Matemática Discreta

Mini-prova 3 - 2010.1

Prof. Juliano Iyoda

20 de Maio de 2010

1. Encontre funções $f'(n)$, $g'(n)$, $h'(n)$ e $k'(n)$ que são big-Θ de $f(n)$, $g(n)$, $h(n)$ e $k(n)$, respectivamente.

   a) $\{0,2\ pt\}$ $f(n) = 5n + (log\ n)$ **Resposta:** $f'(n) = n$

   b) $\{0,2\ pt\}$ $g(n) = 10n^3 + 5n^7 + 400$ **Resposta:** $g'(n) = n^7$

   c) $\{0,2\ pt\}$ $h(n) = (5 + 80n^3)(n^2 + 3)$ **Resposta:** $h'(n) = n^5$

   d) $\{0,2\ pt\}$ $k(n) = 10 \cdot 2^n + 5000$ **Resposta:** $k'(n) = 2^n$

2. Seja $f(n) = (n + 4)$ **mod** 26 a função que encripta uma mensagem de texto considerando o alfabeto
   A=0, B=1, C=2, D=3, E=4, F=5, G=6, H=7, I=8, J=9, K=10, L=11, M=12, N=13, O=14, P=15, Q=16, R=17, S=18, T=19, U=20, V=21, W=22, X=23, Y=24, Z=25.

   a) $\{0,2\ pt\}$ Encripte a mensagem "ZEUS". Exiba os cálculos que te levam à resposta.
   Resposta:

$$\begin{array}{l} f(Z) = f(25) = (25+4)\ \mathbf{mod}\ 26 = 3 = D \\ f(E) = f(4) = (4+4)\ \mathbf{mod}\ 26 = 8 = I \\ f(U) = f(20) = (20+4)\ \mathbf{mod}\ 26 = 24 = Y \\ f(S) = f(18) = (18+4)\ \mathbf{mod}\ 26 = 22 = W \end{array}$$

   "DIYW"

   b) $\{0,2\ pt\}$ Defina a função $f^{-1}(n)$ que desencripta mensagens de $f(n)$. **Resposta:** $f^{-1} = (n - 4)$ **mod** 26

   c) $\{0,2\ pt\}$ Desencripte a mensagem "GCBA". Exiba os cálculos que te levam à resposta.
   Resposta:

$$\begin{array}{l} f^{-1}(G) = f^{-1}(6) = (6-4)\ \mathbf{mod}\ 26 = 2 = C \\ f^{-1}(C) = f^{-1}(2) = (2-4)\ \mathbf{mod}\ 26 = 24\ \textit{(veja abaixo)} = Y \\ f^{-1}(B) = f^{-1}(1) = (1-4)\ \mathbf{mod}\ 26 = 23\ \textit{(veja abaixo)} = X \\ f^{-1}(A) = f^{-1}(0) = (0-4)\ \mathbf{mod}\ 26 = 22\ \textit{(veja abaixo)} = W \end{array}$$

   $-2/26 = -0,08$. Portanto, -2 **div** $26 = \lfloor -0,08 \rfloor = -1$.
   Então, $-2 = 26 \cdot (-1) + r$. Ou seja, $r = 24$.

$-3/26 = -0,12$. Portanto, -3 **div** $26 = \lfloor -0,12 \rfloor = -1$.
Então, $-3 = 26 \cdot (-1) + r$. Ou seja, $r = 23$.

$-4/26 = -0,15$. Portanto, -4 **div** $26 = \lfloor -0,15 \rfloor = -1$.
Então, $-4 = 26 \cdot (-1) + r$. Ou seja, $r = 22$.

3. $\{0,6\ pt\}$ Sejam $mdc(p,q) = 2^3 3^4 5^1 7^0$ e $q = 2^5 3^4 5^8 7^{10}$. Utilize a definição de mdc em termos de fatores primos para encontrar p.

   Obs. Existem infinitas respostas. Basta escrever 1 delas.

   Resposta: Seja $p = 2^x 3^y 5^z 7^k$. Como $mdc(p,q) = 2^{min(x,5)} 3^{min(y,4)} 5^{min(z,8)} 7^{min(k,10)}$, temos que encontrar

$$\begin{array}{l} x,\ tal\ que\ min(x,5) = 3 \\ y,\ tal\ que\ min(y,4) = 4 \\ z,\ tal\ que\ min(z,8) = 1 \\ k,\ tal\ que\ min(k,10) = 0 \end{array}$$

   Ou seja $p = 2^3 3^y 5^1 7^0$, onde $y \geq 4$. Possíveis respostas: $2^3 3^4 5^1 7^0$, $2^3 3^5 5^1 7^0$, $2^3 3^6 5^1 7^0$, $2^3 3^7 5^1 7^0$, $2^3 3^8 5^1 7^0, \ldots$