Análise de Sistemas Contínuos por Transformada de Laplace
(Capítulo 4)

Tsang Ing Ren - tir@cin.ufpe.br
UFPE - Universidade Federal de Pernambuco
CIn - Centro de Informática

Baseadas no material do Prof. Aluizio Fausto Ribeiro Araújo

Tópicos

- Introdução
- A Transformada de Laplace
- A Transformada Inversa
- Propriedades da Transformada de Laplace
- Solução de Equações Diferenciais e Integro-diferenciais
- Diagrama de Blocos
- Realização de Sistemas

Transformada de Laplace (i)

- Definições
  - Decompõe-se o sinal $f(t)$ em sinais exponenciais complexos da forma $exp(st)$ onde s é uma variável complexa (freqüência complexa do sinal).
  - Dado um sinal $x(t)$, a transformada (bilateral) de Laplace é:

$$X(s) = \int_{-\infty}^{\infty} x(t)\, e^{-st}\, dt$$

  - A transformada (bilateral) inversa de Laplace é definida como:

$$x(t) = \frac{1}{2\pi j} \int_{c-j\infty}^{c+j\infty} X(s)\, e^{st}\, ds \quad , \quad \text{onde}$$

    - c é uma constante que assegura a convergência da integral;
    - $x(t)$ é um sinal no domínio do tempo;
    - $X(s)$ é um sinal no domínio da freqüência.

Transformada de Laplace (ii)

- Observações
  - Simbolicamente, tem-se que:

$$X(s) = L[x(t)] \qquad \text{e} \qquad x(t) = L^{-1}[X(s)], \text{ logo pode-se inferir}$$

$$x(t) = L^{-1}\{L[x(t)]\} \qquad \text{e} \qquad X(s) = L\{L^{-1}[X(s)]\}$$

  - O par de transformada de Laplace pode também ser indicado por:

$$x(t) \Leftrightarrow X(s)$$

    - Esta transformada, chamada de bilateral ou dois-lados pode tratar de sinais que existam em todo intervalo de tempo, isto é, sinais causais ou não-causais.
    - A Transformada Unilateral (ou de um lado) de Laplace, a ser definida posteriormente, só considera sinais causais.

Transformada de Laplace (iii)

- Características
  - Linearidade deste operador:

$$\text{Sejam os pares } x_1(t) \Leftrightarrow X_1(s); \quad x_2(t) \Leftrightarrow X_2(s)$$

$$\text{então } a_1x_1(t) + a_2x_2(t) \Leftrightarrow a_1X_1(s) + a_2X_2(s)$$

Prova

$$L[a_1x_1(t) + a_2x_2(t)] = \int_{-\infty}^{\infty} [a_1x_1(t) + a_2x_2(t)]e^{-st}dt =$$

$$a_1\int_{-\infty}^{\infty} x_1(t)e^{-st}dt + a_2\int_{-\infty}^{\infty} x_2(t)e^{-st}dt = a_1X_1(s) + a_2X_2(s)$$

  - Região de convergência (ROC):
    - A região de convergência (ou região de existência) de $X(s)$ é o conjunto de valores de s para os quais existe a integral que define a transformada de Laplace.

Transformada de Laplace (iv)

– Exemplo:

Determine $X(s)$ e sua região de convergência para $x(t) = e^{-at}u(t)$

Por definição $X(s) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{-at}u(t)e^{-st}dt$, como $u(t) = 0, \quad t < 0$, então

$$X(s) = \int_{0}^{\infty} e^{-at}\, e^{-st}dt = \int_{0}^{\infty} e^{-(s+a)t}\, dt = -\frac{1}{s+a} e^{-(s+a)t} \Big|_{0}^{\infty}$$

$$\lim_{t\to\infty} e^{-(s+a)t} = \begin{cases} 0 & \mathrm{Re}(s+a) > 0 \\ \infty & \mathrm{Re}(s+a) < 0 \end{cases}$$

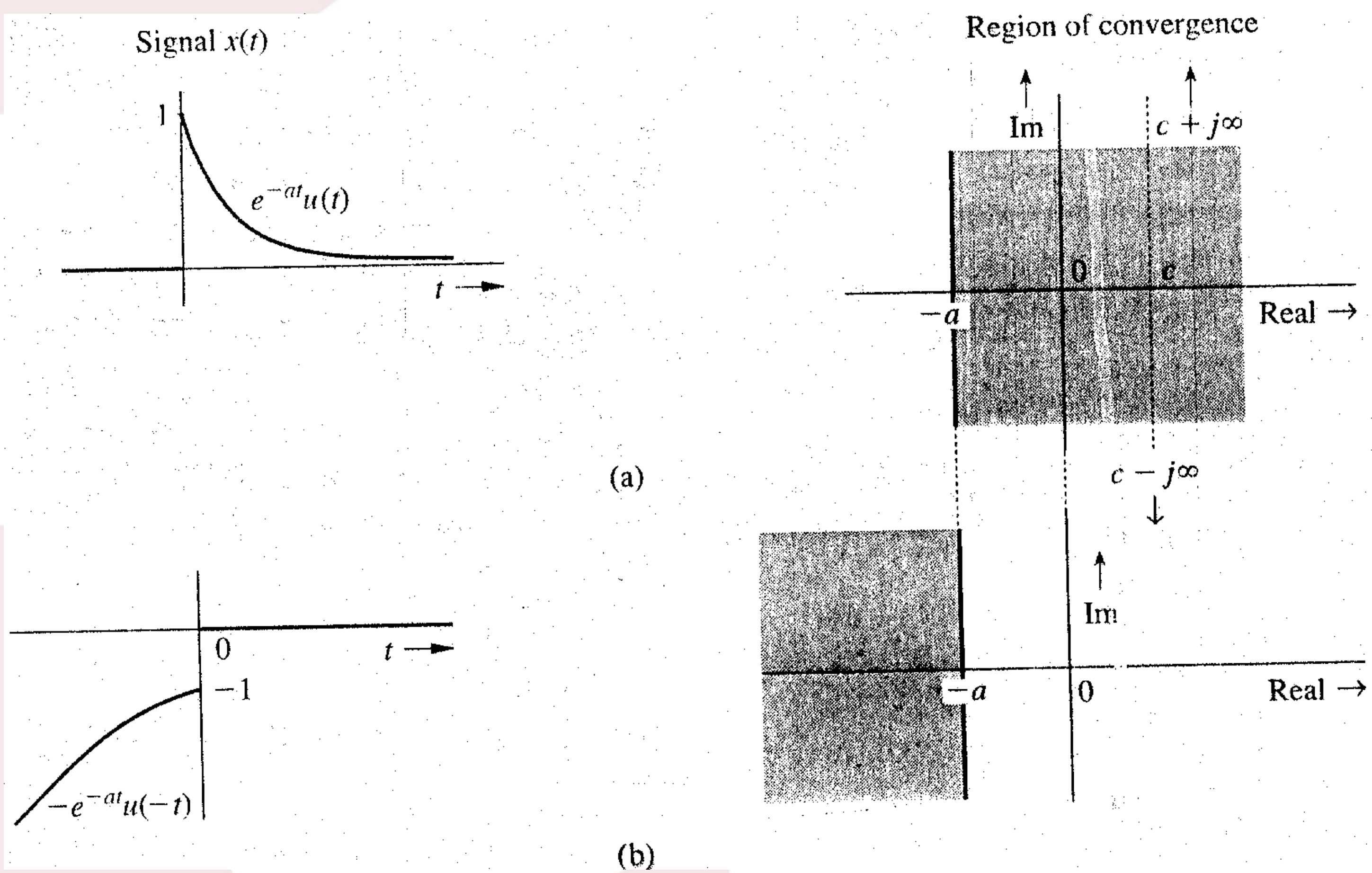
Logo $\quad X(s) = \dfrac{1}{s+a} \qquad \mathrm{Re}(s+a) > 0$

ou $\quad e^{-at}u(t) \Leftrightarrow \dfrac{1}{s+a} \qquad \mathrm{Re}\, s > -a$

A região de convergência de $X(s)$ é $\mathrm{Re}\, s > -a$.

Transformada de Laplace (v)

– Exemplo:



Transformada de Laplace (vi)

- Observações
  - Região de convergência para sinais de duração finita: Este sinal é caracterizado como existindo apenas no intervalo $[t_1, t_2]$. Para um sinal de duração finita que seja absolutamente integrável, a ROC é todo o plano s.
    - Isto ocorre pois a exponencial (da definição de Transformada de Laplace) é finita, uma vez que é integrada no intervalo finito de existência do sinal.
  - Papel de ROC: Requerido para avaliar a Transformada Inversa de Laplace. A operação para achar tal Transformada requer integração no plano complexo. O caminho de integração deve estar no ROC (ou existência) para $X(s)$.

Transformada de Laplace (vii)

- Transformada Unilateral de Laplace
  - Transformada na qual todos sinais são restringidos a serem causais. É um caso especial da Transformada bilateral.
    - Ela é necessária para que exista correspondência um-para-um, entre $x(t)$ e $X(s)$, quando não se tem especificado o ROC (como ilustrado no exemplo anterior).
    - Os limites de integração passam a ser zero e infinito.
  - Transformada Unilateral de Laplace $X(s)$ de um sinal $x(t)$:
    - O limite inferior assegura a inclusão da resposta ao impulso e permite o uso das condições iniciais (no instante do limite inferior) para solucionar equações diferenciais empregando Transformada de Laplace.

$$X(s) = \int_{0^-}^{\infty} x(t) e^{-st} dt$$

Transformada de Laplace (viii)

- Transformada Unilateral de Laplace
  - Em princípio não há diferenças entre as Transformadas de Laplace Unilateral e Bilateral.
    - A Transformada Unilateral é a Transformada Bilateral que lida com subclasse de sinais que existem a partir de *t=0*.
    - A expressão para a Transformada Inversa permanece inalterada em ambos os casos.
  - Existência da Transformada Unilateral de Laplace:

$$X(s) = \int_{0^-}^{\infty} x(t)e^{-st}dt = \int_{0^-}^{\infty} [x(t)e^{-\sigma t}]e^{-j\omega t}dt, \quad \text{onde} \left|e^{-j\omega t}\right| = 1$$

$$\text{logo a integral converge se} \quad \int_{0^-}^{\infty} \left|x(t)e^{-\sigma t}\right| dt < \infty$$

Transformada de Laplace (ix)

- Exemplo: Determine as Transformadas de Laplace a seguir

(a) $\delta(t)$; (b) $u(t)$; (c) $\cos\omega_0 t\, u(t)$.

(a) $L[\delta(t)] = \int_{0^-}^{\infty} \delta(t)\, e^{-st}\, dt = 1$,

usou-se propriedade de amostragem $\int_{-\infty}^{\infty} \phi(t)\delta(t)dt = \phi(0)$

(b) $L[u(t)] = \int_{0^-}^{\infty} u(t)\, e^{-st}\, dt = \int_{0^-}^{\infty} e^{-st}\, dt = -\frac{1}{s} e^{-st}\Big|_{0^-}^{\infty} = \frac{1}{s}$, $\quad \mathrm{Re}\, s > 0$

(c) Lembre-se que $\cos\omega_0 t\, u(t) = \frac{1}{2}\left[e^{j\omega_0 t} + e^{-j\omega_0 t}\right] u(t)$, logo

$$L[\cos\omega_0 t\, u(t)] = \frac{1}{2} L\left[e^{j\omega_0 t} u(t) + e^{-j\omega_0 t} u(t)\right] = \frac{1}{2}\left[\frac{1}{s - j\omega_0} + \frac{1}{s + j\omega_0}\right] \therefore$$

$$L[\cos\omega_0 t\, u(t)] = \frac{s}{s^2 + (\omega_0)^2}, \quad \mathrm{Re}(s \pm j\omega_0) = \mathrm{Re}(s) > 0$$

A Transformada Inversa (i)

- Determinação da Transformada Inversa
  - Busca-se expressar X(s) como o somatório de funções mais simples que podem ser encontradas em tabelas.

$$\text{Exemplo: Encontre a Transformada Inversa de } \frac{7s-6}{s^2-s-6}$$

$$\frac{7s-6}{s^2-s-6}=\frac{7s-6}{(s+2)(s-3)}=\frac{k_1}{s+2}+\frac{k_2}{s-3}\Rightarrow$$

$$k_1=\left.\frac{7s-6}{\cancel{(s+2)}(s-3)}\right|_{s=-2}=\frac{-14-6}{-2-3}=4$$

$$k_2=\left.\frac{7s-6}{(s+2)\cancel{(s-3)}}\right|_{s=3}=\frac{21-6}{3+2}=3$$

$$\text{Logo,}\quad X(s)=\frac{7s-6}{(s+2)(s-3)}=\frac{4}{s+2}+\frac{3}{s-3}\Rightarrow x(t)=(4e^{-2t}+3e^{3t})u(t)$$

A Transformada Inversa (ii)

- Determinação da Transformada Inversa

Exemplo: Encontre a Transformada Inversa de $X(s) = \dfrac{2s^2+5}{s^2+3s+2}$

onde $X(s)$ é uma função imprópria onde $M = N$.

$$X(s) = \frac{2s^2+5}{s^2+3s+2} = \frac{2s^2+5}{(s+1)(s+2)} = 2 + \frac{k_1}{s+1} + \frac{k_2}{s+2} \Rightarrow$$

$$k_1 = \left.\frac{2s^2+5}{\cancel{(s+1)}(s+2)}\right|_{s=-1} = \frac{2+5}{-1+2} = 7$$

$$k_2 = \left.\frac{2s^2+5}{(s+1)\cancel{(s+2)}}\right|_{s=-2} = \frac{8+5}{-2+1} = -13$$

Logo, $X(s) = 2 + \dfrac{7}{s+1} - \dfrac{13}{s+2} \Rightarrow x(t) = 2\delta(t) + (7e^{-t} - 13e^{-2t})u(t)$

- Determinação da Transformada Inversa

Exemplo: Encontre a Transformada Inversa de $X(s) = \dfrac{6(s+34)}{s(s^2+10s+34)}$

$$X(s) = \frac{6(s+34)}{s(s+5-j3)(s+5+j3)} = \frac{k_1}{s} + \frac{k_2}{s+5-j3} + \frac{k_2^*}{s+5+j3} \Rightarrow$$

$$k_1 = \left.\frac{6(s+34)}{\cancel{s}(s+5-j3)(s+5+j3)}\right|_{s=0} = \frac{6\times 34}{34} = 6$$

$$k_2 = \left.\frac{6(s+34)}{s\cancel{(s+5-j3)}(s+5+j3)}\right|_{s=-5+j3} = \frac{29+j3}{-3-j5} = -3+4j$$

$$k_2^* = -3-j4, \text{ em forma polar } \; -3+j4 = (\sqrt{3^2+4^2})e^{j\tan^{-1}(4/-3)} = 5e^{j\tan^{-1}(4/-3)}$$

$$\text{Logo,} \quad X(s) = \frac{6}{s} + \frac{5e^{j\tan^{-1}(4/-3)}}{s+5-j3} + \frac{5e^{-j\tan^{-1}(4/-3)}}{s+5+j3}$$

$$\Rightarrow x(t) = [6 + 10e^{-5t}\cos(3t+126.9^0)]u(t)$$

Propriedades da Transformada de Laplace (i)

- Motivação:
  - Úteis para encontrar a Transformada de Laplace e para se determinar soluções de equações Integro-diferenciais.
- Deslocamento no Tempo:

$$x(t) \Leftrightarrow X(s), \quad \text{então para } t_0 \geq 0, \text{ tem-se } x(t-t_0) \Leftrightarrow X(s)\,e^{-st_0}$$

Esta propriedade pode ser alternativamente expressa como:

$$\text{Se} \quad x(t)\,u(t) \Leftrightarrow X(s), \text{então } x(t-t_0)\,u(t-t_0) \Leftrightarrow X(s)e^{-st_0}, \quad t_0 \geq 0.$$

- Deslocamento na Freqüência:

$$x(t) \Leftrightarrow X(s), \quad \text{então} \quad x(t)e^{s_0 t} \Leftrightarrow X(s-s_0)$$

- Propriedade de Diferenciação no Tempo

$$x(t) \Leftrightarrow X(s), \quad \text{então} \quad \frac{dx(t)}{dt} \Leftrightarrow sX(s) - x(0^-), \quad \text{e em geral}$$

$$\frac{d^n x(t)}{dt^n} \Leftrightarrow s^n X(s) - \sum_{k=1}^{n} s^{n-k} x^{(k-1)}(0^-)$$

Propriedades da Transformada de Laplace (ii)

- Propriedade de Integração no Tempo:

$$x(t) \Leftrightarrow X(s), \ \text{então} \int_{0^-}^{t} x(\tau)d\tau \Leftrightarrow \frac{X(s)}{s}, \ \text{e}$$

$$\int_{-\infty}^{t} x(\tau)d\tau \Leftrightarrow \frac{X(s)}{s} + \frac{\int_{-\infty}^{0^-} x(\tau)d\tau}{s}$$

- Escalonamento:

$$x(t) \Leftrightarrow X(s), \ \text{então} \ x(at) \Leftrightarrow \frac{1}{a} X\left(\frac{s}{a}\right)$$

- Convolução no Tempo e Convolução na Freqüência

Considere $x_1(t) \Leftrightarrow X_1(s)$ e $x_2(t) \Leftrightarrow X_2(s)$.

Convolução no tempo $x_1(t) * x_2(t) \Leftrightarrow X_1(s)X_2(s)$

Convolução na freqüência $x_1(t)x_2(t) \Leftrightarrow (1/2\pi j)[X_1(s) * X_2(s)]$

Propriedades da Transformada de Laplace (iii)

- Adição e Multiplicação Escalar

$$\text{Adição} \quad x_1(t) + x_2(t) \Leftrightarrow X_1(s) + X_2(s)$$
$$\text{Multiplicação por escalar} \quad kx_1(t) \Leftrightarrow kX_1(s)$$

- Propriedade de Diferenciação na Freqüência:

$$x(t) \Leftrightarrow X(s), \quad \text{então} \; -tx(t) \Leftrightarrow \frac{dX(s)}{ds}$$

- Propriedade de Integração na Freqüência:

$$x(t) \Leftrightarrow X(s), \quad \text{então} \; \frac{x(t)}{t} \Leftrightarrow \int_s^{\infty} X(\tau)d\tau$$

Propriedades da Transformada de Laplace (iii)

- Valor Inicial

Terorema do valor inicial: Se $x(t)$ e sua $dx(t)/dt$ têm Transformadas de Laplace, então $x(0^+) = \lim_{s\to\infty} sX(s)$, desde que o limite exista.

- Valor final

Terorema do valor final: Se $x(t)$ e sua $dx(t)/dt$ têm Transformadas de Laplace, então $\lim_{t\to\infty} x(t) = \lim_{s\to 0} sX(s)$, caso não haja pólos no RHP ou no eixo imaginário.

Propriedades da Transformada de Laplace (iv)

- Exemplo

Determine os valores iniciais e finais de $y(t)$ para $Y(s)$ dado por :

$$Y(s) = \frac{10(2s+3)}{s(s^2+2s+5)}$$

Assim tem - se que

$$y(0^+) = \lim_{s\to\infty} sY(s) = \lim_{s\to\infty} s\left[\frac{10(2s+3)}{s(s^2+2s+5)}\right] = \lim_{s\to\infty} \frac{10(2s+3)}{(s^2+2s+5)} = 0$$

$$y(\infty) = \lim_{s\to 0} sY(s) = \lim_{s\to 0} s\left[\frac{10(2s+3)}{s(s^2+2s+5)}\right] = \lim_{s\to 0} \frac{10(2s+3)}{(s^2+2s+5)} = 6$$

Soluções de Equações (i)

- Soluções de Equações Integro-diferenciais
  - A transformada de Laplace substitui equações diferenciais por equações algébricas na resolução do sistema dinâmico seguindo as operações:
    - Obtenção das equações diferenciais;
    - Obtenção das transformadas de Laplace das equações diferenciais;
    - Resolução das equações algébricas para as variáveis de interesse;
    - Obtenção da transformada inversa de Laplace da solução encontrada.

Soluções de Equações (ii)

- Equações Diferenciais
  - Resolve-se equações diferenciais com coeficientes constantes. Lembre-se que a Transformada de Laplace de uma equação diferencial é uma equação algébrica.
  - Exemplo:

$$\text{Resolva a ED linear de segunda ordem: } (D^2+5D+6)\,y(t)=(D+1)x(t)$$

$$\text{com condições iniciais } y(0^-)=2 \text{ e } \dot{y}(0^-)=1, \text{e entrada } x(t)=e^{-4t}u(t)$$

$$\text{Re-escrevendo a expressão: } \frac{d^2y(t)}{dt^2}+5\frac{dy(t)}{dt}+6y(t)=\frac{dx(t)}{dt}+x(t)$$

Pelas propriedades das Transformadas de Laplace tem-se:

$$y(t)\Leftrightarrow Y(s);\quad \frac{dy(t)}{dt}\Leftrightarrow sY(s)-y(0^-)=sY(s)-2$$

$$\frac{d^2y(t)}{dt^2}\Leftrightarrow s^2Y(s)-sy(0^-)-\dot{y}(0^-)=s^2Y(s)-2s-1$$

Soluções de Equações (iii)

– Exemplo (continuação):

Ainda pelas propriedades das Transformadas de Laplace tem-se:

$$x(t) = e^{-4t}u(t) \Leftrightarrow X(s) = \frac{1}{s+4}; \quad \frac{dx(t)}{dt} = sX(s) - x(0^-) = \frac{s}{s+4}$$

Assim, tem-se: $$\frac{d^2y(t)}{dt^2} + 5\frac{dy(t)}{dt} + 6y(t) = \frac{dx(t)}{dt} + x(t) \Leftrightarrow$$

$$\left[s^2Y(s) - 2s - 1\right] + 5\left[sY(s) - 2\right] + 6Y(s) = \frac{s}{s+4} + \frac{1}{s+4} \therefore$$

$$(s^2 + 5s + 6)Y(s) - (2s + 11) = \frac{s+1}{s+4} \therefore Y(s) = \frac{2s^2 + 20s + 45}{(s^2 + 5s + 6)(s+4)} \therefore$$

$$Y(s) = \frac{2s^2 + 20s + 45}{(s+2)(s+3)(s+4)} = \frac{k_1}{s+2} + \frac{k_2}{s+3} + \frac{k_3}{s+4} = \frac{13/2}{s+2} - \frac{3}{s+3} - \frac{3/2}{s+4}$$

Logo: $$y(t) = \left(\frac{13}{2}e^{-2t} - 3e^{-3t} - \frac{3}{2}e^{-4t}\right)u(t)$$

Soluções de Equações (iv)

– Componentes de Entrada Zero e Estado Zero da Resposta:

No exemplo anterior, tem-se que:

$$(s^2+5s+6)Y(s)-(2s+11)=\frac{s+1}{s+4} \therefore (s^2+5s+6)Y(s)=\underbrace{(2s+11)}_{\text{cond. iniciais}}+\frac{s+1}{\underbrace{s+4}_{\text{entrada}}}$$

$$\therefore Y(s)=\underbrace{\frac{2s+11}{(s^2+5s+6)}}_{\text{componente entrada zero}}+\underbrace{\frac{s+1}{(s+4)(s^2+5s+6)}}_{\text{componente estado zero}}$$

$$\therefore Y(s)=\left[\frac{7}{s+2}-\frac{5}{s+3}\right]+\left[\frac{-1/2}{s+2}+\frac{2}{s+3}-\frac{3/2}{s+4}\right]$$

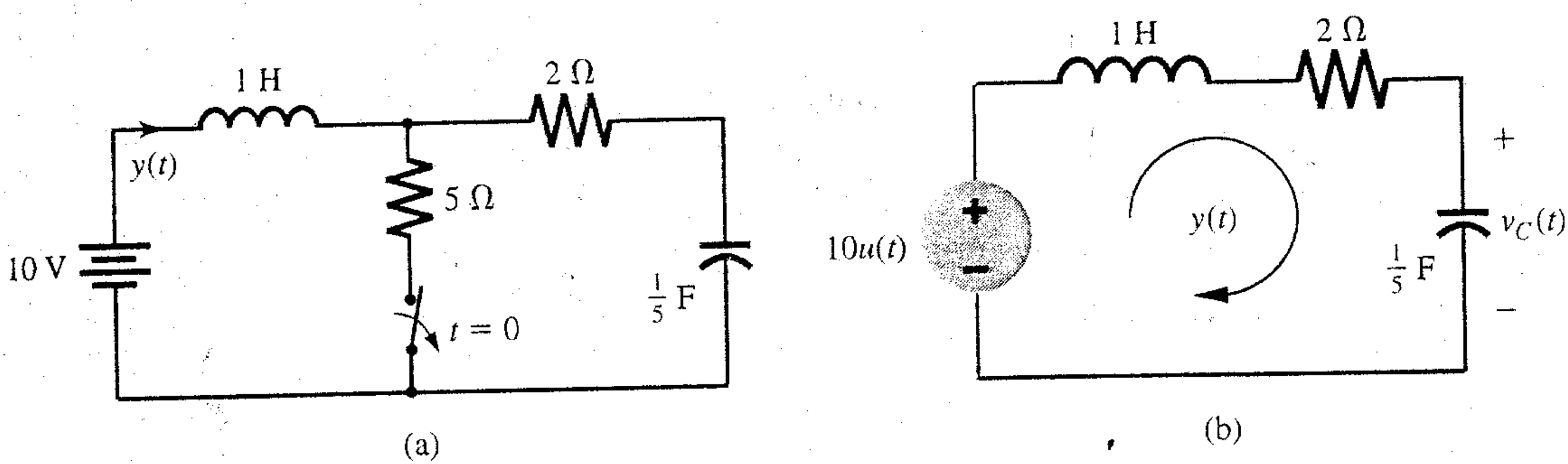
$$\therefore y(t)=\underbrace{\left(7e^{-2t}-5e^{-3t}\right)u(t)}_{\text{resposta entrada zero}}+\underbrace{\left(-\frac{1}{2}e^{-2t}+2e^{-3t}-\frac{3}{2}e^{-4t}\right)u(t)}_{\text{resposta estado zero}}$$

Soluções de Equações (v)

- Comentários sobre Condições Iniciais:
  - As condições iniciais em zero menos são satisfeitas pela resposta de entrada zero, e não pela resposta total.
  - A resposta total satisfaz as condições iniciais no tempo zero mais, condições estas, em geral, distintas daquelas em zero menos.

Soluções de Equações (vi)

– Exemplo: Na figura abaixo, a chave é fechada por um longo período antes do tempo *t=0*, quando ela é aberta instantaneamente. Determine a corrente no indutor $y(t)$, para $t \geq 0$.



Soluções de Equações (vii)

– Exemplo (continuação):

Condições iniciais : $y(0^-)=2; \quad v_C(0^-)=10$ e entrada $=10u(t)$

Com a chave aberta, a equação do laço é :

$$\frac{dy(t)}{dt}+2y(t)+5\int_{-\infty}^{t} y(\tau)d\tau=10u(t)$$

Para $y(t) \Leftrightarrow Y(s)$, então $\dfrac{dy(t)}{dt} \Leftrightarrow sY(s)-y(0^-)=sY(s)-2$ e

$$\int_{-\infty}^{t} y(\tau)d\tau \Leftrightarrow \frac{Y(s)}{s}+\frac{\int_{-\infty}^{0^-} y(\tau)d\tau}{s}$$

Para a corrente no capacitor : $\int_{-\infty}^{0^-} y(\tau)d\tau=q_C(0^-)=Cv_C(0^-)=\frac{1}{5}(10)=2$

Assim, tem-se que $\int_{-\infty}^{t} y(\tau)d\tau \Leftrightarrow \dfrac{Y(s)}{s}+\dfrac{2}{s}$

Soluções de Equações (viii)

– Exemplo (continuação):

Encontrando a transformada de Laplace da equação de laço:

$$\frac{dy(t)}{dt} + y(t) + 5\int_{-\infty}^{t} y(\tau)d\tau = 10u(t) \Leftrightarrow sY(s) - 2 + 2Y(s) + \frac{5Y(s)}{s} + \frac{10}{s} = \frac{10}{s}$$

$$\therefore \left[s + 2 + \frac{5}{s}\right]Y(s) = 2 \therefore Y(s) = \left(2 \Big/ \left(s + 2 + \frac{5}{s}\right)\right)$$

Transformada Inversa: $re^{-at}\cos(bt+\theta)u(t) \Leftrightarrow \dfrac{As+B}{s^2+2as+c}$,

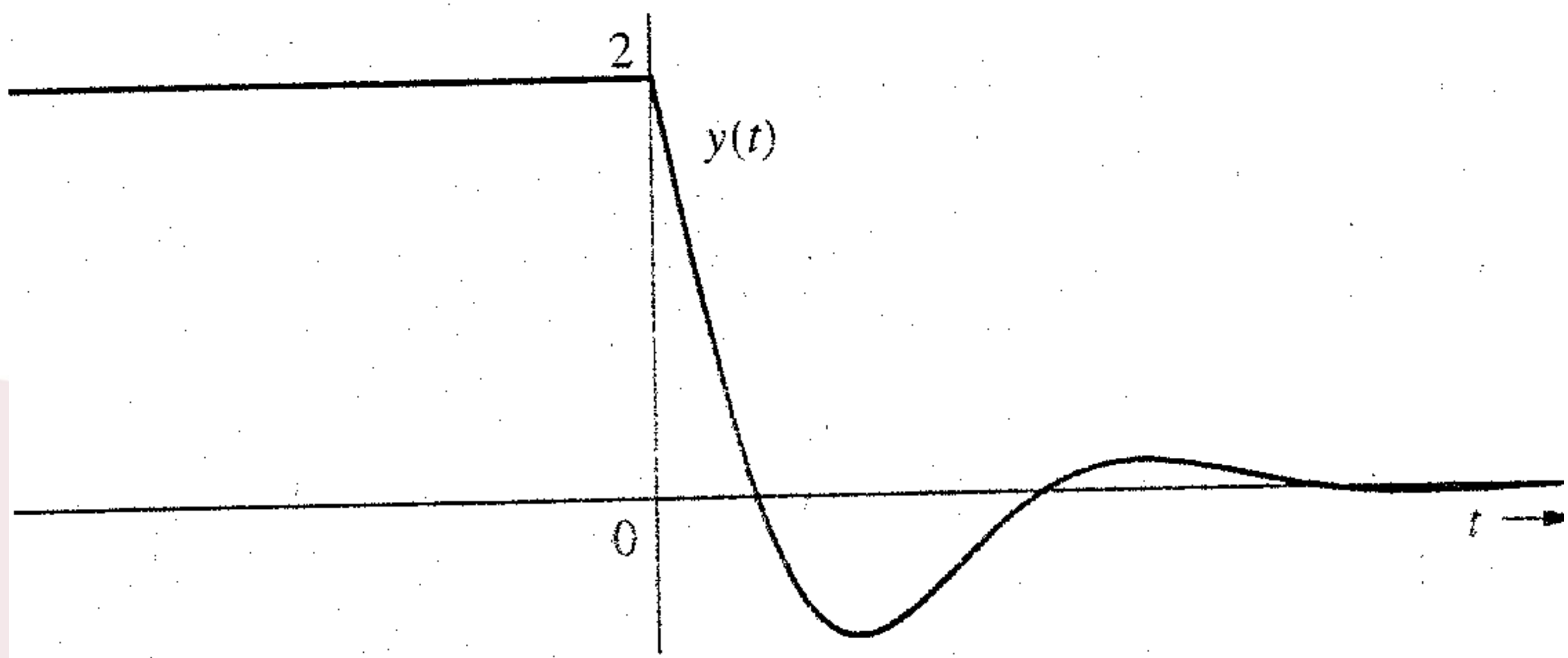
onde $r = \sqrt{\dfrac{A^2c + B^2 - 2ABa}{c - a^2}}$; $\theta = \tan^{-1}\left(\dfrac{Aa - B}{A\sqrt{c - a^2}}\right)$; $b = \sqrt{c - a^2}$

$r = \sqrt{20/4} = \sqrt{5}$; $b = 2$; $\theta = \tan^{-1}(2/4) = 26.6^0$

Concluindo: $y(t) = \sqrt{5}\, e^{-t}\cos(2t + 26.6^0)u(t)$

Soluções de Equações (ix)

– Exemplo (continuação):



Resposta de Estado Zero (i)

- Expressão Geral de um Sistema LTIC

Seja o sistema LTIC de ordem $N: Q(D)\,y(t) = P(D)\,x(t)$ ou,

$$(D^N + a_1 D^{N-1} + \ldots + a_{N-1} D + a_N)y(t) =$$

$$= (b_0 D^N + b_1 D^{N-1} + \ldots + b_{N-1} D + b_N)x(t)$$

Para a resposta de estado zero, o sistema é inicialmente relaxado, isto é,

$$y(0^-) = \frac{dy(0^-)}{dt} = \frac{d^2 y(0^-)}{dt^2} = \ldots = \frac{d^{(N-2)} y(0^-)}{dt^{(N-2)}} = \frac{d^{(N-1)} y(0^-)}{dt^{(N-1)}} = 0$$

Além disto, a entrada é causal, isto é,

$$x(0^-) = \frac{dx(0^-)}{dt} = \frac{d^2 x(0^-)}{dt^2} = \ldots = \frac{d^{(N-2)} x(0^-)}{dt^{(N-2)}} = \frac{d^{(N-1)} x(0^-)}{dt^{(N-1)}} = 0$$

Assim, tem-se as transformadas de Laplace e sua derivação no tempo

$$y(t) \Leftrightarrow Y(s), \quad x(t) \Leftrightarrow X(s), \quad \frac{d^k x(t)}{dt^k} \Leftrightarrow s^k X(s)$$

Resposta de Estado Zero (ii)

- Expressão Geral de um Sistema LTIC

Logo, a Transformada de Laplace para o sistema LTIC é :

$$(s^N + a_1 s^{N-1} + \ldots + a_{N-1} s + a_N)Y(s) = (b_0 s^N + b_1 s^{N-1} + \ldots + b_{N-1} s + b_N)X(s)$$

$$\therefore Y(s) = \frac{b_0 s^N + b_1 s^{N-1} + \ldots + b_{N-1} s + b_N}{s^N + a_1 s^{N-1} + \ldots + a_{N-1} s + a_N} X(s) \therefore \frac{Y(s)}{X(s)} = H(s)$$

Esta é a função de transferência da equação diferencial aqui tatada.

- Interpretação Intuitiva da Transformada de Laplace
  - Pode-se expressar quase todos os sinais de utilidade prática como um somatório de exponenciais incessantes sobre um intervalo contínuo de freqüências.
  - Como *s* é uma freqüência complexa de *exp*(*st*), por isto, o método com a Transformada de Laplace é chamado de método do domínio da freqüência.

Resposta de Estado Zero (iii)

– Exemplo:

Ache a resposta do sistema LTIC: $\dfrac{d^2y(t)}{dt^2}+5\dfrac{dy(t)}{dt}+6y(t)=\dfrac{dx(t)}{dt}+x(t)$

Condições iniciais: $y(0^-)=\dot{y}(0^-)=0$ e entrada $=3e^{-5t}u(t)$

$\underbrace{(D^2+5D+6)}_{Q(D)}y(t)=\underbrace{(D+1)}_{P(D)}x(t)$, por conseqüência

$H(s)=\dfrac{P(s)}{Q(s)}=\dfrac{s+1}{s^2+5s+6}$, e também $X(s)=L[3e^{-5t}u(t)]=\dfrac{3}{s+5}$

assim a saída é $Y(s)=H(s)X(s)=\dfrac{s+1}{s^2+5s+6}\dfrac{3}{s+5}=\dfrac{3(s+1)}{(s+2)(s+3)(s+5)}$

Assim, $Y(s)=-\dfrac{2}{s+5}-\dfrac{1}{s+2}+\dfrac{3}{s+3}$,

finalmente $y(t)=(-2e^{-5t}-e^{-2t}+3e^{-3t})u(t)$

Resposta de Estado Zero (iv)

– Exemplo:

Encontre as funções de transferência

(a) Um atrasador ideal de T de segundos: $y(t) = x(t-T)$

$$\Leftrightarrow Y(s) = X(s)e^{-sT} \therefore H(s) = \frac{Y(s)}{X(s)} = e^{-sT}$$

(b) Um diferenciador ideal: $y(t) = \dfrac{dx}{dt}$

$$\Leftrightarrow Y(s) = sX(s) \therefore H(s) = \frac{Y(s)}{X(s)} = s$$

(c) Um integrador ideal: $y(t) = \int_0^t x(\tau)d\tau$

$$\Leftrightarrow Y(s) = \frac{1}{s}X(s) \therefore H(s) = \frac{1}{s}$$

Estabilidade (i)

- Critério de Estabilidade Assintótico
  - Para $P(s)$ e $Q(s)$ sem fatores comuns, o critério pode ser expresso em termos de pólos da função de transferência de um sistema:
    - Um sistema LTIC é assintoticamente estável se e só se todos pólos (simples ou repetidos) da função de transferência $H(s)$ estão no semiplano esquerdo (parte real negativa).
    - Um sistema LTIC é instável se e só se uma das duas condições for verdade: (i) ao menos um pólo de $H(s)$ encontra-se no semiplano direito; (ii) houver pólos repetidos de $H(s)$ sobre o eixo imaginário.
    - Um sistema LTIC é marginalmente estável se e só se não houver pólos de $H(s)$ no semiplano direito e houver pólos não-repetidos sobre o eixo imaginário.
  - A localização dos pólos de $H(s)$ dentro de um mesmo semi-plano não influencia na estabilidade de um sistema.

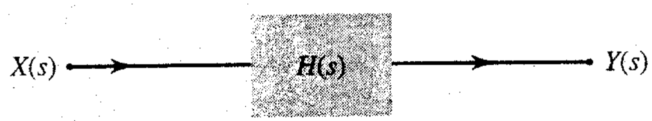
Diagrama de Blocos (i)

- Introdução
  - Um sistema grande pode ser formado por número enorme de componentes tais como ocorre no diagrama de um circuito de rádio ou um receptor de televisão. Pode-se, então, resolver este problema através do emprego de subsistemas interconectados que podem ser caracterizados em termos de relações entrada-saída. Em particular, um sistema linear pode ser caracterizado por sua função de transferência $H(s)$. Os subsistemas podem ser interconectados em cascata, paralelo e por realimentação.
  - A função de transferência relaciona variáveis controladas com controladoras, representando relação causa-efeito de maneira esquemática através de <u>diagrama de blocos</u>. Este diagrama é definido como um bloco operacional e unidirecional que representa a função de transferência de variáveis de interesse.

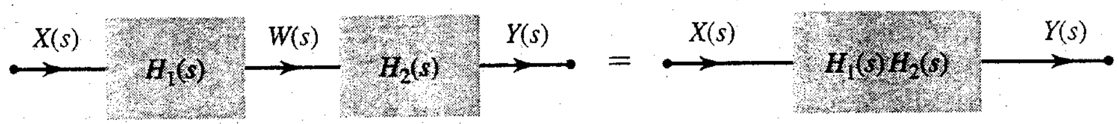
Diagrama de Blocos (ii)

– Exemplos:

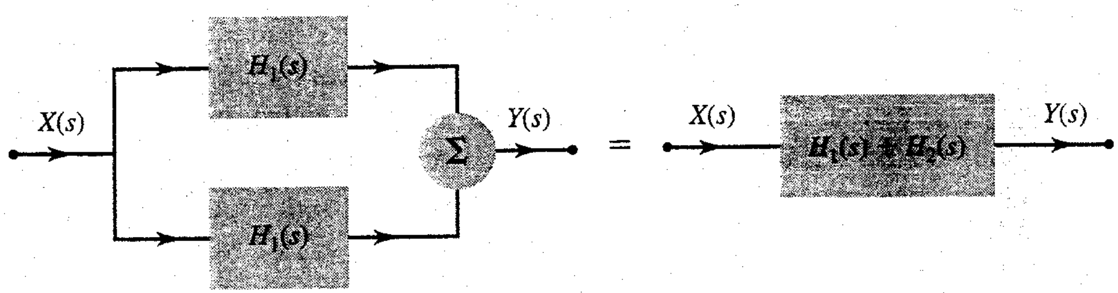
$$\frac{Y(s)}{X(s)} = \frac{W(s)}{X(s)}\,\frac{Y(s)}{W(s)} = H_1(s)H_2(s)$$



(a)



(b)



(c)

Diagrama de Blocos (iii)

Centro de Informática U·F·P·E

– Exemplo: Sistema multivariáveis

$$\begin{bmatrix} Y_1(s) \\ Y_2(s) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} G_{11}(s) & G_{12}(s) \\ G_{21}(s) & G_{22}(s) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} R_1(s) \\ R_2(s) \end{bmatrix}$$

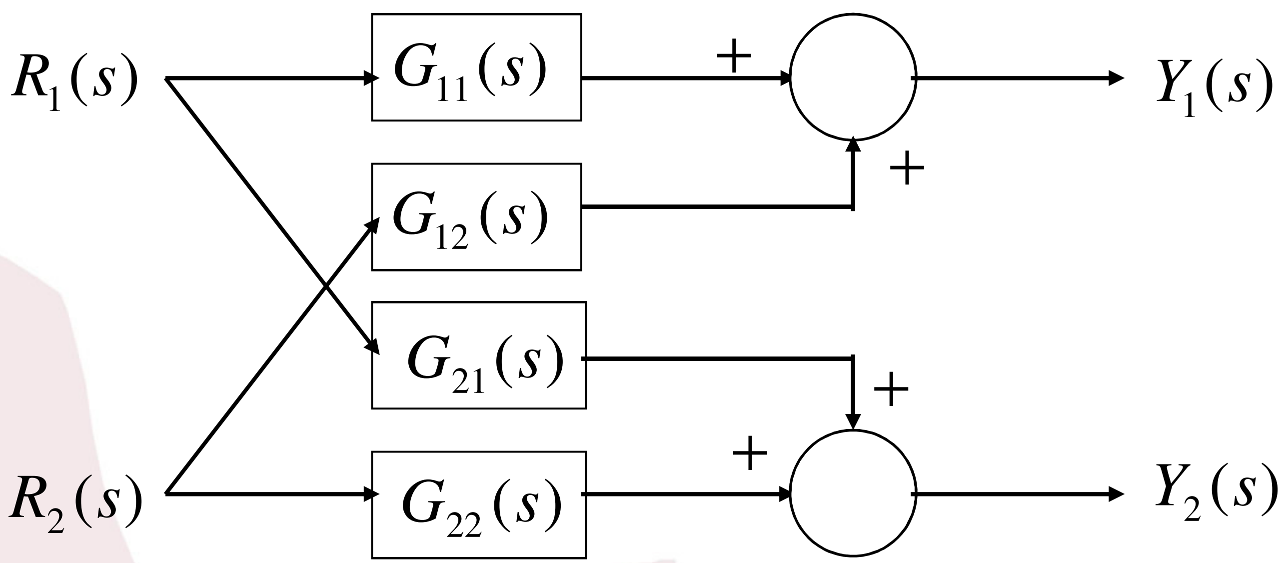
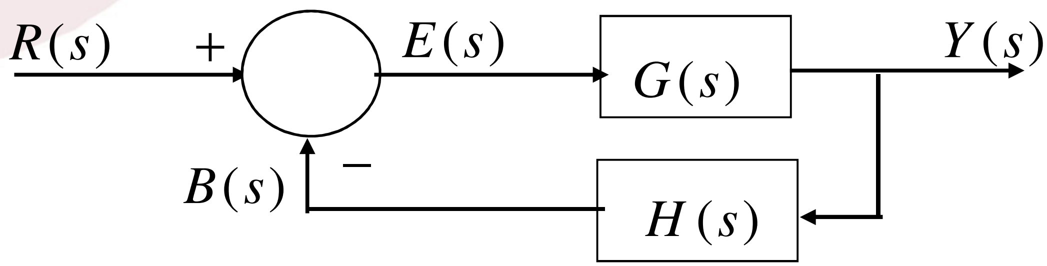


Diagrama de Blocos (iv)

– Exemplo: Função de transferência de um sistema de malha fechada.



Tem - se que $E(s) = R(s) - B(s) = R(s) - H(s)Y(s),$

como $Y(s) = G(s)E(s),$ então $Y(s) = G(s)[R(s) - H(s)Y(s)] \therefore$

$Y(s) = G(s)R(s) - G(s)H(s)Y(s) \therefore [1 + G(s)H(s)]Y(s) = G(s)R(s) \therefore$

$$\frac{Y(s)}{R(s)} = \frac{G(s)}{1 + G(s)H(s)}$$

Um diagrama de blocos pode ser reduzido a outro mais simples através de técnicas de reduções para estes diagramas.

Diagrama de Blocos (v)

– Exemplo: Rover de Marte (sojourner), alimentado por energia solar.

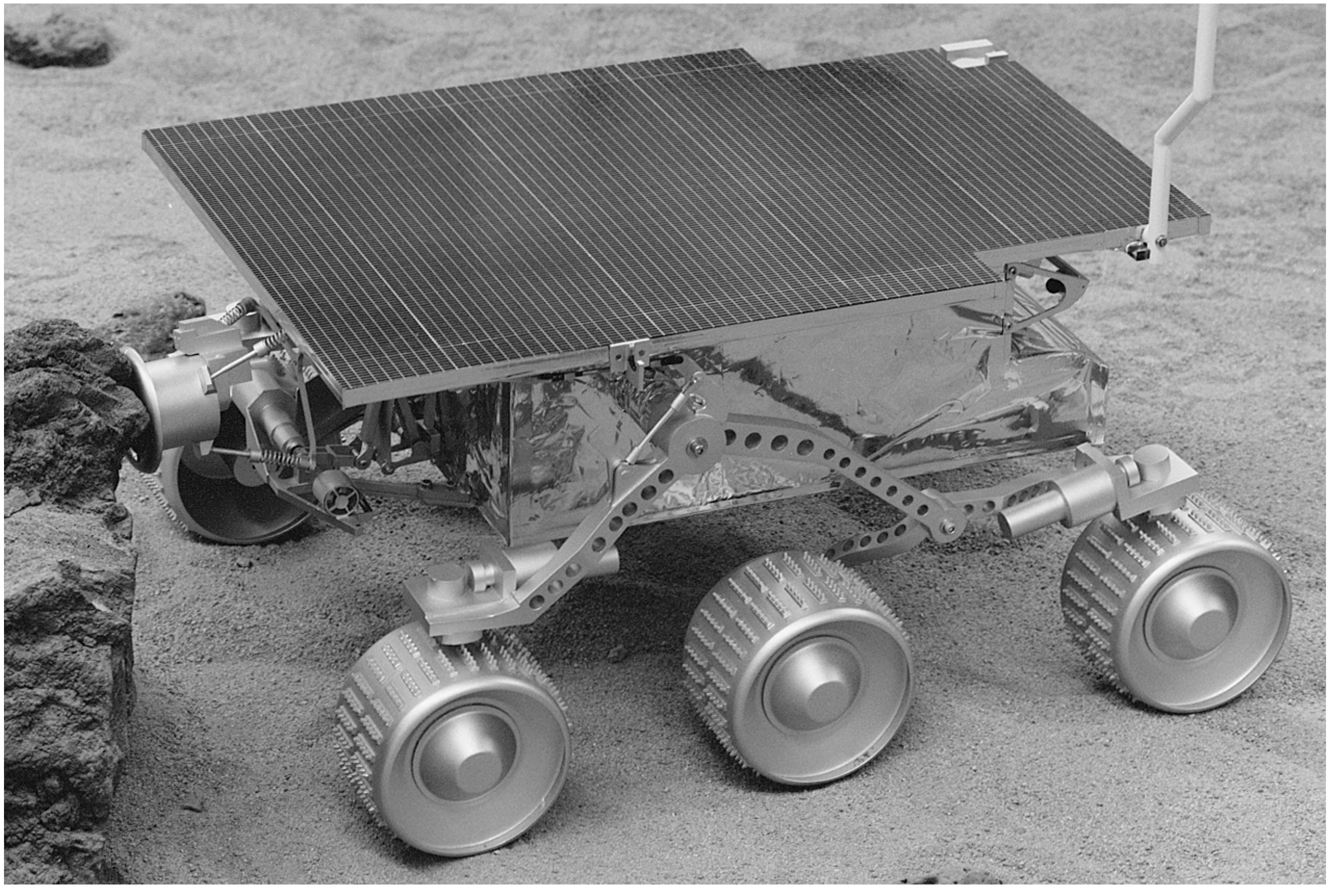


Diagrama de Blocos (vi)

Centro de Informática U·F·P·E

– Exemplo: Sistema de controle para o rover: (a) malha aberta (sem realimentação); (b) malha fechada (com realimentação).

MASTER 47

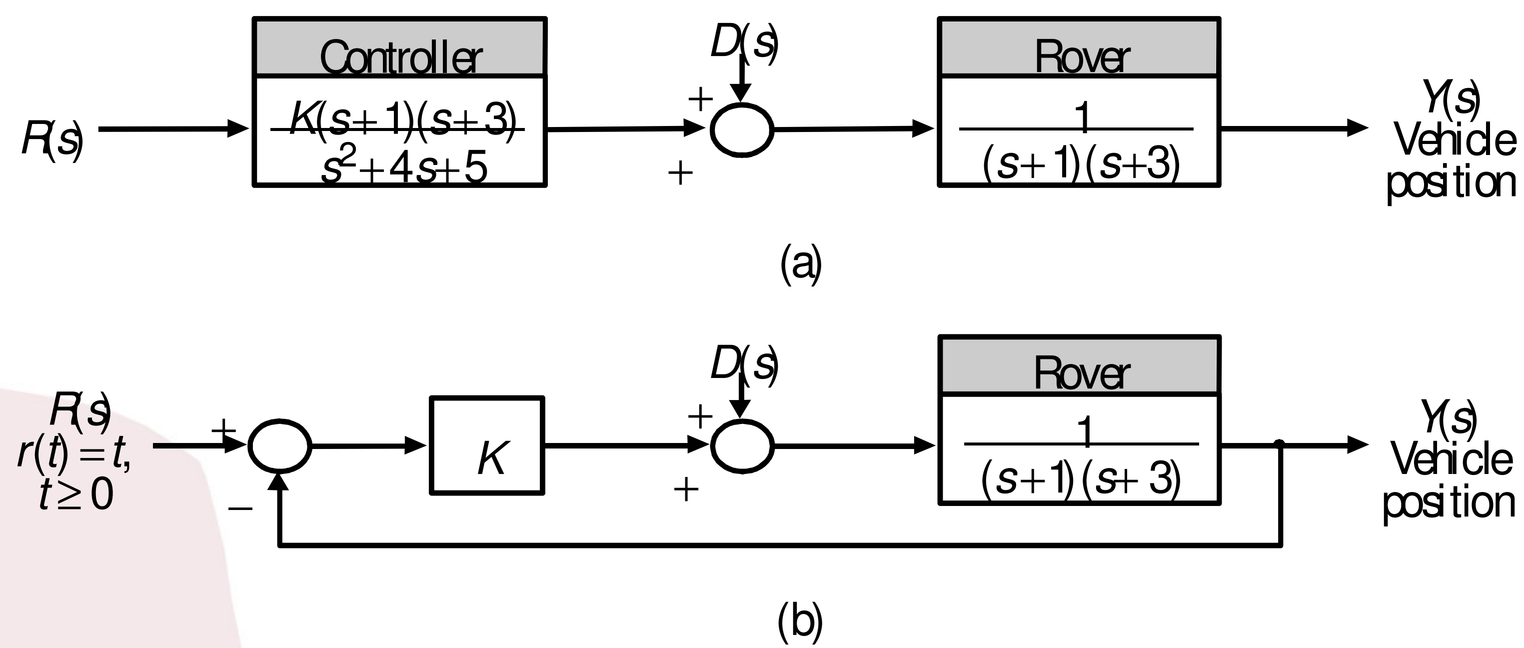


Figure 4.25 Control system for rover; (a) open-loop (without feedback) and (b) closed-loop with feedback. The input is $R(s) = 1/s$.

Realização de Sistemas (i)

- Introdução
  - Método sistemático de realização (ou implementação) de uma função de transferência arbitrária. A realização caracteriza-se por:
    - Constituir-se em um problema de síntese;
    - Existir, em geral, mais de uma maneira de ocorrer;
    - Empregar integradores, diferenciadores, adicionadores e multiplicadores.
  - O problema de realização estuda como encontrar uma representação (por variáveis de estado) de um sistema LTI a partir de uma função de transferência.

- Realização: Forma Direta I (DFI)
  - Inicialmente será exposto um caso particular: realização de um sistema de terceira ordem:

$$H(s)=\frac{b_0 s^3+b_1 s^2+b_2 s+b_3}{s^3+a_1 s^2+a_2 s+a_3}=\frac{b_0+\frac{b_1}{s}+\frac{b_2}{s^2}+\frac{b_3}{s^3}}{1+\frac{a_1}{s}+\frac{a_2}{s^2}+\frac{a_3}{s^3}}\;\therefore$$

$$H(s)=\left(b_0+\frac{b_1}{s}+\frac{b_2}{s^2}+\frac{b_3}{s^3}\right)\left(\frac{1}{1+\frac{a_1}{s}+\frac{a_2}{s^2}+\frac{a_3}{s^3}}\right)=H_1(s).H_2(s)$$

Pode-se realizar $H(s)$ por conexão em cascata de $H_1(s)$ e $H_2(s)$.

Por causa da propriedade comutativa, a opção anterior é equivalente a uma conexão em cascata com as posições dos blocos invertidas.

Realização de Sistemas (iii)

- Realização: DFI

$$X(s) \longrightarrow \boxed{H_1(s)} \longrightarrow \boxed{H_2(s)} \longrightarrow Y(s)$$

$$X(s) \longrightarrow \boxed{H_2(s)} \longrightarrow \boxed{H_1(s)} \longrightarrow Y(s)$$

  – Este sistema é descrito pelas equações:

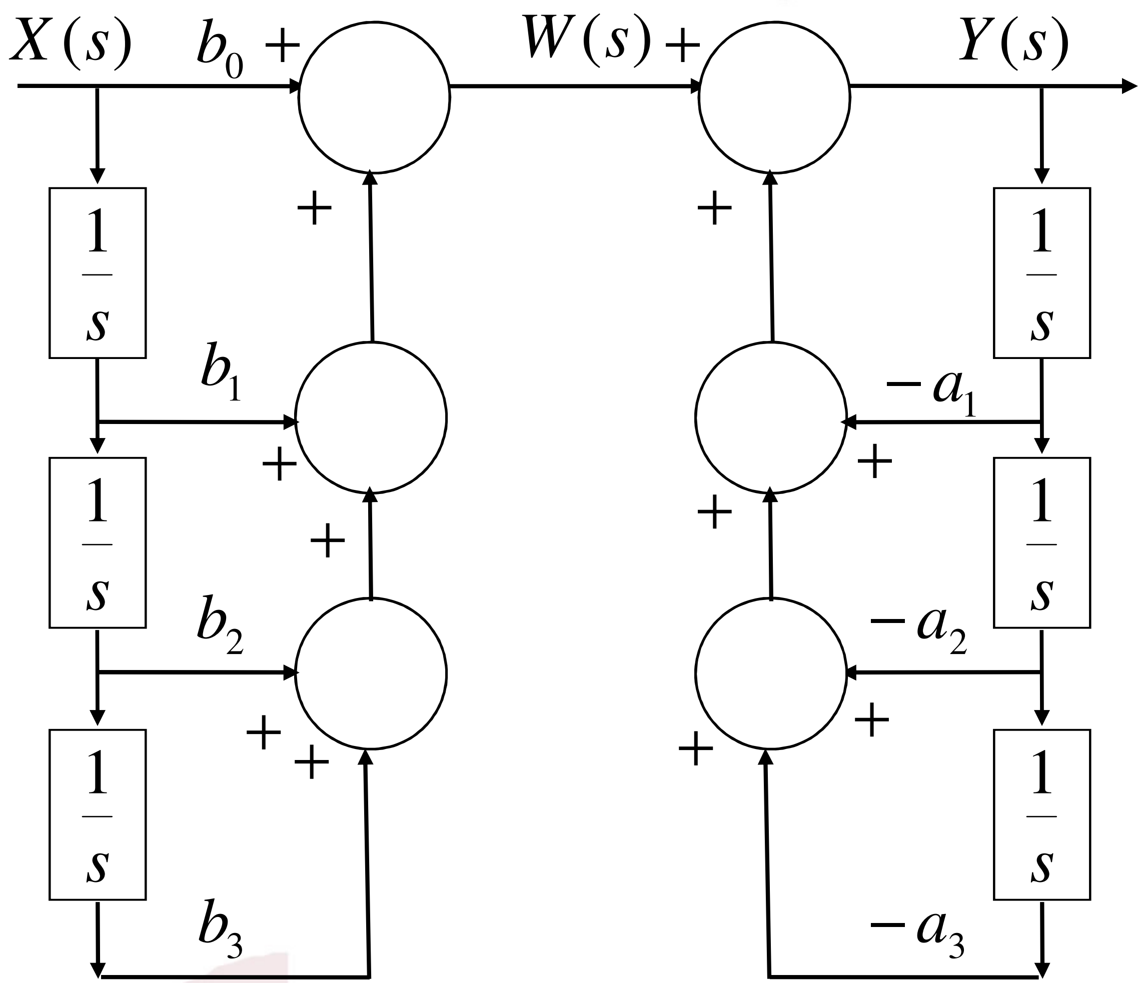
$$W(s) = \left(b_0 + \frac{b_1}{s} + \frac{b_2}{s^2} + \frac{b_3}{s^3}\right) X(s)$$

$$Y(s) = \left(\frac{1}{1 + \frac{a_1}{s} + \frac{a_2}{s^2} + \frac{a_3}{s^3}}\right) W(s) \therefore W(s) = \left(1 + \frac{a_1}{s} + \frac{a_2}{s^2} + \frac{a_3}{s^3}\right) Y(s)$$

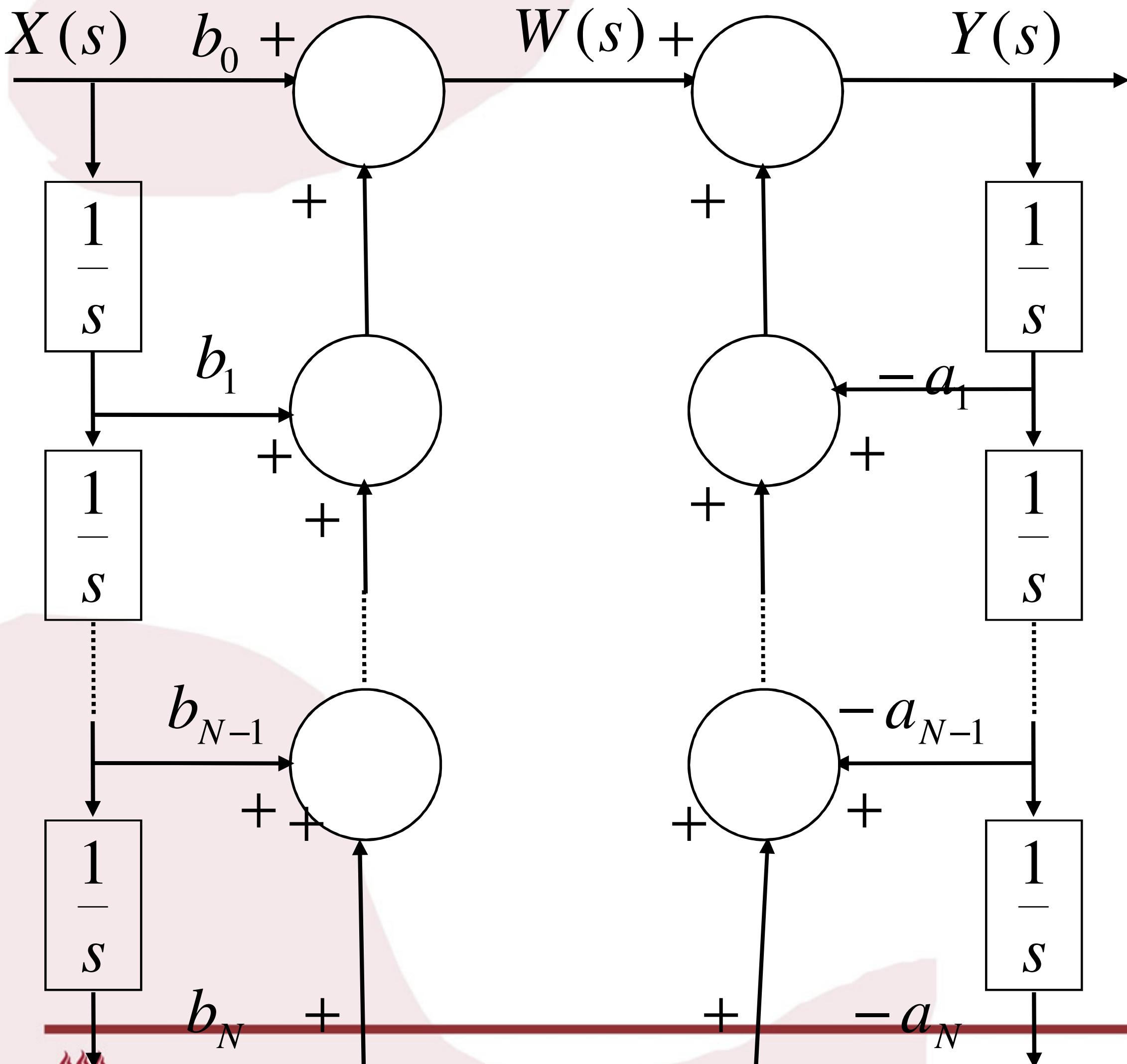
Realização de Sistemas (iv)

Centro de Informática U · F · P · E

- Realização: DFI



- Realização: DFI



Sistemas de ordem N:

Note que é necessário 2N integradores para realizar tal sistema.

Neste tipo de realização, primeiro realiza-se *H1(s)* e depois *H2(s)*.

Realização de Sistemas (vi)

- Realização: Forma Direta II (DFII)
  - Inicialmente realiza-se *H2(s)* e depois *H1(s)*. Com respeito ao caso anterior, a ordem dos blocos é invertida. Para o sistema anterior de terceira ordem, tem-se:

$$H(s) = \left(\frac{1}{1 + \frac{a_1}{s} + \frac{a_2}{s^2} + \frac{a_3}{s^3}} \right) \left(b_0 + \frac{b_1}{s} + \frac{b_2}{s^2} + \frac{b_3}{s^3} \right) = H_2(s).H_1(s)$$

  - A mesma situação é estendida para um sistema de ordem *N*.

Realização de Sistemas (vii)

- Realizações Cascata e Paralela:
  - Uma função de transferência *H*(*s*) pode ser expressa como um produto de funções de transferência ou como uma soma:

$$H(s)=\left(\frac{4s+28}{(s+1)(s+5)}\right)=\left(\frac{4s+28}{(s+1)}\right)\left(\frac{1}{(s+5)}\right)=H_1(s).H_2(s)$$

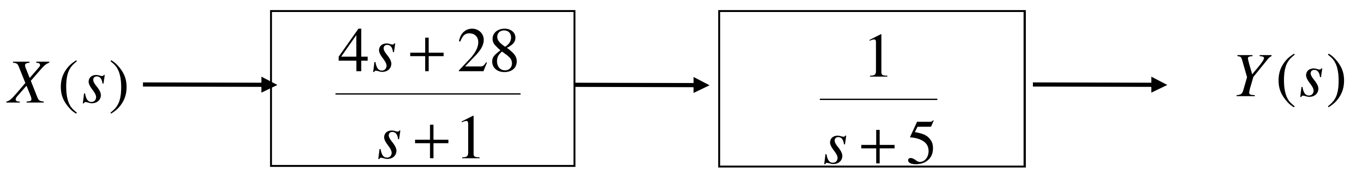
alternativamente, tem-se que

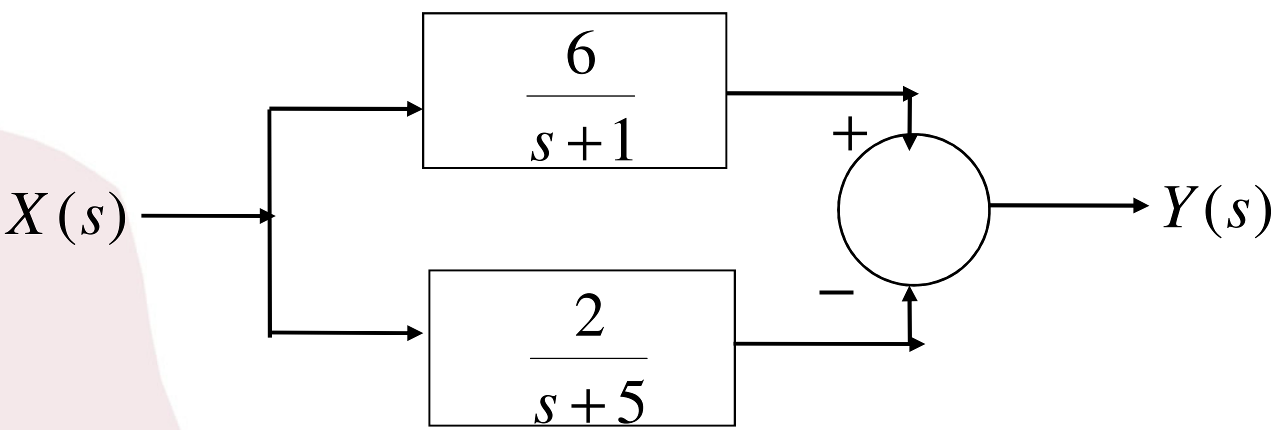
$$H(s)=\left(\frac{4s+28}{(s+1)(s+5)}\right)=\left(\frac{6}{(s+1)}\right)-\left(\frac{2}{(s+5)}\right)=H_3(s)-H_4(s)$$

Do ponto de vista prático, as formas paralela a algumas cascatas são preferíveis às formas diretas pois aquelas tendem a ser menos sensíveis a pequenas variações de parâmetros no sistema uma vez que no último caso, todos coeficientes interagem entre si.

Realização de Sistemas (viii)

- Realizações Cascata e Paralela:
  - Realizações da função anterior:





Exercícios Recomendados

- Propostos para o MATLAB ou SCILAB
  - Todos
- Problemas
  - 4.1-1 até 4.1-3.
  - 4.2-1, 4.2-3 até 4.2-5.
  - 4.3-1 até 4.3-3, 4.3-5 até 4.3-9, 4.3-12.
  - 4.5-1 até 4.5-3.
  - 4.6.1 até 4.6.10