Variáveis Aleatórias

MONITORIA DE ESTATÍSTICA E PROBABILIDADE PARA COMPUTAÇÃO

Variável Aleatória

É uma função que mapeia a probabilidade de cada um dos eventos da partição de um espaço amostral a um número real X (a variável aleatória), que representa o evento

Pode ser:

- Discreta
- Contínua

Função de probabilidade

Notação:

$$P(X = x_i) = p(x_i) = p_i$$

Deve satisfazer as seguintes condições:

1. $0 \leq p_i \leq 1$
2. $\sum_i p_i = 1$ (função discreta de probabilidade)
3. $\int_{-\infty}^{\infty} p_i = 1$ (função densidade de probabilidade)

Função de probabilidade

Em uma variável aleatória discreta, cada valor de probabilidade está associado a um único ponto da função da variável aleatória.

Já em uma variável contínua, não se calcula o valor de um ponto, e sim a probabilidade de um intervalo. Observe que:

- $P(a < X < b) = \int_a^b f(x)\, dx$
- $P(c) = \int_c^c f(x)\, dx = 0$

Função de distribuição

Caso discreto (repartição):

$$F(x) = P(X \leq x) = \sum_{x_i \leq x} P(x_i)$$

Caso contínuo:

$$F(x) = P(X \leq x) = \int_{-\infty}^{x} f(s)ds$$

Medidas de Posição

Esperança matemática

- $E(X) = \sum x \cdot p(x)$ (V. A. discreta)
- $E(X) = \int_{-\infty}^{\infty} x \cdot f(x)\, dx$ (V. A. contínua)

Mediana

- $F(X = Md) = 0{,}5$

Moda

- $P(X = Mo) = \max(p_1, p_2, \ldots, p_k)$

Medidas de Dispersão

Variância

- $\sigma_x{}^2 = \sum (x_i - \mu_{(x)})^2 \cdot P(x_i)$ (V. A. discreta)
- $\sigma_x{}^2 = \int_{-\infty}^{\infty} (x - \mu_x)^2 \cdot f(x)\, dx$ (V. A. contínua)

Desvio padrão

- $\sigma_x = \sqrt{\sigma_x{}^2}$

Exercícios

1. Seja x uma variável aleatória contínua com a seguinte função densidade de probabilidade:

$$f(x) = \begin{cases} \frac{1}{6}x + K & \text{se } 0 \leq x \leq 3 \\ 0 & \text{em qualquer outro caso} \end{cases}$$

Pede-se:

a) Encontre K

b) encontre $P(1 \leq x \leq 2)$

Exercícios

2. Numa sala temos cinco rapazes e quatro moças. São retiradas aleatoriamente três pessoas. Faça X uma variável aleatória número de rapazes.

a) Determine a distribuição de probabilidade da variável X. Construa uma tabela.
b) Determine a função de repartição de X
c) Construa o gráfico de $F(X)$
d) Determine $P(1 < x \leq 3)$

Exercícios

3. Dada a tabela:

X	0	1	2	3	4	5
P(X)	0	P^2	P^2	P	P	P^2

a) Ache o valor de p;

b) Calcule $P(X \geq 4)$ e $P(X < 3)$;

c) Calcule $P(|X - 3| < 2)$.

Exercícios

4. Uma variável aleatória tem a seguinte função de densidade de probabilidade:

$$f(x) = \begin{cases} 0 & x<0 \\ kx^2 & 0 \leq x < 1 \\ 0 & x \geq 1 \end{cases}$$

a) Determine k;

b) Qual a função de repartição $F(x)$?

Exercícios

5. Num jogo de dados, paga-se 5 reais para jogar um dado. Se o numero for 1 ou 2, o jogador paga mais 5 reais, se for 3, 4 ou 5, ganha 5 reais, e se for 6 ganha 15 reais.

Sendo X a variável aleatória que define o lucro de um jogador responda:

a) Quanto é E(x) ?
b) Var (x) ?
c) Desvio-padrão (x) ?

Exercícios

6. X é uma variável aleatória tal que a função repartição é dada por:

$$F(x) = 0 \quad \text{para} \quad x < 0$$
$$F(x) = 4x^2 \quad \text{para} \quad 0 \leq x \leq 1$$
$$F(x) = 1 \quad \text{para} \quad x > 1$$

a) Calcule a média
b) Determine a mediana
c) Calcule a variância

Exercícios

7. Seja:

$$f(x) = \frac{3}{2}\left(1 - x^2\right) \qquad 0 < x < 1$$

$$f(x) = 0 \qquad \text{caso contrário}$$

Ache a função de repartição.

Exercícios

8. Uma variável aleatória contínua X tem a seguinte função de densidade de probabilidade:

Para $x < 0$, $f(x) = 0$

Para $0 \leq x < 2$, $f(x) = K$

Para $2 \leq x < 4$, $f(x) = K(x - 1)$

Para $x \geq 4$, $f(x) = 0$

a) Qual o valor de K?
b) Encontre F(x).

Exercícios

9. Num jogo de dados A paga R$ 20,00 a B e lança três dados. Se sair face 1 em um dos dados apenas, A ganha R$ 20,00. Se sair face 1 em dois dos dados apenas, A ganha R$ 50,00 e se sair 1 nos três dados, A ganha R$ 80,00. Calcule o lucro médio de A em uma jogada.

10. Os empregados A, B, C e D ganham 1, 2, 2 e 4 salários mínimos, respectivamente. Retiram-se amostras com reposição de 2 indivíduos e mede-se o salário médio da amostra retirada. Qual a média e a variância?

Exercícios

11. A variável aleatória contínua X tem função de densidade dada por:

$f(x) = 6(x - x^2),$ para $0 \leq x \leq 1$

$f(x) = 0,$ caso contrário

Calcule $P(\mu - 2\sigma < x < \mu + 2\sigma)$.