mn} \end{bmatrix}$$

Adição de matrizes $(\mathbf{A} + \mathbf{B})$: $(a_{ij} + b_{ij})_{m \times n}, \ \forall i,j.$

Multiplicação de matriz por escalar $(c\mathbf{A} = \mathbf{A}c)$: $(ca_{ij})_{m \times n}, \ \forall i,j.$

Multiplicação de matrizes, para $(a_{ij})_{m \times n}, (b_{ij})_{n \times p}, \forall i,j$

$$(\mathbf{C} = \mathbf{AB}): \ (c_{ij})_{m \times p} = \sum_{k=1}^{n} (a_{ik} . b_{kj}); \quad (\mathbf{D} = \mathbf{BA}) \text{ não existe.}$$

Distributividade: $\mathbf{(A+B)C} = \mathbf{AC} + \mathbf{BC}; \quad \mathbf{C(A+B)} = \mathbf{CA} + \mathbf{CB}.$

Elemento neutro: $\mathbf{AI} = \mathbf{IA} = \mathbf{A}$

Vetores e Matrizes (v)

- **Álgebra de Matrizes:**

Considere o sistema em forma matricial: $\mathbf{y} = \mathbf{A}\mathbf{x}, \quad \mathbf{A}(n \times n)$

Pré-multiplicando ambos os termos pela inversa $\mathbf{A}^{-1}$, tem-se

$$\mathbf{y} = \mathbf{A}\mathbf{x} \therefore \mathbf{A}^{-1}\mathbf{y} = \mathbf{A}^{-1}\mathbf{A}\mathbf{x} \therefore \mathbf{A}^{-1}\mathbf{y} = \mathbf{I}\mathbf{x} \therefore \mathbf{x} = \mathbf{A}^{-1}\mathbf{y}$$

Pela regra de Cramer:

$$\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{|\mathbf{D}_{11}|}{|\mathbf{A}|} & \frac{|\mathbf{D}_{12}|}{|\mathbf{A}|} & \cdots & \frac{|\mathbf{D}_{1n}|}{|\mathbf{A}|} \\ \frac{|\mathbf{D}_{21}|}{|\mathbf{A}|} & \frac{|\mathbf{D}_{22}|}{|\mathbf{A}|} & \cdots & \frac{|\mathbf{D}_{2n}|}{|\mathbf{A}|} \\ \vdots & \vdots & \cdots & \vdots \\ \frac{|\mathbf{D}_{n1}|}{|\mathbf{A}|} & \frac{|\mathbf{D}_{n2}|}{|\mathbf{A}|} & \cdots & \frac{|\mathbf{D}_{nn}|}{|\mathbf{A}|} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ y_n \end{bmatrix} = \frac{1}{|\mathbf{A}|} \begin{bmatrix} |\mathbf{D}_{11}| & |\mathbf{D}_{12}| & \cdots & |\mathbf{D}_{1n}| \\ |\mathbf{D}_{21}| & |\mathbf{D}_{22}| & \cdots & |\mathbf{D}_{2n}| \\ \vdots & \vdots & \cdots & \vdots \\ |\mathbf{D}_{n1}| & |\mathbf{D}_{n2}| & \cdots & |\mathbf{D}_{nn}| \end{bmatrix} \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ y_n \end{bmatrix}$$

Conclui-se que $\mathbf{A}^{-1} = (a_{ij}^{-1} = |\mathbf{D}_{ij}| \big/ |\mathbf{A}|)$

Vetores e Matrizes (vi)

- **Álgebra de Matrizes:**

Exemplo

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 3 \\ 3 & 2 & 1 \end{bmatrix}, \qquad \mathbf{A}^{-1} = \begin{bmatrix} |\mathbf{D}_{11}|/|\mathbf{A}| & |\mathbf{D}_{12}|/|\mathbf{A}| & |\mathbf{D}_{13}|/|\mathbf{A}| \\ |\mathbf{D}_{21}|/|\mathbf{A}| & |\mathbf{D}_{22}|/|\mathbf{A}| & |\mathbf{D}_{23}|/|\mathbf{A}| \\ |\mathbf{D}_{31}|/|\mathbf{A}| & |\mathbf{D}_{32}|/|\mathbf{A}| & |\mathbf{D}_{33}|/|\mathbf{A}| \end{bmatrix},$$

$\left|\mathbf{D}_{ij}\right| = (-1)^{i+j}\mathbf{M}_{ij}$, onde $\mathbf{M}_{ij}$ é o determinante da submatriz de A obtida deletando-se a linha e coluna do componente a_{ij}.

$$\mathbf{A}^{-1} = -\frac{1}{4}\begin{bmatrix} |\mathbf{D}_{11}| & |\mathbf{D}_{12}| & |\mathbf{D}_{13}| \\ |\mathbf{D}_{21}| & |\mathbf{D}_{22}| & |\mathbf{D}_{23}| \\ |\mathbf{D}_{31}| & |\mathbf{D}_{32}| & |\mathbf{D}_{33}| \end{bmatrix} \therefore \mathbf{A}^{-1} = -\frac{1}{4}\begin{bmatrix} -4 & 1 & 1 \\ 8 & -1 & -5 \\ -4 & -1 & 3 \end{bmatrix}$$

Vetores e Matrizes (vii)

- **Derivada e Integral de uma Matriz:**

Considere as matrizes $\mathbf{A}$ e $\mathbf{B}$ de dimensão $m \times n$:

Derivada de uma matriz: $\dfrac{d}{dt}\left[\mathbf{A}(t)\right] = \left[\dfrac{d}{dt} a_{ij}(t)\right]_{m\times n} = \dot{\mathbf{A}},\ \forall i,j.$

Integral de uma matriz: $\int \mathbf{A}(t) = \left[\int a_{ij}(t)\, dt\right]_{m\times n},\ \forall i,j.$

Identidades válidas: $\dfrac{d}{dt}\left(\mathbf{A}+\mathbf{B}\right) = \dfrac{d\mathbf{A}}{dt} + \dfrac{d\mathbf{B}}{dt}$

$$\frac{d}{dt}\left(c\mathbf{A}\right) = c\frac{d\mathbf{A}}{dt}$$

$$\frac{d}{dt}\left(\mathbf{A}\mathbf{B}^T\right) = \frac{d\mathbf{A}}{dt}\mathbf{B}^T + \mathbf{A}\frac{d\mathbf{B}^T}{dt} = \dot{\mathbf{A}}\mathbf{B}^T + \mathbf{A}\dot{\mathbf{B}}^T$$

$$\frac{d}{dt}\left(\mathbf{I}\right) = 0$$

Vetores e Matrizes (viii)

- **Equação Característica: Teorema de Cayley-Hamilton:**
  - Toda matriz **A** satisfaz a sua equação característica, isto é, na equação característica pode se substituir *?* por **A**.

isto é, $\mathbf{Q(A)} = \mathbf{A}^n + a_{n-1}\mathbf{A}^{n-1} + \ldots + a_1\mathbf{A}^1 + a_0\mathbf{A}^0 = 0,$

onde o polinômio característico é

$$Q(?) = \left| l\,\mathbf{I} - \mathbf{A} \right| = ?^n + a_{n-1}\, l^{n-1} + \ldots + a_1\, l^1 + a_0\, l^0 = 0$$

Considerando $\mathbf{A}$ $(n \times n)$ e $\mathbf{x}$ $(n \times 1)$ qualquer, $\mathbf{x} \neq 0$, satisfazendo:

$\mathbf{Ax} = l\,\mathbf{x}$, onde $\mathbf{x}$ é um autovetor e l seu autovalor correspondente.

A solução destas equações existe se e só se (equação característica)

$$\left| \mathbf{A} - l\,\mathbf{I} \right| = \left| l\,\mathbf{I} - \mathbf{A} \right| = 0, \text{ isto é, } \begin{bmatrix} a_{11} - l & a_{12} & \ldots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} - l & \ldots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ldots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \ldots & a_{nn} - l \end{bmatrix} = 0$$

Vetores e Matrizes (ix)

- **Equação Característica: Teorema de Cayley-Hamilton:**
  - Funções de uma matriz quadrada usando o teorema.

Função na forma uma série infinita de potências :

$$f(?) = b_0 + b_1 l^1 + b_2 l^2 + \ldots + \ldots = \sum_{i=0}^{\infty} b_i l^i$$

l é autovalor de **A**, então ele satisfaz o polinômio característico, assim

$$?^n = -a_{n-1} l^{n-1} - a_{n-2} l^{n-2} - \ldots - a_1 l - a_0 l^0, \quad \times l \text{, ambos lados, tem-se :}$$

$$?^{n+1} = -a_{n-1} l^n - a_{n-2} l^{n-1} - \ldots - a_1 l^2 - a_0 l^1$$

Nesta equação pode se substtuir $?^n$ por seu valor acima, assim tem-se

$$?^{n+1} = -a_{n-1}\left(-a_{n-1} l^{n-1} - \ldots - a_1 l - a_0 l^0\right) - a_{n-2} l^{n-1} - \ldots - a_1 l^2 - a_0 l^1$$

Estendendo raciocíno $\forall\, n + k$, logo a série infinita pode ser re-escrita

$$f(?) = b_0 + b_1 l + b_2 l^2 + \ldots + b_{n-1} l^{n-1}$$

Vetores e Matrizes (x)

- **Equação Característica: Teorema de Cayley-Hamilton:**
  - Funções de uma matriz quadrada usando o teorema.

Para sistema com n autovalores distintos $(l_1, \ldots, l_\mathrm{n})$, tem-se:

$$\begin{bmatrix} f(l_1) \\ f(l_2) \\ \vdots \\ f(l_n) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & l_1 & \ldots & l_1^{n-1} \\ 1 & l_2 & \ldots & l_2^{n-1} \\ \vdots & \vdots & \ldots & \vdots \\ 1 & l_n & \ldots & l_n^{n-1} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} b_0 \\ b_1 \\ \vdots \\ b_{n-1} \end{bmatrix}$$

Como $\mathbf{A}$ também satifaz o polinômio característico, analogamente tem-se:

$$f(\mathbf{A}) = b_0\mathbf{I} + b_1\mathbf{A} + b_2\mathbf{A}^2 + \ldots + b_{n-1}\mathbf{A}^{n-1}$$

Vetores e Matrizes (xi)

- **Cálculo de Exponencial e Potência:**
  - Usadas para solucionar sistemas lineares, invariantes no tempo.

Exponencial, $e^{\mathbf{A}t}$, definida de:

$$e^{\mathbf{A}t} = \mathbf{I} + \mathbf{A}t + \frac{\mathbf{A}^2 t^2}{2!} + \ldots + \frac{\mathbf{A}^n t^n}{n!} + \ldots = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\mathbf{A}^k t^k}{k!}$$

Assim, da equação de $f(\mathbf{A})$, tem-se que:

$$e^{\mathbf{A}t} = \sum_{i=0}^{n-1} b_i (\mathbf{A})^i$$

Potência, $\mathbf{A}^k$:

$$\mathbf{A}^k = b_0 \mathbf{I} + b_1 \mathbf{A} + \ldots + b_{n-1} \mathbf{A}^{n-1}$$

Miscelânea

- **Conteúdo**
  - Relação de expressões matemática, para consulta, que envolvem:
    - L'Hopital;
    - Séries de Taylor e Maclaurin;
    - Séries de potências;
    - Somatórios;
    - Números Complexos;
    - Identidades Trigonométricas;
    - Integrais indefinidas;
    - Fórmulas comuns de derivadas;
    - Constantes usuais;
    - Soluções de equações quadráticas e cúbicas.

Exercícios Recomendados

- **Propostos para o MATLAB ou SCILAB**
  - Todos
- **Problemas**
  - B.1, B.2, B.3, B.5, B.7, B.8, B.9, B.13, B.17, B.18, B.22, B.23, B.24, B.26, B.27, B.31 até B.37.