

# Matemática Discreta

Final / Segunda Chamada - 2010.2

Prof. Juliano Iyoda  
17 de Dezembro de 2010

1. Ao provarmos por indução matemática que

$$n + n = 2n$$

para todo  $n \geq 0$ :

a)  $\{0, 5 \text{ pt}\}$  Qual o objetivo de prova do caso base?

**Resposta:**  $0 + 0 = 2 \cdot 0$

b)  $\{0, 5 \text{ pt}\}$  Prove o caso base. Justifique cada passo com “Aritmética”.

**Resposta:**

$$\begin{aligned} &0 + 0 \\ &= 0 \quad [\text{Aritmética}] \\ &= 2 \cdot 0 \quad [\text{Aritmética}] \end{aligned}$$

c)  $\{0, 5 \text{ pt}\}$  Qual o objetivo de prova do passo indutivo?

**Resposta:**  $(k + 1) + (k + 1) = 2(k + 1)$

d)  $\{0, 5 \text{ pt}\}$  Qual a hipótese de indução?

**Resposta:**  $k + k = 2k$

e)  $\{1, 0 \text{ pt}\}$  Prove o passo indutivo. Justifique cada passo com “Hipótese de Indução” ou com uma das equações abaixo. Não pode justificar com “Aritmética”.

$$\begin{aligned} 2(x + 1) &= 2x + 2 && [100] \\ (x + y) + (x + y) &= (x + x) + (y + y) && [101] \\ (1 + 1) &= 2 && [102] \end{aligned}$$

**Resposta:**

$$\begin{aligned} &(k + 1) + (k + 1) \\ &= (k + k) + (1 + 1) && [101] \\ &= 2k + (1 + 1) && [\text{Hipótese de Indução}] \\ &= 2k + 2 && [102] \\ &= 2(k + 1) && [100] \end{aligned}$$

2.  $\{4, 0 \text{ pt}\}$  Prove que  $(A - B) \cap (B - A) = \emptyset$ . Justifique cada passo de prova com exatamente 1 das equações do verso. A única **exceção** a esta regra é o uso das equações (10), (11), (12), (13), (73), (74), (75) e (76) que podem ser usadas simultaneamente em 1 passo de prova.

**Resposta:**

$$\begin{aligned} & (A - B) \cap (B - A) \\ &= \{x \mid x \in (A - B) \wedge x \in (B - A)\} && [59] \\ &= \{x \mid (x \in A \wedge x \notin B) \wedge x \in (B - A)\} && [63] \\ &= \{x \mid (x \in A \wedge x \notin B) \wedge (x \in B \wedge x \notin A)\} && [63] \\ &= \{x \mid (x \in A \wedge x \notin A) \wedge (x \in B \wedge x \notin B)\} && [11,13] \\ &= \{x \mid (x \in A \wedge \neg(x \in A)) \wedge (x \in B \wedge x \notin B)\} && [46] \\ &= \{x \mid (x \in A \wedge \neg(x \in A)) \wedge (x \in B \wedge \neg(x \in B))\} && [46] \\ &= \{x \mid \mathbf{F} \wedge (x \in B \wedge \neg(x \in B))\} && [21] \\ &= \{x \mid \mathbf{F} \wedge \mathbf{F}\} && [21] \\ &= \{x \mid \mathbf{F}\} && [6] \\ &= \emptyset && [53] \end{aligned}$$

3. Seja  $A = \{1, 2, 3, 4\}$ .

a)  $\{1, 0 \text{ pt}\}$  Defina uma relação em  $A$  que seja reflexiva, simétrica e antisimétrica simultaneamente.

**Resposta:**  $\{(1, 1), (2, 2), (3, 3), (4, 4)\}$

b)  $\{1, 0 \text{ pt}\}$  Defina uma relação em  $A$  que seja irreflexiva e simétrica simultaneamente.

**Resposta:**  $\{(2, 1), (1, 2)\}$

c)  $\{1, 0 \text{ pt}\}$  Defina uma relação em  $A$  que seja irreflexiva e assimétrica simultaneamente.

**Resposta:**  $\{(2, 1)\}$

$$\begin{aligned} \text{T} &\equiv \neg\text{F} & (1) \\ \neg\text{T} &\equiv \text{F} & (2) \\ p \wedge \text{T} &\equiv p & (3) \\ p \vee \text{F} &\equiv p & (4) \\ p \vee \text{T} &\equiv \text{T} & (5) \\ p \wedge \text{F} &\equiv \text{F} & (6) \\ p \vee p &\equiv p & (7) \\ p \wedge p &\equiv p & (8) \\ \neg(\neg p) &\equiv p & (9) \\ p \vee q &\equiv q \vee p & (10) \\ p \wedge q &\equiv q \wedge p & (11) \\ (p \vee q) \vee r &\equiv p \vee (q \vee r) & (12) \\ (p \wedge q) \wedge r &\equiv p \wedge (q \wedge r) & (13) \\ p \vee (q \wedge r) &\equiv (p \vee q) \wedge (p \vee r) & (14) \\ p \wedge (q \vee r) &\equiv (p \wedge q) \vee (p \wedge r) & (15) \\ \neg(p \wedge q) &\equiv \neg p \vee \neg q & (16) \\ \neg(p \vee q) &\equiv \neg p \wedge \neg q & (17) \\ p \vee (p \wedge q) &\equiv p & (18) \\ p \wedge (p \vee q) &\equiv p & (19) \\ p \vee \neg p &\equiv \text{T} & (20) \\ p \wedge \neg p &\equiv \text{F} & (21) \\ p \rightarrow q &\equiv \neg p \vee q & (22) \\ p \rightarrow q &\equiv \neg q \rightarrow \neg p & (23) \\ p \vee q &\equiv \neg p \rightarrow q & (24) \\ p \wedge q &\equiv \neg(p \rightarrow \neg q) & (25) \\ \neg(p \rightarrow q) &\equiv p \wedge \neg q & (26) \\ (p \rightarrow q) \wedge (p \rightarrow r) &\equiv p \rightarrow (q \wedge r) & (27) \\ (p \rightarrow r) \wedge (q \rightarrow r) &\equiv (p \vee q) \rightarrow r & (28) \\ (p \rightarrow q) \vee (p \rightarrow r) &\equiv p \rightarrow (q \vee r) & (29) \\ (p \rightarrow r) \vee (q \rightarrow r) &\equiv (p \wedge q) \rightarrow r & (30) \\ p \leftrightarrow q &\equiv (p \rightarrow q) \wedge (q \rightarrow p) & (31) \\ p \leftrightarrow q &\equiv \neg p \leftrightarrow \neg q & (32) \\ p \leftrightarrow q &\equiv (p \wedge q) \vee (\neg p \wedge \neg q) & (33) \\ \neg(p \leftrightarrow q) &\equiv p \leftrightarrow \neg q & (34) \\ \neg\exists x P(x) &\equiv \forall x \neg P(x) & (35) \\ \neg\forall x P(x) &\equiv \exists x \neg P(x) & (36) \\ \frac{p}{p \rightarrow q} & & (37) \\ \therefore q \\ \frac{\neg q}{p \rightarrow q} & & (38) \\ \therefore \neg p \\ \frac{p \rightarrow q}{q \rightarrow r} & & (39) \\ \therefore p \rightarrow r \\ \frac{p \vee q}{\neg p} & \quad \frac{p \vee q}{\neg q} & (40) \\ \therefore q & \quad \therefore p \\ \frac{p}{\therefore p \vee q} & \quad \frac{p}{\therefore q \vee p} & (41) \end{aligned}$$

$$\frac{p \wedge q}{\therefore p} \quad \frac{p \wedge q}{\therefore q} \quad (42)$$

$$\frac{p}{q} \quad (43)$$

$$\therefore p \wedge q$$

$$\frac{p \rightarrow q}{\therefore \neg q \rightarrow \neg p} \quad (44)$$

$$\frac{p \vee q}{\neg p \vee r} \quad (45)$$

$$\therefore q \vee r$$

$$a \notin A \equiv \neg(a \in A) \quad (46)$$

$$\{x \mid x \in A\} = A \quad (47)$$

$$P(a) \equiv a \in \{x \mid P(x)\} \quad (48)$$

$$(A = B) \equiv \forall x(x \in A \leftrightarrow x \in B) \quad (49)$$

$$(A \subseteq B) \equiv \forall x(x \in A \rightarrow x \in B) \quad (50)$$

$$(A \subset B) \equiv \forall x(x \in A \rightarrow x \in B) \wedge \exists x(x \in B \wedge x \notin A) \quad (51)$$

$$\emptyset \subseteq S, \text{ para todo } S \quad (52)$$

$$\emptyset = \{x \mid \text{F}\} \quad (53)$$

$$x \in \emptyset \equiv \text{F} \quad (54)$$

$$S \subseteq S, \text{ para todo } S \quad (55)$$

$$(A \times \emptyset) = (\emptyset \times A) = \emptyset \quad (56)$$

$$A \cup B = \{x \mid x \in A \vee x \in B\} \quad (57)$$

$$(x \in A \vee x \in B) \equiv (x \in (A \cup B)) \quad (58)$$

$$A \cap B = \{x \mid (x \in A) \wedge (x \in B)\} \quad (59)$$

$$(x \in A \wedge x \in B) \equiv (x \in (A \cap B)) \quad (60)$$

$$|A \cup B| = |A| + |B| - |A \cap B| \quad (61)$$

$$A - B = \{x \mid x \in A \wedge x \notin B\} \quad (62)$$

$$(x \in A \wedge x \notin B) \equiv (x \in (A - B)) \quad (63)$$

$$\bar{A} = \{x \mid x \notin A\} \quad (64)$$

$$(x \notin A) \equiv (x \in \bar{A}) \quad (65)$$

$$A \cup \emptyset = A \quad (66)$$

$$A \cap U = A \quad (67)$$

$$A \cup U = U \quad (68)$$

$$A \cap \emptyset = \emptyset \quad (69)$$

$$A \cup A = A \quad (70)$$

$$A \cap \bar{A} = \emptyset \quad (71)$$

$$\overline{(\bar{A})} = A \quad (72)$$

$$A \cup B = B \cup A \quad (73)$$

$$A \cap B = B \cap A \quad (74)$$

$$A \cup (B \cup C) = (A \cup B) \cup C \quad (75)$$

$$A \cap (B \cap C) = (A \cap B) \cap C \quad (76)$$

$$A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C) \quad (77)$$

$$A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C) \quad (78)$$

$$\overline{A \cup B} = \bar{A} \cap \bar{B} \quad (79)$$

$$\overline{A \cap B} = \bar{A} \cup \bar{B} \quad (80)$$

$$A \cup (A \cap B) = A \quad (81)$$

$$A \cap (A \cup B) = A \quad (82)$$

$$A \cup \bar{A} = U \quad (83)$$

$$A \cap \bar{A} = \emptyset \quad (84)$$