Álgebras de Boole:

Definição e propriedades

3.2 AXIOMAS PARA UMA ÁLGEBRA BOOLEANA

Por *álgebra booleana* entendemos um conjunto B junto com duas operações binárias $\wedge$ e $\vee$ em B, uma operação singular ' em B e dois elementos específicos 0 e 1 de B tais que os axiomas seguintes se verifiquem.

(1) Para todo x e y em B, $x \vee y = y \vee x$
(2) Para todo x e y em B, $x \wedge y = y \wedge x$
Leis comutativas

(3) Para todo x, y, z em B, $x \wedge (y \vee z) = (x \wedge y) \vee (x \wedge z)$
(4) Para todo x, y, z em B, $x \vee (y \wedge z) = (x \vee y) \wedge (x \vee z)$
Leis distributivas

(5) Para todo x em B, $x \vee 0 = x$
(6) Para todo x em B, $x \wedge 1 = x$
(7) Para todo x em B, $x \vee x' = 1$
(8) Para todo x em B, $x \wedge x' = 0$
(9) $0 \neq 1$

Uma álgebra booleana será designada por um sextuplo $\langle B, \diamond, \diamond, ', 0, 1 \rangle$. Algumas vezes fala-se do conjunto B como uma álgebra booleana, mas isto não passa de um uso negligente da terminologia.

Exemplo 3.3.

(a) A álgebra booleana de dois elementos

$$\mathcal{B}_0 = \langle \{\phi, \{\phi\}\}, \cap, \cup, {}^-, \phi, \{\phi\} \rangle$$

em que $B = \{\phi, \{\phi\}\}$; $\wedge$ = a operação de intersecção na teoria dos conjuntos ordinária $\cap$; $\vee$ = a operação de união na teoria dos conjuntos ordinária $\cup$; ' = à operação de complementação na teoria dos conjuntos ordinária; $0 = \phi$; e $1 = \{\phi\}$.$^-$

notar que $\cap$, $\cup$ e $^-$ são operações em $\{\phi, \{\phi\}\}$

Exemplo 3.4.

Seja B o conjunto de todos os inteiros positivos que são divisores inteiros de 70. Assim,

$$B = \{1, 2, 5, 7, 10, 14, 35, 70\}$$

Para quaisquer x e y em B, seja $x \wedge y$ o máximo divisor comum de x e y, seja $x \vee y$ o mínimo múltiplo comum de x e y e seja $x' = 70/x$. (Por exemplo, $5 \wedge 14 = 1$, $5 \vee 14 = 70$, $10 \wedge 35 = 5$, $10 \vee 35 = 70$, $5' = 14$, $10' = 7$.) Então, $\langle B, \wedge, \vee, ', 1, 70 \rangle$ é uma álgebra booleana. A verificação dos Axiomas (1)-(9) utiliza as propriedades elementares do *máximo divisor comum* e do *mínimo múltiplo comum*.

Terminologia: $x \wedge y$ é chamado de *encontro* de x e y.
$x \vee y$ é chamado de *junção* de x e y.
x' é chamado de *complemento* de x.
0 é chamado de *elemento zero*.
1 é chamado de *elemento unitário*

Teorema 3.1. *Unicidade do complemento:* Se $x \vee y = 1$ e $x \wedge y = 0$, então $y = x'$.

Prova. Primeiro,

$$
\begin{aligned}
y &= y \vee 0 && \text{pelo Axioma (5)}\\
&= y \vee (x \wedge x') && \text{pelo Axioma (8)}\\
&= (y \vee x) \wedge (y \vee x') && \text{pelo Axioma (4)}\\
&= (x \vee y) \wedge (y \vee x') && \text{pelo Axioma (1)}\\
&= 1 \wedge (y \vee x') && \text{por hipótese}\\
&= (y \vee x') \wedge 1 && \text{pelo Axioma (2)}\\
&= y \vee x' && \text{pelo Axioma (6)}
\end{aligned}
$$

Segundo,

$$
\begin{aligned}
x' &= x' \vee 0 && \text{pelo Axioma (5)}\\
&= x' \vee (x \wedge y) && \text{por hipótese}\\
&= (x' \vee x) \wedge (x' \vee y) && \text{pelo Axioma (4)}\\
&= (x \vee x') \wedge (x' \vee y) && \text{pelo Axioma (1)}\\
&= 1 \wedge (x' \vee y) && \text{pelo Axioma (7)}\\
&= (x' \vee y) \wedge 1 && \text{pelo Axioma (2)}\\
&= x' \vee y && \text{pelo Axioma (6)}\\
&= y \vee x' && \text{pelo Axioma (1)}\\
&= y && \text{pela primeira parte acima}
\end{aligned}
$$

Teorema 3.3. *Idempotência:* Para todo x em B

$$\text{(i)}\ x \wedge x = x, \qquad \text{(ii)}\ x \vee x = x$$

Prova.

$$\begin{aligned}
\text{(i)}\ x &= x \wedge 1 && \text{pelo Axioma (6)} \\
&= x \wedge (x \vee x') && \text{pelo Axioma (7)} \\
&= (x \wedge x) \vee (x \wedge x') && \text{pelo Axioma (3)} \\
&= (x \wedge x) \vee 0 && \text{pelo Axioma (8)} \\
&= x \wedge x && \text{pelo Axioma (5)}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\text{(ii)}\ x &= x \vee 0 && \text{pelo Axioma (5)} \\
&= x \vee (x \wedge x') && \text{pelo Axioma (8)} \\
&= (x \vee x) \wedge (x \vee x') && \text{pelo Axioma (4)} \\
&= (x \vee x) \wedge 1 && \text{pelo Axioma (7)} \\
&= x \vee x && \text{pelo Axioma (6)}
\end{aligned}$$

DUAL DE UMA PROPOSICAO

Definição: Por *dual* de uma proposição com respeito a uma álgebra booleana B, entendemos a proposição obtida pela substituição de $\wedge$ por $\vee$, $\vee$ por $\wedge$, 1 por 0 e 0 por 1, i.é., trocando-se $\wedge$ e $\vee$ e trocando-se 0 e 1, uns pelos outros.

Teorema 3.4. *Princípio da dualidade* (versão de prova teórica): Se uma proposição **A** é dedutível dos Axiomas (1)-(9), então o dual de **A** também é dedutível dos Axiomas (1)-(9).

A prova do Teorema 3.3 é duas vezes maior do que poderia ser. Como $x \wedge x = x$ é o dual de $x \vee x = x$, bastaria provarmos que $x \wedge x = x$ e então citar o princípio da dualidade para se obter $x \vee x = x$. Na verdade, a prova do princípio da dualidade é ilustrada na prova do Teorema 3.3: a prova de (ii) é obtida tomando-se os duais das proposições na prova de (i).

Teorema 3.5. Para todo x, y, z em B

(i)	$x \wedge 0 = 0$	
(ii)	$x \vee 1 = 1$	
(iii)	$x \wedge (x \vee y) = x$	Leis de absorção
(iv)	$x \vee (x \wedge y) = x$	
(v)	$[y \wedge x = z \wedge x \;\&\; y \wedge x' = z \wedge x'] \rightarrow y = z$	
(vi)	$x \vee (y \vee z) = (x \vee y) \vee z$	Leis associativas
(vii)	$x \wedge (y \wedge z) = (x \wedge y) \wedge z$	
(viii)	$(x \vee y)' = x' \wedge y'$	Leis de De Morgan
(ix)	$(x \wedge y)' = x' \vee y'$	
(x)	$x \vee y = (x' \wedge y')'$	
(xi)	$x \wedge y = (x' \vee y')'$	
(xii)	$x \wedge y' = 0 \leftrightarrow x \wedge y = x$	
(xiii)	$0' = 1$	
(xiv)	$1' = 0$	
(xv)	$x \wedge (x' \vee y) = x \wedge y$	
(xvi)	$x \vee (x' \wedge y) = x \vee y$	

Prova. Daqui para frente, em geral não citaremos os axiomas e teoremas particulares que estarão sendo usados na prova.

(i) $x \wedge 0 = (x \wedge 0) \vee 0 = (x \wedge 0) \vee (x \wedge x') = (x \wedge x') \vee (x \wedge 0) = x \wedge (x' \vee 0) =$
$= x \wedge x' = 0$

(ii) é o dual de (i).

(iii) $x \wedge (x \vee y) = (x \vee 0) \wedge (x \vee y) = x \vee (0 \wedge y) = x \vee 0 = x.$

(iv) é o dual de (iii).

(v) Suponha $y \wedge x = z \wedge x$ & $y \wedge x' = z \wedge x'$. Então

$$y = y \wedge 1 = y \wedge (x \vee x') = (y \wedge x) \vee (y \wedge x')$$
$$= (z \wedge x) \vee (z \wedge x') = z \wedge (x \vee x') = z \wedge 1 = z$$

...

Ver prova das demais propriedades na bibliografia usada para compor os slides.
Link para o livro disponível na aula do dia 16/09/11
(Álgebra Booleana e Circuitos de Chaveamento – Elliott Mendelson)

PROBLEMAS

Em uma álgebra booleana, seja $x \sim y$ definido como $x \wedge y'$. Prove:

(*a*) $x \vee y = x \vee (y \sim x)$

Solução:

(*a*) $x \vee (y \sim x) = x \vee (y \wedge x') = (x \vee y) \wedge (x \vee x') = (x \vee y) \wedge 1 = x \vee y$

Álgebras de Boole:

Transformações entre estruturas

Isomorfismos

Uma função Φ é chamada de *isomorfismo* de uma álgebra booleana $\mathcal{B} = \langle B, \wedge_{\mathcal{B}}, \vee_{\mathcal{B}}, '_{\mathcal{B}}, 0_{\mathcal{B}}, 1_{\mathcal{B}} \rangle$ em uma álgebra booleana $\mathcal{C} = \langle C, \wedge_C, \vee_C, '_C, 0_C, 1_C \rangle$ se, e somente, se

(*a*) Φ é uma função biunívoca de B em C,

(*b*) para todo x, y em B

$$\begin{aligned} \Phi(x \wedge_{\mathcal{B}} y) &= \Phi(x) \wedge_C \Phi(y) \\ \Phi(x \vee_{\mathcal{B}} y) &= \Phi(x) \vee_C \Phi(y) \\ \Phi(x'^{\mathcal{B}}) &= (\Phi(x))'^{C} \end{aligned}$$

Tal função Φ é chamada de isomorfismo de $\mathcal{B}$ *sobre* $\mathcal{C}$ se, além disso, Φ é uma função de B sobre C.

Função biunívoca = função bijetora (função sobrejetora e injetora simultaneamente).
= relação funcional injetora sobrejetora total.

Teorema 3.13. Seja Φ um isomorfismo de uma álgebra booleana $\mathcal{B}$ em (respectivamente, sobre) uma álgebra booleana $\mathcal{C}$ (com a notação dada acima). Então,

(*a*) $\Phi(0_{\mathcal{B}}) = 0_{\mathcal{C}}$ e $\Phi(1_{\mathcal{B}}) = 1_{\mathcal{C}}$.

(*b*) Não é necessário supor que

$$\Phi(x \vee_{\mathcal{B}} y) = \Phi(x) \vee_{\mathcal{C}} \Phi(y) \quad \text{para todos } x, y \text{ em } B$$

Alternativamente, poderíamos omitir a hipótese de que

$$\Phi(x \wedge_{\mathcal{B}} y) = \Phi(x) \wedge_{\mathcal{C}} \Phi(y)$$

(*c*) Se Θ é um isomorfismo de $\mathcal{C}$ em (respectivamente, sobre) uma álgebra booleana $\mathcal{D} = \langle D, \wedge_{\mathcal{D}}, \vee_{\mathcal{D}}, {'}_{\mathcal{D}}, 0_{\mathcal{D}}, 1_{\mathcal{D}} \rangle$, a aplicação composta (*) $\Theta \circ \Phi$ é um isomorfismo de $\mathcal{B}$ em (respectivamente, sobre) $\mathcal{D}$.

(*d*) A aplicação inversa Φ^{-1} é um isomorfismo da subálgebra de $\mathcal{C}$ determinado por $\Phi[B]$ sobre $\mathcal{B}$, e, em particular, se Φ é sobre $\mathcal{C}$, Φ^{-1} é um isomorfismo de $\mathcal{C}$ sobre $\mathcal{B}$.

Prova

(a)
$$\Phi(0_{\mathcal{B}}) \overset{\text{Axioma 8}}{=} \Phi(x \wedge_{\mathcal{B}} x'^{\mathcal{B}}) \overset{\text{Def. Isomorfismo b.1}}{=} \Phi(x) \wedge_{\mathcal{C}} \Phi(x'^{\mathcal{B}})$$
$$\underset{\text{Def. Isomorfismo b.3}}{=} \Phi(x) \wedge_{\mathcal{C}} (\Phi(x))'^{\mathcal{C}} \underset{\text{Axioma 8}}{=} 0_{\mathcal{C}}$$

$$\Phi(1_{\mathcal{B}}) \overset{\text{Teorem. 3.5.(xiv)}}{=} \Phi(0'^{\mathcal{B}}_{\mathcal{B}}) \underset{\text{Def. Isomorfismo b.3}}{=} (\Phi(0_{\mathcal{B}}))'^{\mathcal{C}} \overset{\text{Item (a)}}{=} 0'^{\mathcal{C}}_{\mathcal{C}} = 1_{\mathcal{C}}$$

(b)
$$\Phi(x \vee_{\mathcal{B}} y) \overset{\text{Teorem. 3.5(x)}}{=} \Phi((x'^{\mathcal{B}} \wedge_{\mathcal{B}} y'^{\mathcal{B}})'^{\mathcal{B}}) \overset{\text{Def. Isomorfismo b.3}}{=} (\Phi(x'^{\mathcal{B}} \wedge_{\mathcal{B}} y'^{\mathcal{B}}))'^{\mathcal{C}}$$
$$\overset{\text{Def. Isomorfismo b.1}}{=} (\Phi(x'^{\mathcal{B}}) \wedge_{\mathcal{C}} \Phi(y'^{\mathcal{B}}))'^{\mathcal{C}} = ((\Phi(x))'^{\mathcal{C}} \wedge_{\mathcal{C}} (\Phi(y))'^{\mathcal{C}})'^{\mathcal{C}} =$$
$$\underset{\text{Teorem. 3.5(x)}}{=} \Phi(x) \vee_{\mathcal{C}} \Phi(y)$$

Prova dos itens (c) e (d) serão omitidos pois versam sobre composição de funções bijetoras e sobre função inversa, assuntos ainda não formalizados na disciplina.

A prova em si não tem nenhuma dificuldade e é descrita na página 85 do *Elliott Mendelson*. (Álgebra Booleana e Circuitos de Chaveamento)

Dizemos que $\mathcal{B}$ *é isomorfa a* $\mathcal{C}$ se, e somente se, existe um isomorfismo de $\mathcal{B}$ sobre $\mathcal{C}$. Do Teorema 3.13 (*d*, *c*) segue-se que, se $\mathcal{B}$ é isomorfa à $\mathcal{C}$, $\mathcal{C}$ é isomorfa a $\mathcal{B}$ e se, além disso, $\mathcal{C}$ é isomorfa a $\mathcal{D}$, $\mathcal{B}$ é isomorfa a $\mathcal{D}$. As álgebras booleanas isomorfas têm, em certo sentido, a mesma estrutura booleana. Com maior precisão, isto significa que, qualquer propriedade (formulada na linguagem das álgebras booleanas) que se verifique para uma álgebra booleana, também se verifica para toda álgebra booleana isomorfa (*).

Qual a relação entre álgebra booleana e reticulados?

Uma álgebra booleana gera uma estrutura de reticulado que satisfaz duas propriedades. Que propriedades são estas?

Intuição (não cai na prova)

- Formas normais
- Subálgebras

Assunto da primeira prova encerra aqui.

Primeira prova:

05/10/2011

Os exercícios finais foram adicionados a primeira lista.