Álgebra Linear

Ana Isabel de Azevedo Spinola Dias
belspinola@gmail.com

Departamento de Análise
Universidade Federal Fluminense

2006

Roteiro de Apresentação

(Baseado no livro de Álgebra Linear de David Poole. Ed. Thompson)

Estrutura da Apresentação

Balanceamento de Equações Químicas

- Uma equação química balanceada é uma equação algébrica que dá o número relativo de reagentes e produtos na reação e tem o *mesmo número de átomos de cada tipo* dos lados esquerdo e direito.

Balanceamento de Equações Químicas

- Uma equação química balanceada é uma equação algébrica que dá o número relativo de reagentes e produtos na reação e tem o *mesmo número de átomos de cada tipo* dos lados esquerdo e direito.
- Reagentes à esquerda.

Balanceamento de Equações Químicas

- Uma equação química balanceada é uma equação algébrica que dá o número relativo de reagentes e produtos na reação e tem o *mesmo número de átomos de cada tipo* dos lados esquerdo e direito.
- Reagentes à esquerda.
- Produtos à direita.

Balanceamento de Equações Químicas

- Uma equação química balanceada é uma equação algébrica que dá o número relativo de reagentes e produtos na reação e tem o *mesmo número de átomos de cada tipo* dos lados esquerdo e direito.
- Reagentes à esquerda.
- Produtos à direita.
- Uma seta entre os dois lados para mostrar a direção da reação.

Balanceamento de Equações Químicas

- Uma equação química balanceada é uma equação algébrica que dá o número relativo de reagentes e produtos na reação e tem o *mesmo número de átomos de cada tipo* dos lados esquerdo e direito.
- Reagentes à esquerda.
- Produtos à direita.
- Uma seta entre os dois lados para mostrar a direção da reação.
- Exemplo:
  $2H_2 + O_2 \longrightarrow 2H_2O$ é balanceada.
  Duas moléculas de hidrogênio se combinam com uma molécula de oxigênio para formar duas moléculas de água.

Balanceamento de Equações Químicas

- Uma equação química balanceada é uma equação algébrica que dá o número relativo de reagentes e produtos na reação e tem o *mesmo número de átomos de cada tipo* dos lados esquerdo e direito.
- Reagentes à esquerda.
- Produtos à direita.
- Uma seta entre os dois lados para mostrar a direção da reação.
- Exemplo:
  $2H_2 + O_2 \longrightarrow 2H_2O$ é balanceada.
  Duas moléculas de hidrogênio se combinam com uma molécula de oxigênio para formar duas moléculas de água.
- $6H_2 + 3O_2 \longrightarrow 6H_2O$ também é balanceada.

Fato: A combustão de amônia (NH_3) em oxigênio produz nitrogênio (N_2) e água.

Fato: A combustão de amônia (NH_3) em oxigênio produz nitrogênio (N_2) e água.

Questão: Como encontrar uma equação química balanceada para esta reação?

$$wNH_3 + xO_2 \longrightarrow yN_2 + zH_2O$$

Nitrogênio: $w = 2y$
Hidrogênio: $3w = 2z$
Oxigênio: $2x = z$

$$\left\{ \begin{array}{rcl} w - 2y & = & 0 \\ 3w - 2y & = & 0 \\ 2x - z & = & 0 \end{array} \right.$$

Infinitas soluções

$$4NH_3 + 3O_2 \longrightarrow 2N_2 + 6H_2O$$

Estrutura da Apresentação

Lei de Ohm

força elétrica = resitência $\times$ corrente

$$E = RI$$

volts = ohms $\times$ ampères

Leis de Kirchhoff

- Lei da Corrente (nó)
  A soma das correntes que entram em qualquer nó é igual à soma das correntes que saem dele.

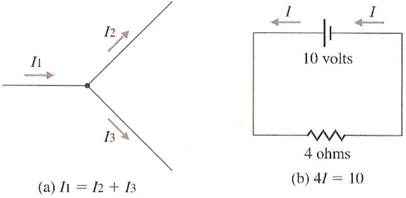
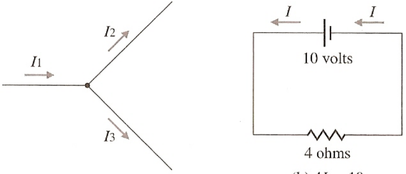


Figura 3

Leis de Kirchhoff

- Lei da Corrente (nó)
  A soma das correntes que entram em qualquer nó é igual à soma das correntes que saem dele.
- Lei da Voltagem (circuitos)
  A soma das quedas de voltagem ao longo de qualquer circuito é igual à voltagem total em torno do circuito (fornecida pelas baterias).



(a) $I_1 = I_2 + I_3$

(b) $4I = 10$

Figura 3

Circuitos Elétricos - Exemplo

Determine as correntes I_1, I_2 e I_3 no circuito elétrico mostrado abaixo:

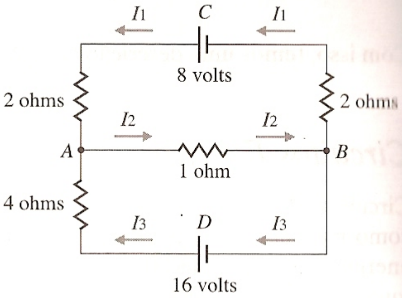
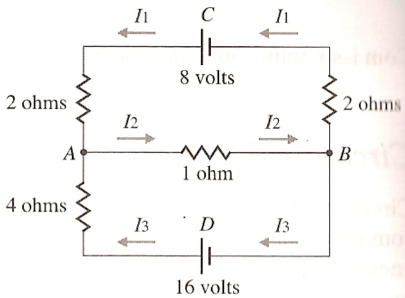


Figura 4

Solução

Circuito com duas baterias e quatro resitores.
No nó A (lei da corrente): $I_1 - I_2 + I_3 = 0$
No nó B (lei da corrente): $I_1 - I_2 + I_3 = 0$
No circuito CABC (lei da voltagem): $4I_1 + I_2 = 8$
No circuito DABD (lei da voltagem): $I_2 + 4I_3 = 16$



Solução (cont.)

Sistema Linear:

$$\begin{cases} I_1 - I_2 + I_3 = 0 \\ 4I_1 + I_2 = 8 \\ I_2 + 4I_3 = 16 \end{cases}$$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & 1 & 0 \\ 4 & 1 & 0 & 8 \\ 0 & 1 & 4 & 16 \end{array}\right) \longrightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 4 & 1 & 0 & 4 \\ 0 & 0 & 1 & 3 \end{array}\right)$$

$I_1 = 1$ ampère
$I_2 = 4$ ampères
$I_3 = 3$ ampères

Circuitos Elétricos - Outro Exemplo

Determine as correntes I, I_1, I_2, I_3, I_4 e I_5 na rede mostrada abaixo (com uma única fonte de energia e 5 resistores). (Ponte de Wheatstone)

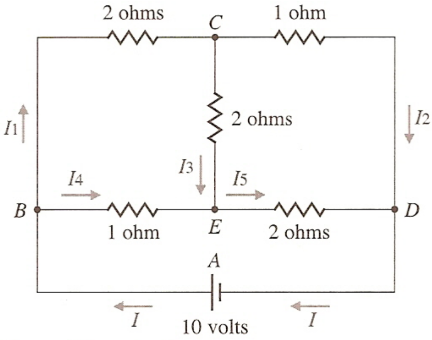


Figura 5 Um circuito ponte

Solução

No nó B (lei da corrente): $I - I_1 - I_4 = 0$
No nó C (lei da corrente): $I_1 - I_2 - I_3 = 0$
No nó D (lei da corrente): $I - I_2 - I_5 = 0$
No nó E (lei da corrente): $I_3 + I_4 - I_5 = 0$
No circuito ABEDA (lei da voltagem): $I_4 + 2I_5 = 10$
No circuito BCEB (lei da voltagem): $2I_1 + 2I_3 - I_4 = 0$
No circuito CDEC (lei da voltagem): $I_2 - 2I_5 - 2I_3 = 0$

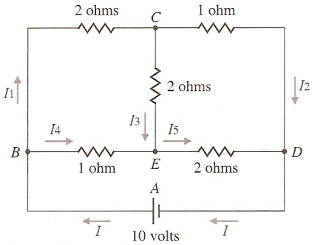


Figura 5 Um circuito ponte

Solução (cont.)

$$\left(\begin{array}{cccccc|c} 1 & -1 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & -1 & 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 2 & 10 \\ 0 & 2 & 0 & 2 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -2 & 0 & -2 & 0 \end{array}\right)$$

$I = 7$ ampéres
$I_1 = 3$ ampères
$I_2 = 4$ ampères
$I_3 = -1$ ampère
$I_4 = 4$ ampères
$I_5 = 3$ ampères

Estrutura da Apresentação

1. Três Aplicações
   - Balanceamento de Equações Químicas
   - Circuitos Elétricos
   - Grafos e Digrafos
2. Temas para Projetos
3. Datas
4. Avaliação

Definição

Um GRAFO é uma estrutura $G = (V, A)$ onde V é um conjunto finito (de vértices) A é um conjunto finito (de arestas)

A é formado por pares de elementos de V (cada aresta conecta dois vértices não necessariamente distintos)

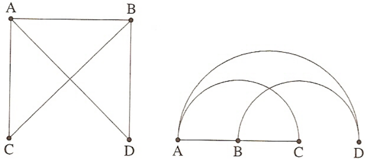


Figura 6 Duas representações de um mesmo grafo

Grafos descrevem relacionamentos entre objetos de um conjunto finito

Podem descrever vários tipos de rede:

- Estradas ligando cidades

Podem descrever relações entre grupos ou indivíduos:

Grafos descrevem relacionamentos entre objetos de um conjunto finito

Podem descrever vários tipos de rede:

- Estradas ligando cidades
- Rotas aéreas ligando cidades

Podem descrever relações entre grupos ou indivíduos:

Grafos descrevem relacionamentos entre objetos de um conjunto finito

Podem descrever vários tipos de rede:

- Estradas ligando cidades
- Rotas aéreas ligando cidades
- Conexões de comunicação ligando satélites

Podem descrever relações entre grupos ou indivíduos:

Grafos descrevem relacionamentos entre objetos de um conjunto finito

Podem descrever vários tipos de rede:

- Estradas ligando cidades
- Rotas aéreas ligando cidades
- Conexões de comunicação ligando satélites

Podem descrever relações entre grupos ou indivíduos:

- Relações de Amizade em uma sociedade

Grafos descrevem relacionamentos entre objetos de um conjunto finito

Podem descrever vários tipos de rede:

- Estradas ligando cidades
- Rotas aéreas ligando cidades
- Conexões de comunicação ligando satélites

Podem descrever relações entre grupos ou indivíduos:

- Relações de Amizade em uma sociedade
- Relações caçador-caça em um ecossistema

Grafos descrevem relacionamentos entre objetos de um conjunto finito

Podem descrever vários tipos de rede:

- Estradas ligando cidades
- Rotas aéreas ligando cidades
- Conexões de comunicação ligando satélites

Podem descrever relações entre grupos ou indivíduos:

- Relações de Amizade em uma sociedade
- Relações caçador-caça em um ecossistema
- Relações de dominância em um esporte

Questão

Como armazenar as informações essenciais de um grafo?

Resposta

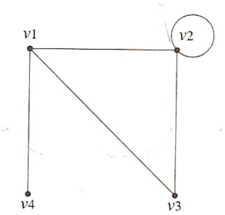
Usamos Matrizes !

Matriz de Adjacência de um Grafo

A *Matriz de Adjacência* de um grafo G com n vértices é a matriz $A = (a_{ij})$ $n \times n$ definida por:

$$a_{ij} = \begin{cases} 1 & \text{se existir uma aresta ligando os vértices } i \text{ e } j. \\ 0 & \text{senão.} \end{cases}$$

Exemplo



Sua matriz de adjacência é:

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Observações

- A matriz de adjacência de um grafo não direcionado é sempre simétrica.

Observações

- A matriz de adjacência de um grafo não direcionado é sempre simétrica.
- Se não houver laços no grafo, os elementos da diagonal são todos iguais a zero.

Observações

- A matriz de adjacência de um grafo não direcionado é sempre simétrica.
- Se não houver laços no grafo, os elementos da diagonal são todos iguais a zero.
- Se houver mais do que uma aresta entre um par de vértices (multigrafos), a definição da matriz pode ser ajustada para a quantidade de arestas entre os vértices i e j.

Definições

- Um CAMINHO em um grafo é uma sequência de arestas que nos permite ir de um vértice a outro continuamente.

Definições

- Um CAMINHO em um grafo é uma sequência de arestas que nos permite ir de um vértice a outro continuamente.
- O COMPRIMENTO de um caminho é o número de arestas que ele contém. (Caminho com k arestas = k-caminho)

Definições

- Um CAMINHO em um grafo é uma sequência de arestas que nos permite ir de um vértice a outro continuamente.
- O COMPRIMENTO de um caminho é o número de arestas que ele contém. (Caminho com k arestas = k-caminho)
- Um caminho é dito FECHADO ou CIRCUITO se ele começa e termina no mesmo vértice.

Definições

- Um CAMINHO em um grafo é uma sequência de arestas que nos permite ir de um vértice a outro continuamente.
- O COMPRIMENTO de um caminho é o número de arestas que ele contém. (Caminho com k arestas = k-caminho)
- Um caminho é dito FECHADO ou CIRCUITO se ele começa e termina no mesmo vértice.
- Um caminho é dito SIMPLES se não inclui a mesma aresta mais de uma vez.

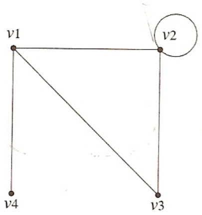
Vamos calcular o quadrado de A.

$$A^2 = \begin{pmatrix} 3 & 2 & 1 & 0 \\ 2 & 3 & 2 & 1 \\ 1 & 2 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

Significado das potências

O que significam os elementos a_{ij} da matriz A^2 ?

$$A^2 = \begin{pmatrix} 3 & 2 & 1 & 0 \\ 2 & 3 & 2 & 1 \\ 1 & 2 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

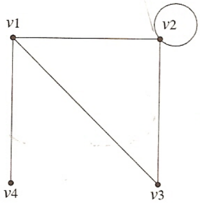


Significado das potências(cont.)

O elemento (i, j) de A^k representa o número de k-caminhos entre os vértices i e j.

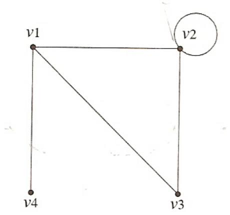
Exemplo

- Quantos 3-caminhos existem entre v_1 e v_2?



Exemplo

- Quantos 3-caminhos existem entre v_1 e v_2?



- Precisamos conhecer o elemento a_{12} da matriz A^3.
  $(A^3)_{12} = 3.1 + 2.1 + 1.1 + 0.0 = 6$
  Logo existem seis 3-caminhos entre os vértices v_1 e v_2.

Digrafo

É um grafo com arestas direcionadas, isto é, onde as arestas são pares ordenados de vértices.
Podem representar:

- Rotas de mão única em uma rede de transportes;

Digrafo

É um grafo com arestas direcionadas, isto é, onde as arestas são pares ordenados de vértices.

Podem representar:

- Rotas de mão única em uma rede de transportes;
- Relação caçador-caça em um ecossistema.

Matriz de Adjacências de um Digrafo

$$a_{ij} = \begin{cases} 1 & \text{se existir aresta direcionada de } v_i \text{ para } v_j \\ 0 & \text{caso contrário.} \end{cases}$$

Exemplo de um Digrafo

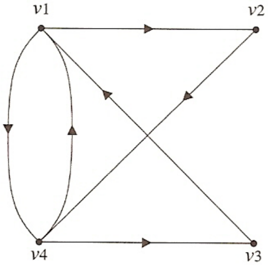


Figura 8 Um dígrafo

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

Observações

- Em geral, a matriz de adjacências de um digrafo não é simétrica;

Observações

- Em geral, a matriz de adjacências de um digrafo não é simétrica;
- A^k contém o número de k-caminhos direcionados entre os vértices.(todas as arestas ao longo de um caminho seguem a mesma direção).

Torneio

Cinco tenistas (Daniel, Gustavo, Hugo, Sérgio e Walter) competem em um torneio “todos-contra-todos” de turno único. O digrafo a seguir resume os resultados. Uma aresta direcionada do vértice i ao vértice j significa que o jogador i ganhou do jogador j.

(Torneio = grafo no qual existe exatamente uma aresta direcionada entre cada par de vértices)

Torneio

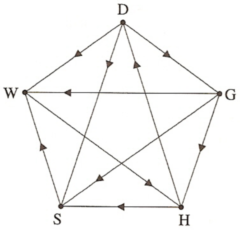


Figura 9 Um torneio

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Classificação do Torneio

Como classificar os cinco jogadores com base nos resultados de suas partidas?

Primeira Maneira

Contar o número de vitórias de cada jogador.
O número de vitórias de cada um é a soma dos elementos da linha correspondente.

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} . \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ 3 \\ 2 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Classificação:
1^o lugar: Daniel e Gustavo 2^o lugar: Hugo 3^o lugar: Sérgio e Walter
O resultado é justo??
Daniel empatou com Gustavo, mas venceu dele.
Sérgio empatou com Walter, mas venceu dele.
Walter teve duas vitórias indiretas, e Sérgio apenas uma.

Segunda Maneira - Vitórias Indiretas

Vitória indireta = 2-caminho no digrafo
(podemos usar o quadrado da matriz)
Para calcular vitórias diretas e indiretas para cada jogador,
precisamos das somas das linhas da $A + A^2$

$$\left(\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & 0 & 2 & 1 & 2 \\ 1 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \right) . \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 8 \\ 7 \\ 6 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}$$

Classificação:
Daniel, Gustavo, Hugo, Walter e Sérgio

Temas Propostos

- Computação Gráfica
  Pré-requisitos: Álgebra matricial e Geometria Analítica

Temas Propostos

- Computação Gráfica
  Pré-requisitos: Álgebra matricial e Geometria Analítica
- Tomografia Computadorizada
  Pré-requisitos: Sistemas Lineares, Logaritmos Naturais e espaço $\mathbb{R}^n$

Temas Propostos

- Computação Gráfica
  Pré-requisitos: Álgebra matricial e Geometria Analítica
- Tomografia Computadorizada
  Pré-requisitos: Sistemas Lineares, Logaritmos Naturais e espaço $\mathbb{R}^n$
- Fractais
  Pré-requisitos: Operadores Lineares em $\mathbb{R}^2$, Logaritmos Naturais, Noção de limite

Temas Propostos

- Computação Gráfica
  Pré-requisitos: Álgebra matricial e Geometria Analítica
- Tomografia Computadorizada
  Pré-requisitos: Sistemas Lineares, Logaritmos Naturais e espaço $\mathbb{R}^n$
- Fractais
  Pré-requisitos: Operadores Lineares em $\mathbb{R}^2$, Logaritmos Naturais, Noção de limite
- Caos
  Pré-requisitos: Operadores Lineares em $\mathbb{R}^2$, Autovalores e Autovetores, Noção de Limite e Continuidade

Temas Propostos (cont.)

- Criptografia
  Pré-requisitos: Matrizes, Eliminação de Gauss, Independência Linear, Transformação Linear

Temas Propostos (cont.)

- Criptografia
  Pré-requisitos: Matrizes, Eliminação de Gauss, Independência Linear, Transformação Linear
- Genética
  Pré-requisitos: Autovalores e Autovetores, Diagonalização de Matrizes, Noção de Limite

Temas Propostos (cont.)

- Criptografia
  Pré-requisitos: Matrizes, Eliminação de Gauss, Independência Linear, Transformação Linear
- Genética
  Pré-requisitos: Autovalores e Autovetores, Diagonalização de Matrizes, Noção de Limite
- Deformações e Morfismos
  Pré-requisitos: Operadores Lineares em $\mathbb{R}^2$, Independência Linear, Bases em $\mathbb{R}^2$

Temas Propostos (cont.)

- Criptografia
  Pré-requisitos: Matrizes, Eliminação de Gauss, Independência Linear, Transformação Linear
- Genética
  Pré-requisitos: Autovalores e Autovetores, Diagonalização de Matrizes, Noção de Limite
- Deformações e Morfismos
  Pré-requisitos: Operadores Lineares em $\mathbb{R}^2$, Independência Linear, Bases em $\mathbb{R}^2$
- Crescimento Populacional por Faixa Etária
  Pré-requisitos: Autovalores e Autovetores, Diagonalização de Matrizes, Noção de Limite

Temas Propostos (cont.)

- Criptografia
  Pré-requisitos: Matrizes, Eliminação de Gauss, Independência Linear, Transformação Linear
- Genética
  Pré-requisitos: Autovalores e Autovetores, Diagonalização de Matrizes, Noção de Limite
- Deformações e Morfismos
  Pré-requisitos: Operadores Lineares em $\mathbb{R}^2$, Independência Linear, Bases em $\mathbb{R}^2$
- Crescimento Populacional por Faixa Etária
  Pré-requisitos: Autovalores e Autovetores, Diagonalização de Matrizes, Noção de Limite
- Cadeias de Markov

Temas Propostos (cont.)

- Criptografia
  Pré-requisitos: Matrizes, Eliminação de Gauss, Independência Linear, Transformação Linear
- Genética
  Pré-requisitos: Autovalores e Autovetores, Diagonalização de Matrizes, Noção de Limite
- Deformações e Morfismos
  Pré-requisitos: Operadores Lineares em $\mathbb{R}^2$, Independência Linear, Bases em $\mathbb{R}^2$
- Crescimento Populacional por Faixa Etária
  Pré-requisitos: Autovalores e Autovetores, Diagonalização de Matrizes, Noção de Limite
- Cadeias de Markov
- Grafos

Avaliação

O trabalho consiste de quatro partes, cada uma valendo 2,5 pontos.

- Texto + Relatório

Avaliação

O trabalho consiste de quatro partes, cada uma valendo 2,5 pontos.

- Texto + Relatório
- Apresentação (Power Point ou similar)

Avaliação

O trabalho consiste de quatro partes, cada uma valendo 2,5 pontos.

- Texto + Relatório
- Apresentação (Power Point ou similar)
- Exercícios resolvidos

Avaliação

O trabalho consiste de quatro partes, cada uma valendo 2,5 pontos.

- Texto + Relatório
- Apresentação (Power Point ou similar)
- Exercícios resolvidos
- Exercícios computacionais

Leitura Recomendada I

Anton, H. e Rorres, C.
Álgebra Linear com Aplicações.
Bookman, São Paulo, 2001.