

Probabilidade: Conceitos Básicos

MONITORIA DE ESTATÍSTICA E PROBABILIDADE
PARA COMPUTAÇÃO

Conceitos

Espaço amostral

Classe de eventos aleatórios

Operações com eventos

- União ($A \cup B$)
- Intersecção ($A \cap B$)
- Complemento ($\bar{A} = \Omega - A$)

Propriedades de eventos

Distributividade

$$A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C)$$

$$A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C)$$

Absorção

$$A \cup (A \cap B) = A$$

$$A \cap (A \cup B) = A$$

De Morgan

$$\overline{(A \cap B)} = \bar{A} \cup \bar{B}$$

$$\overline{(A \cup B)} = \bar{A} \cap \bar{B}$$

Probabilidade de um evento

A probabilidade de um evento A , com n_A resultados possíveis em um espaço amostral com N eventos equiprováveis é:

$$P(A) = \frac{n_A}{N}$$

Formalmente:

$$\begin{aligned}P(\Omega) &= 1 \\P(\emptyset) &= 0\end{aligned}$$

Teoremas de probabilidades

Teorema da soma

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$$

Teorema do produto

$$P(A \cap B) = P(A|B) \cdot P(B)$$

Teorema da probabilidade total

$$P(B) = \sum_{i=1}^n P(A_i) \cdot P(B|A_i)$$

Teorema de Bayes

$$P(A_j|B) = \frac{P(A_j) \cdot P(B|A_j)}{\sum_{i=1}^n P(A_i) \cdot P(B|A_i)}$$

Conceitos importantes

Eventos mutuamente exclusivos

- Dois eventos A e B são mutuamente exclusivos quando $P(A \cap B) = \emptyset$, ou seja, $P(A \cup B) = P(A) + P(B)$

Independência estatística

- Dois eventos A e B são independentes quando $P(A \cap B) = P(A) \cdot P(B)$

Obs.: quando dois eventos são mutuamente exclusivos, eles não são independentes.

Exercícios - Probabilidade

1. Em uma cidade onde se publicam três jornais, A, B e C, constatou-se que, entre 1000 famílias, assinam: A: 470; B: 420; C: 315; A e B: 110; A e C: 220; B e C: 120; e 75 assinam os três. Escolhendo-se ao acaso uma família, qual a probabilidade de que ela:
 - a) Não assine nenhum dos três jornais?
 - b) Assine apenas um dos três jornais?
 - c) Assine pelo menos dois jornais?

Exercícios

2. Em duas urnas onde, a urna n°1 contém: 1 bola vermelha e 2 brancas e a urna n°2 contém: 2 bolas vermelhas e 1 branca. Tiramos aleatoriamente uma bola da urna n°1, colocamos na urna n°2 e misturamos. Em seguida tiramos aleatoriamente uma bola da urna n°2.
 - Qual a probabilidade de tirarmos uma bola branca da urna n°2?

3. De uma caixa com 10 lâmpadas, das quais 6 estão boas, retiram-se 3 lâmpadas ao acaso e que são testadas a seguir. Qual a probabilidade de que:
 - Todas acendam?
 - Pelo menos uma lâmpada acenda?

Exercícios

4. Uma urna contém 10 bolas verdes e 6 azuis. Tiram-se 2 bolas ao acaso. Qual a probabilidade de que as duas bolas:
 - a) Sejam verdes?
 - b) Sejam da mesma cor?
 - c) Sejam de cores diferentes?

5. Numa classe existem 4 alunos do 2° ano, 3 alunos do 3° e 5 do 4° ano. Qual a probabilidade de serem sorteados 2 alunos do 2° ano, 2 do 3° e 3 do 4°?

Exercícios

6. A urna n°1 contém: 1 bola vermelha e 2 brancas. A urna n°2 contém: 2 bolas vermelhas e 1 branca. Tiramos aleatoriamente uma bola da urna n°1, colocamos na urna n°2 e misturamos. Em seguida tiramos aleatoriamente uma bola da urna n°2. Qual a probabilidade de tirarmos uma bola branca da urna n°2?
7. A urna 1 contém x bolas brancas, e y bolas vermelhas. A urna 2 contém z bolas brancas e v vermelhas. Uma bola é escolhida ao acaso da urna 1 e posta na urna 2. A seguir, uma bola é escolhida ao acaso da urna 2. Qual a probabilidade que a bola seja branca?

Exercícios

8. Em baralho com 52 cartas faz-se o seguinte experimento: retira-se 1 carta depois, outra carta, assim até termos 4 cartas na mesa. Pergunta-se qual a probabilidade de termos:
- a) Um Royal Street Flash (K Q J 10 do mesmo naipe) de qualquer naipe.
 - b) 4 cartas ordenadas (1,2,3,4) de qualquer naipe.

Exercícios

9. Com o mesmo baralho qual a probabilidade o seguintes eventos são definidos:

A: uma carta tem número múltiplo de 5.

B: Uma carta é de copas.

C: uma carta é menor que 7.

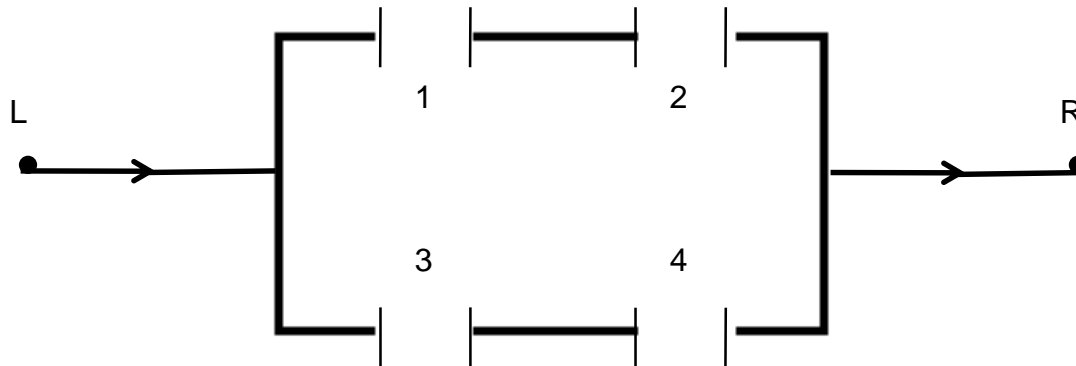
D: uma carta é maior que 8.

Pergunta-se :

- a) Qual a probabilidade de tirarmos uma carta que pertença ao conjunto de eventos A e ao conjunto de eventos C ?
- b) Qual a probabilidade de escolhermos uma carta que pertença ao conjunto de eventos B ou não pertença ao conjunto C ?
- c) Qual a probabilidade de escolhermos uma carta que pertença ao conjunto de eventos C e D ? E se fosse C ou D ?

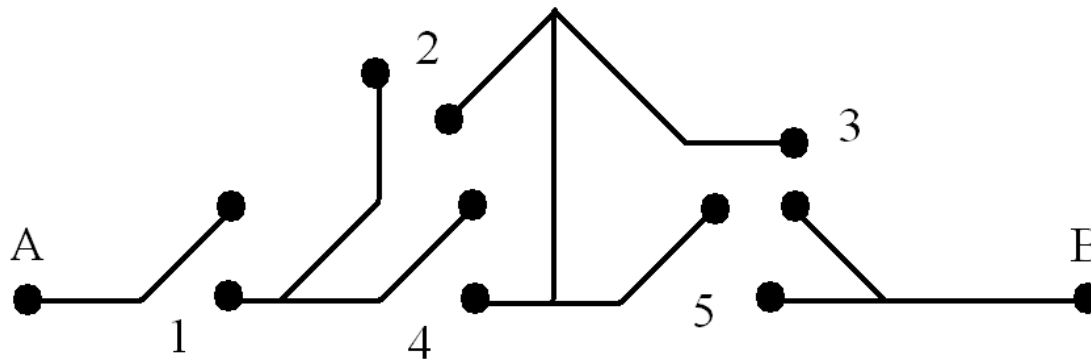
Exercícios

10. A probabilidade de fechamento de cada relé do circuito apresentado abaixo é dada por p . Se todos os relés funcionarem independentemente, qual a probabilidade de que haja corrente entre os terminais L e R?



Exercícios

11. A probabilidade do fechamento de cada relé do circuito é igual a p , onde $0 < p < 1$. Todos os relés funcionam independentemente, qual é a probabilidade de que haja corrente nos terminais A e B?



Exercícios – Teorema de Bayes

1. Em certo colégio, 5% dos homens e 2% das mulheres têm mais de 1,80m de altura. Por outro lado, 60% dos estudantes são homens. Se um estudante é selecionado ao acaso e ele tem mais que 1,80m de altura, qual a probabilidade de que o estudante seja mulher?
2. Apenas uma em cada dez pessoas de uma população tem tuberculose. Das pessoas que têm tuberculose 80% reagem positivamente ao teste Y, enquanto apenas 30% dos que não tem tuberculose reagem positivamente. Uma pessoa da população é selecionada ao acaso e o teste Y é aplicado. Qual a probabilidade de que essa pessoa tenha tuberculose, se reagiu positivamente ao teste?

Exercícios

3. A probabilidade de um indivíduo da classe A comprar um carro é $\frac{3}{4}$, de B é $\frac{1}{6}$ e de C é $\frac{1}{20}$. A probabilidade de um indivíduo da classe A comprar um carro da marca D é de $\frac{1}{10}$; de B comprar da marca D é de $\frac{3}{5}$ e de C é $\frac{3}{10}$. Em certa loja comprou-se um carro da marca D. Qual a probabilidade de um indivíduo da classe B o tenha comprado?
4. Temos duas caixas: na primeira temos 2 bolas brancas e 7 bolas pretas. Na segunda temos 1 bola branca e 5 pretas. De uma caixa escolhida ao acaso, seleciona-se uma bola e verifica-se que ela é preta. Qual a probabilidade de que a caixa onde for extraída a bola seja a primeira?

Exercícios

5. Em certo colégio, 5% dos homens e 2% das mulheres têm mais de 1,80m de altura. Por outro lado, 60% dos estudantes são homens. Se um estudante é selecionado ao acaso e ele tem mais que 1,80m de altura, qual a probabilidade de que o estudante seja mulher?

6. Numa caixa tem 3 moedas: uma não viciada, outra com 2 caras e uma terceira viciada, de modo que a probabilidade de ocorrer cara nesta moeda é de $1/5$. Uma moeda é selecionada ao acaso na caixa e viu-se que era cara.
 - Qual a probabilidade de ela ter sido a terceira moeda?

Exercícios

7. Uma caixa A contém 8 peças, das quais 3 são defeituosas e uma caixa B contém 5 peças, das quais 2 são defeituosas. Uma peça é retirada aleatoriamente de cada caixa:
- a) Qual a probabilidade p de que ambas as peças sejam defeituosas?
 - b) Qual é a probabilidade p de que uma peça seja defeituosa e a outra não?
 - c) Se uma peça é defeituosa e outra não, qual é a probabilidade p de que a peça defeituosa venha da caixa A?

Exercícios

8. Uma urna contém 5 bolas vermelhas e 3 brancas. Uma bola é selecionada aleatoriamente da urna e abandonada, e duas de outra cor são colocadas na urna. Uma segunda bola é então selecionada da urna. Encontre a probabilidade de que:
- a) A segunda bola seja vermelha
 - b) Ambas as bolas sejam da mesma cor
 - c) Se a segunda bola é vermelha, qual é a probabilidade de que a primeira bola seja vermelha?
 - d) Se ambas são da mesma cor, qual a probabilidade de que sejam brancas?

Exercícios

9. Sua firma recentemente apresentou proposta para um projeto de construção. Se seu principal concorrente apresenta uma proposta, há apenas 0,25 de probabilidade de a sua firma ganhar a concorrência. Se seu concorrente não apresentar proposta, há $\frac{2}{3}$ de chance da sua firma ganhar. A chance de seu principal concorrente de apresentar proposta é de 50%.
- a) Qual a probabilidade de sua firma ganhar a concorrência?
 - b) Qual a probabilidade de seu concorrente ter apresentado proposta, dado que sua firma ganhou a concorrência?

Exercícios

10. Três fábricas fornecem equipamentos de precisão para o laboratório de química de uma universidade. Apesar de ser aparelhos de precisão, existe uma pequena chance de subestimação ou superestimação das medidas efetuadas. A tabela a seguir apresenta o comportamento do equipamento produzido em cada fábrica:

Fábrica I	Subestima	Exata	Superestima
Probabilidade	0,01	0,98	0,01
Fábrica II			
Probabilidade	0,005	0,98	0,015
Fábrica III			
Probabilidade	0,00	0,99	0,01

Exercícios

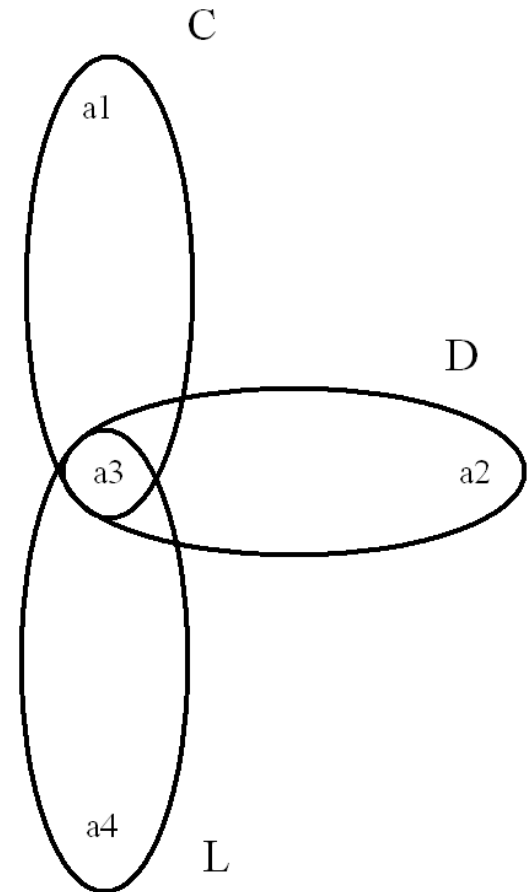
10. (cont.) As fábricas I, II, III fornecem, respectivamente 20%, 30%, e 50% dos aparelhos utilizados. Escolhemos ao acaso, um desses aparelhos e perguntamos a probabilidade de:
- a) Haver subestimação
 - b) Dando medidas exatas, ter sido fabricado em III
11. Marina quer escrever uma carta a Verônica. A probabilidade de que Marina escreva a carta é de $\frac{8}{10}$. A probabilidade de que o correio não a perca é de $\frac{9}{10}$. A probabilidade de que o carteiro a entregue é de $\frac{9}{10}$. Dado que Verônica não recebeu a carta, qual é a probabilidade condicional de que Marina não a tenha escrito?

Exercícios

12. Sejam $C=\{a1, a3\}$, $D=\{a2, a3\}$ e $L =\{a3, a4\}$.

Pergunta-se:

- a) Tomados 2 a 2, esses eventos são independentes?
- b) Os 3, simultaneamente, são independentes?



Exercícios

13. Três componentes C1, C2, e C3, de um mecanismo são postos em série (em linha reta). Suponha que esses componentes sejam dispostos em ordem aleatória. Seja R o evento { C2 está à direita de C1 }, e seja S o evento { C3 está à direita de C1 }. Os eventos R e S são independentes? Por quê?
14. Considere A e B dois eventos quaisquer associados a um experimento. Se $P(A)=0,3$; $P(A+B)=0,8$ e $P(B)=p$, para quais valores de p, A e B serão:
- a) Eventos mutuamente exclusivos?
 - b) Independentes?