

Matemática Discreta

Mini-prova 1 - 2011.1

Prof. Juliano Iyoda
Sistemas de Informação
25 de Março de 2010

1. {0, 7 pt} Prove por tabela verdade que $((p \rightarrow r) \vee (q \rightarrow r)) \equiv ((p \wedge q) \rightarrow r)$.

Resposta:

p	q	r	$p \rightarrow r$	$q \rightarrow r$	$(p \rightarrow r) \vee (q \rightarrow r)$	$(p \wedge q)$	$(p \wedge q) \rightarrow r$
F	F	F	T	T	T	F	T
F	F	T	T	T	T	F	T
F	T	F	T	F	T	F	T
F	T	T	T	T	T	F	T
T	F	F	F	T	T	F	T
T	F	T	T	T	T	F	T
T	T	F	F	F	F	T	F
T	T	T	T	T	T	T	T

Como as colunas 6 e 8 têm o mesmo comportamento linha a linha, as expressões $((p \rightarrow r) \vee (q \rightarrow r))$ e $((p \wedge q) \rightarrow r)$ são logicamente equivalentes.

2. {1, 3 pt} Prove a mesma equação do quesito anterior utilizando as equações em anexo. **Não utilize a equação 30.** Justifique cada passo de prova com exatamente 1 equação da lista em anexo. A única **exceção** a esta regra é o uso de comutatividade e associatividade. Ou seja, as equações (10), (11), (12) e (13) podem ser usadas simultaneamente em 1 passo de prova.

Resposta:

$$\begin{aligned} & (p \rightarrow r) \vee (q \rightarrow r) \\ & \equiv (\neg p \vee r) \vee (q \rightarrow r) && [22] \\ & \equiv (\neg p \vee r) \vee (\neg q \vee r) && [22] \\ & \equiv (\neg p \vee \neg q) \vee (r \vee r) && [10,12] \\ & \equiv (\neg p \vee \neg q) \vee r && [7] \\ & \equiv \neg(p \wedge q) \vee r && [16] \\ & \equiv (p \wedge q) \rightarrow r && [22] \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& \mathbf{T} \equiv \neg \mathbf{F} & (1) \\
& \neg \mathbf{T} \equiv \mathbf{F} & (2) \\
& p \wedge \mathbf{T} \equiv p & (3) \\
& p \vee \mathbf{F} \equiv p & (4) \\
& p \vee \mathbf{T} \equiv \mathbf{T} & (5) \\
& p \wedge \mathbf{F} \equiv \mathbf{F} & (6) \\
& p \vee p \equiv p & (7) \\
& p \wedge p \equiv p & (8) \\
& \neg(\neg p) \equiv p & (9) \\
& p \vee q \equiv q \vee p & (10) \\
& p \wedge q \equiv q \wedge p & (11) \\
& (p \vee q) \vee r \equiv p \vee (q \vee r) & (12) \\
& (p \wedge q) \wedge r \equiv p \wedge (q \wedge r) & (13) \\
& p \vee (q \wedge r) \equiv (p \vee q) \wedge (p \vee r) & (14) \\
& p \wedge (q \vee r) \equiv (p \wedge q) \vee (p \wedge r) & (15) \\
& \neg(p \wedge q) \equiv \neg p \vee \neg q & (16) \\
& \neg(p \vee q) \equiv \neg p \wedge \neg q & (17) \\
& p \vee (p \wedge q) \equiv p & (18) \\
& p \wedge (p \vee q) \equiv p & (19) \\
& p \vee \neg p \equiv \mathbf{T} & (20) \\
& p \wedge \neg p \equiv \mathbf{F} & (21) \\
& p \rightarrow q \equiv \neg p \vee q & (22) \\
& p \rightarrow q \equiv \neg q \rightarrow \neg p & (23) \\
& p \vee q \equiv \neg p \rightarrow q & (24) \\
& p \wedge q \equiv \neg(p \rightarrow \neg q) & (25) \\
& \neg(p \rightarrow q) \equiv p \wedge \neg q & (26) \\
& (p \rightarrow q) \wedge (p \rightarrow r) \equiv p \rightarrow (q \wedge r) & (27) \\
& (p \rightarrow r) \wedge (q \rightarrow r) \equiv (p \vee q) \rightarrow r & (28) \\
& (p \rightarrow q) \vee (p \rightarrow r) \equiv p \rightarrow (q \vee r) & (29) \\
& (p \rightarrow r) \vee (q \rightarrow r) \equiv (p \wedge q) \rightarrow r & (30) \\
& p \leftrightarrow q \equiv (p \rightarrow q) \wedge (q \rightarrow p) & (31) \\
& p \leftrightarrow q \equiv \neg p \leftrightarrow \neg q & (32) \\
& p \leftrightarrow q \equiv (p \wedge q) \vee (\neg p \wedge \neg q) & (33) \\
& \neg(p \leftrightarrow q) \equiv p \leftrightarrow \neg q & (34) \\
& \neg \exists x P(x) \equiv \forall x \neg P(x) & (35) \\
& \neg \forall x P(x) \equiv \exists x \neg P(x) & (36) \\
& \frac{p}{p \rightarrow q} & (37) \\
& \quad \therefore q \\
& \frac{\neg q}{p \rightarrow q} & (38) \\
& \quad \therefore \neg p \\
& \frac{p \rightarrow q}{q \rightarrow r} & (39) \\
& \quad \therefore p \rightarrow r \\
& \frac{p \vee q}{\neg p} \quad \frac{p \vee q}{\neg q} & (40) \\
& \quad \therefore q \quad \quad \therefore p \\
& \frac{p}{\therefore p \vee q} \quad \frac{p}{\therefore q \vee p} & (41)
\end{aligned}$$

$$\frac{p \wedge q}{\therefore p} \quad \frac{p \wedge q}{\therefore q} \quad (42)$$

$$\frac{p}{q} \quad (43) \\
\therefore p \wedge q$$

$$\frac{p \rightarrow q}{\therefore \neg q \rightarrow \neg p} \quad (44)$$

$$\frac{p \vee q}{\neg p \vee r} \quad (45) \\
\therefore q \vee r$$

$$a \notin A \equiv \neg(a \in A) \quad (46)$$

$$\{x \mid x \in A\} = A \quad (47)$$

$$P(a) \equiv a \in \{x \mid P(x)\} \quad (48)$$

$$(A = B) \equiv \forall x(x \in A \leftrightarrow x \in B) \quad (49)$$

$$(A \subseteq B) \equiv \forall x(x \in A \rightarrow x \in B) \quad (50)$$

$$(A \subset B) \equiv \forall x(x \in A \rightarrow x \in B) \wedge \exists x(x \in B \wedge x \notin A) \quad (51)$$

$$\emptyset \subseteq S, \text{ para todo } S \quad (52)$$

$$\emptyset = \{x \mid \mathbf{F}\} \quad (53)$$

$$x \in \emptyset \equiv \mathbf{F} \quad (54)$$

$$S \subseteq S, \text{ para todo } S \quad (55)$$

$$(A \times \emptyset) = (\emptyset \times A) = \emptyset \quad (56)$$

$$A \cup B = \{x \mid x \in A \vee x \in B\} \quad (57)$$

$$(x \in A \vee x \in B) \equiv (x \in (A \cup B)) \quad (58)$$

$$A \cap B = \{x \mid (x \in A) \wedge (x \in B)\} \quad (59)$$

$$(x \in A \wedge x \in B) \equiv (x \in (A \cap B)) \quad (60)$$

$$|A \cup B| = |A| + |B| - |A \cap B| \quad (61)$$

$$A - B = \{x \mid x \in A \wedge x \notin B\} \quad (62)$$

$$(x \in A \wedge x \notin B) \equiv (x \in (A - B)) \quad (63)$$

$$\bar{A} = \{x \mid x \notin A\} \quad (64)$$

$$(x \notin A) \equiv (x \in \bar{A}) \quad (65)$$

$$A \cup \emptyset = A \quad (66)$$

$$A \cap U = A \quad (67)$$

$$A \cup U = U \quad (68)$$

$$A \cap \emptyset = \emptyset \quad (69)$$

$$A \cup A = A \quad (70)$$

$$A \cap \bar{A} = \emptyset \quad (71)$$

$$(\bar{A}) = A \quad (72)$$

$$A \cup B = B \cup A \quad (73)$$

$$A \cap B = B \cap A \quad (74)$$

$$A \cup (B \cup C) = (A \cup B) \cup C \quad (75)$$

$$A \cap (B \cap C) = (A \cap B) \cap C \quad (76)$$

$$A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C) \quad (77)$$

$$A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C) \quad (78)$$

$$\overline{A \cup B} = \bar{A} \cap \bar{B} \quad (79)$$

$$\overline{A \cap B} = \bar{A} \cup \bar{B} \quad (80)$$

$$A \cup (A \cap B) = A \quad (81)$$

$$A \cap (A \cup B) = A \quad (82)$$

$$A \cup \bar{A} = U \quad (83)$$

$$A \cap \bar{A} = \emptyset \quad (84)$$