Matemática Discreta

Final / Segunda Chamada - 2011.1

Sistemas de Informação
Prof. Juliano Iyoda
12 de Julho de 2011

Indique se você está fazendo FINAL ou SEGUNDA CHAMADA.

1. $\{4,0\ pt\}$ Prove que $(A-(B\cup C)) = ((A-B)\cap(A-C))$. Justifique cada passo de prova com uma das equações ou regra de inferência no verso. Somente as equações (10), (11), (12), (13), (73), (74), (75) e (76) podem ser usadas simultaneamente em 1 passo de prova.
   Resposta:

$$
\begin{array}{ll}
A-(B\cup C) & \\
=\{x \mid (x\in A)\wedge(x\notin(B\cup C))\} & [62]\\
=\{x \mid (x\in A)\wedge\neg(x\in(B\cup C))\} & [46]\\
=\{x \mid (x\in A)\wedge\neg((x\in B)\ \vee\ (x\in C))\} & [58]\\
=\{x \mid (x\in A)\wedge(\neg(x\in B)\ \wedge\neg(x\in C))\} & [17]\\
=\{x \mid (x\in A)\wedge((x\notin B)\wedge\neg(x\in C))\} & [46]\\
=\{x \mid (x\in A)\wedge((x\notin B)\wedge(x\notin C))\} & [46]\\
=\{x \mid ((x\in A)\wedge(x\in A))\wedge((x\notin B)\wedge(x\notin C))\} & [8]\\
=\{x \mid ((x\in A)\wedge(x\notin B))\wedge((x\in A)\wedge(x\notin C))\} & [11,13]\\
=\{x \mid (x\in(A-B))\wedge((x\in A)\wedge(x\notin C))\} & [63]\\
=\{x \mid (x\in(A-B))\wedge(x\in(A-C))\} & [63]\\
=(A-B)\cap(A-C) & [59]
\end{array}
$$

2. Queremos provar por indução matemática que

$$(0\ \mathbf{mod}\ 2)\cdot(2\ \mathbf{mod}\ 2)\cdot(4\ \mathbf{mod}\ 2)\cdot(6\ \mathbf{mod}\ 2)\cdot\ldots\cdot(2n\ \mathbf{mod}\ 2)=0$$

   para todo $n\geq 0$.

   a) $\{0,5\ pt\}$ Qual o objetivo de prova do caso base?
   Resposta: $((2\cdot 0)\ \mathbf{mod}\ 2)=0$.

   b) $\{0,5\ pt\}$ Prove o caso base.
   Resposta:

$$
\begin{array}{ll}
((2\cdot 0)\ \mathbf{mod}\ 2) & \\
=0\ \mathbf{mod}\ 2 & [\text{Aritmética}]\\
=0 & [\text{Aritmética}]
\end{array}
$$

c)$\{0,5\ pt\}$ Qual o objetivo de prova do passo indutivo?

Resposta:

$(0\ \mathbf{mod}\ 2) \cdot (2\ \mathbf{mod}\ 2) \cdot \ldots \cdot (2k\ \mathbf{mod}\ 2) \cdot (2(k+1)\ \mathbf{mod}\ 2) = 0$

d)$\{0,5\ pt\}$ Qual a hipótese de indução?

Resposta:

$(0\ \mathbf{mod}\ 2) \cdot (2\ \mathbf{mod}\ 2) \cdot \ldots \cdot (2k\ \mathbf{mod}\ 2) = 0$

e)$\{1,0\ pt\}$ Prove o passo indutivo. Justifique seus passos de prova com "Aritmética" ou "Hipótese de Indução".

Resposta:

$$
\begin{aligned}
&(0\ \mathbf{mod}\ 2) \cdot (2\ \mathbf{mod}\ 2) \cdot \ldots \cdot (2k\ \mathbf{mod}\ 2) \cdot (2(k+1)\ \mathbf{mod}\ 2) \\
&= 0 \cdot (2(k+1)\ \mathbf{mod}\ 2) && \text{[Hipótese de Indução]} \\
&= 0 && \text{[Aritmética]}
\end{aligned}
$$

3. Sobre funções.

a)$\{1,0\ pt\}$ Sejam $A = \{1,2,3\}$ e $B = \{a,b,c,d,e\}$. Defina uma função f_1 que seja **injetiva** mas **não seja sobrejetiva** de A para B.

Resposta: $f_1 = \{(1,a),(2,b),(3,c)\}$.

b)$\{1,0\ pt\}$ Sejam $C = \{1,2,3,4\}$ e $D = \{a,b,c,d\}$. Defina uma função f_2 que **não seja sobrejetiva** e **não seja injetiva** de C para D.

Resposta: $f_2 = \{(1,a),(2,a),(3,c),(4,c)\}$.

c)$\{1,0\ pt\}$ Sejam $E = \{1,2,3\}$ e $F = \{a,b,c\}$. Defina uma função f_3 que **tenha inversa** de E para F.

Resposta: $f_3 = \{(1,a),(2,b),(3,c)\}$.

Obs. "Defina uma função" significa "liste os pares". Por exemplo, $\{(1,a),(2,d),(3,a)\}$ é uma definição de função de A para B.

$$\mathsf{T} \equiv \neg\mathsf{F} \tag{1}$$
$$\neg\mathsf{T} \equiv \mathsf{F} \tag{2}$$
$$p \wedge \mathsf{T} \equiv p \tag{3}$$
$$p \vee \mathsf{F} \equiv p \tag{4}$$
$$p \vee \mathsf{T} \equiv \mathsf{T} \tag{5}$$
$$p \wedge \mathsf{F} \equiv \mathsf{F} \tag{6}$$
$$p \vee p \equiv p \tag{7}$$
$$p \wedge p \equiv p \tag{8}$$
$$\neg(\neg p) \equiv p \tag{9}$$
$$p \vee q \equiv q \vee p \tag{10}$$
$$p \wedge q \equiv q \wedge p \tag{11}$$
$$(p \vee q) \vee r \equiv p \vee (q \vee r) \tag{12}$$
$$(p \wedge q) \wedge r \equiv p \wedge (q \wedge r) \tag{13}$$
$$p \vee (q \wedge r) \equiv (p \vee q) \wedge (p \vee r) \tag{14}$$
$$p \wedge (q \vee r) \equiv (p \wedge q) \vee (p \wedge r) \tag{15}$$
$$\neg(p \wedge q) \equiv \neg p \vee \neg q \tag{16}$$
$$\neg(p \vee q) \equiv \neg p \wedge \neg q \tag{17}$$
$$p \vee (p \wedge q) \equiv p \tag{18}$$
$$p \wedge (p \vee q) \equiv p \tag{19}$$
$$p \vee \neg p \equiv \mathsf{T} \tag{20}$$
$$p \wedge \neg p \equiv \mathsf{F} \tag{21}$$
$$p \rightarrow q \equiv \neg p \vee q \tag{22}$$
$$p \rightarrow q \equiv \neg q \rightarrow \neg p \tag{23}$$
$$p \vee q \equiv \neg p \rightarrow q \tag{24}$$
$$p \wedge q \equiv \neg(p \rightarrow \neg q) \tag{25}$$
$$\neg(p \rightarrow q) \equiv p \wedge \neg q \tag{26}$$
$$(p \rightarrow q) \wedge (p \rightarrow r) \equiv p \rightarrow (q \wedge r) \tag{27}$$
$$(p \rightarrow r) \wedge (q \rightarrow r) \equiv (p \vee q) \rightarrow r \tag{28}$$
$$(p \rightarrow q) \vee (p \rightarrow r) \equiv p \rightarrow (q \vee r) \tag{29}$$
$$(p \rightarrow r) \vee (q \rightarrow r) \equiv (p \wedge q) \rightarrow r \tag{30}$$
$$p \leftrightarrow q \equiv (p \rightarrow q) \wedge (q \rightarrow p) \tag{31}$$
$$p \leftrightarrow q \equiv \neg p \leftrightarrow \neg q \tag{32}$$
$$p \leftrightarrow q \equiv (p \wedge q) \vee (\neg p \wedge \neg q) \tag{33}$$
$$\neg(p \leftrightarrow q) \equiv p \leftrightarrow \neg q \tag{34}$$
$$\neg\exists x P(x) \equiv \forall x \neg P(x) \tag{35}$$
$$\neg\forall x P(x) \equiv \exists x \neg P(x) \tag{36}$$
$$\begin{array}{l} p \\ p \rightarrow q \\ \hline \therefore q \end{array} \tag{37}$$
$$\begin{array}{l} \neg q \\ p \rightarrow q \\ \hline \therefore \neg p \end{array} \tag{38}$$
$$\begin{array}{l} p \rightarrow q \\ q \rightarrow r \\ \hline \therefore p \rightarrow r \end{array} \tag{39}$$
$$\begin{array}{l} p \vee q \\ \neg p \\ \hline \therefore q \end{array} \qquad \begin{array}{l} p \vee q \\ \neg q \\ \hline \therefore p \end{array} \tag{40}$$
$$\begin{array}{c} p \\ \hline \therefore p \vee q \end{array} \qquad \begin{array}{c} p \\ \hline \therefore q \vee p \end{array} \tag{41}$$
$$\begin{array}{c} p \wedge q \\ \hline \therefore p \end{array} \qquad \begin{array}{c} p \wedge q \\ \hline \therefore q \end{array} \tag{42}$$
$$\begin{array}{l} p \\ q \\ \hline \therefore p \wedge q \end{array} \tag{43}$$
$$\begin{array}{c} p \rightarrow q \\ \hline \therefore \neg q \rightarrow \neg p \end{array} \tag{44}$$
$$\begin{array}{l} p \vee q \\ \neg p \vee r \\ \hline \therefore q \vee r \end{array} \tag{45}$$
$$a \notin A \equiv \neg(a \in A) \tag{46}$$
$$\{x \mid x \in A\} = A \tag{47}$$
$$P(a) \equiv a \in \{x \mid P(x)\} \tag{48}$$
$$(A = B) \equiv \forall x(x \in A \leftrightarrow x \in B) \tag{49}$$
$$(A \subseteq B) \equiv \forall x(x \in A \rightarrow x \in B) \tag{50}$$
$$\begin{aligned} (A \subset B) \quad \equiv \quad & \forall x(x \in A \rightarrow x \in B) \wedge \\ & \exists x(x \in B \wedge x \notin A) \end{aligned} \tag{51}$$
$$\emptyset \subseteq S, para\ todo\ S \tag{52}$$
$$\emptyset = \{x \mid \mathsf{F}\} \tag{53}$$
$$x \in \emptyset \equiv \mathsf{F} \tag{54}$$
$$S \subseteq S, para\ todo\ S \tag{55}$$
$$(A \times \emptyset) = (\emptyset \times A) = \emptyset \tag{56}$$
$$A \cup B = \{x \mid x \in A \ \vee \ x \in B\} \tag{57}$$
$$(x \in A \ \vee \ x \in B) \ \equiv \ (x \in (A \cup B)) \tag{58}$$
$$A \cap B = \{x \mid (x \in A) \wedge (x \in B)\} \tag{59}$$
$$(x \in A \ \wedge \ x \in B) \ \equiv \ (x \in (A \cap B)) \tag{60}$$
$$|A \cup B| = |A| + |B| - |A \cap B| \tag{61}$$
$$A - B = \{x \mid x \in A \ \wedge \ x \notin B\} \tag{62}$$
$$(x \in A \ \wedge \ x \notin B) \ \equiv \ (x \in (A - B)) \tag{63}$$
$$\overline{A} = \{x \mid x \notin A\} \tag{64}$$
$$(x \notin A) \ \equiv \ (x \in \overline{A}) \tag{65}$$
$$A \cup \emptyset = A \tag{66}$$
$$A \cap U = A \tag{67}$$
$$A \cup U = U \tag{68}$$
$$A \cap \emptyset = \emptyset \tag{69}$$
$$A \cup A = A \tag{70}$$
$$A \cap A = A \tag{71}$$
$$\overline{(\overline{A})} = A \tag{72}$$
$$A \cup B = B \cup A \tag{73}$$
$$A \cap B = B \cap A \tag{74}$$
$$A \cup (B \cup C) = (A \cup B) \cup C \tag{75}$$
$$A \cap (B \cap C) = (A \cap B) \cap C \tag{76}$$
$$A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C) \tag{77}$$
$$A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C) \tag{78}$$
$$\overline{A \cup B} = \overline{A} \cap \overline{B} \tag{79}$$
$$\overline{A \cap B} = \overline{A} \cup \overline{B} \tag{80}$$
$$A \cup (A \cap B) = A \tag{81}$$
$$A \cap (A \cup B) = A \tag{82}$$
$$A \cup \overline{A} = U \tag{83}$$
$$A \cap \overline{A} = \emptyset \tag{84}$$