Matemática Discreta

Miniprova 3 - 2010.2

Prof. Juliano Iyoda

05 de Novembro de 2010

1. $\{1,0\ pt\}$ Use o Teorema Chinês do Resto para encontrar uma solução para o sistema de equações abaixo. **Exiba seus cálculos**. Sugestão: teste seu resultado para ter certeza que calculou corretamente.

$$\begin{aligned} x &\equiv 1\ (mod\ 3) \\ x &\equiv 2\ (mod\ 4) \\ x &\equiv 3\ (mod\ 5) \end{aligned}$$

Para sua ajuda, segue abaixo a fórmula do Teorema Chinês do Resto. Em um sistema de equações

$$\begin{aligned} x &\equiv a_1\ (mod\ m_1) \\ x &\equiv a_2\ (mod\ m_2) \\ &\vdots \\ x &\equiv a_n\ (mod\ m_n) \end{aligned}$$

A solução é $x = a_1M_1y_1 + a_2M_2y_2 + \ldots + a_nM_ny_n$. Onde, $m = m_1m_2 \ldots m_n$, $M_k = m/m_k$ e y_k é o inverso de M_k módulo m_k.

Resposta: Sejam $m = 3 \cdot 4 \cdot 5 = 60$, $M_1 = 4 \cdot 5 = 20$, $M_2 = 3 \cdot 5 = 15$, $M_3 = 3 \cdot 4 = 12$, $m_1 = 3$, $m_2 = 4$, $m_5 = 5$.
Cálculo de y_1 (inverso de 20 módulo 3). Pelo algoritmo de Euclides, sabemos que $20 = 3 \cdot 6 + 2$ e $3 = 2 \cdot 1 + 1$. Substituindo a primeira equação na segunda, temos que $1 = 4 \cdot 3 + (-1) \cdot 20$. Ou seja, $y_1 = -1$.
Cálculo de y_2 (inverso de 15 módulo 4). Pelo algoritmo de Euclides, sabemos que $15 = 4 \cdot 3 + 3$ e $4 = 3 \cdot 1 + 1$. Substituindo a primeira equação na segunda, temos que $1 = 4 \cdot 4 + (-1) \cdot 15$. Ou seja, $y_2 = -1$.
Cálculo de y_3 (inverso de 12 módulo 5). Pelo algoritmo de Euclides, sabemos que $12 = 5 \cdot 2 + 2$ e $5 = 2 \cdot 2 + 1$. Substituindo a primeira equação na segunda, temos que $1 = 5 \cdot 5 + (-2) \cdot 12$. Ou seja, $y_3 = -2$.
Aplicando a fórmula, temos que $x = 1 \cdot (-1) \cdot 20 + 2 \cdot (-1) \cdot 15 + 3 \cdot (-2) \cdot 12 = -122$.

2. Ao provarmos por indução que

$$(4 + 10 + 16 + \ldots + (6n - 2)) = (n(3n + 1))$$

para todo $n > 0$:

a) $\{0,2\ pt\}$ Qual o objetivo de prova do caso base?
Resposta: $6 \cdot 1 - 2 = 1 \cdot (3 \cdot 1 + 1)$

b) $\{0,2\ pt\}$ Prove o caso base.

Resposta:

$$\begin{aligned}
& 6 \cdot 1 - 2 \\
&= 4 && \text{[Aritmética]} \\
&= 3 + 1 && \text{[Aritmética]} \\
&= 3 \cdot 1 + 1 && \text{[Aritmética]} \\
&= 1 \cdot (3 \cdot 1 + 1) && \text{[Aritmética]}
\end{aligned}$$

c) $\{0,2\ pt\}$ Qual o objetivo de prova do passo indutivo?

Resposta: $(4 + 10 + 16 + \ldots + (6k - 2) + (6(k+1) - 2)) = ((k+1) \cdot (3 \cdot (k+1) + 1))$

d) $\{0,2\ pt\}$ Qual a hipótese de indução?

Resposta: $(4 + 10 + 16 + \ldots + (6k - 2)) = (k(3k+1))$

e) $\{0,2\ pt\}$ Prove o passo indutivo. Justifique cada passo com os termos "[Aritmética]", "[Hipótese de Indução]" ou com "[100]", cuja equação é dada abaixo:

$$(3k^2 + 7k + 4) = ((k+1)(3(k+1)+1)) \qquad [100]$$

Resposta:

$$\begin{aligned}
& 4 + 10 + 16 + \ldots + (6k - 2) + (6(k+1) - 2) \\
&= k(3k+1) + (6(k+1) - 2) && \text{[Hipótese de Indução]} \\
&= 3k^2 + k + 6k + 6 - 2 && \text{[Aritmética]} \\
&= 3k^2 + 7k + 4 && \text{[Aritmética]} \\
&= (k+1)(3(k+1)+1) && \text{[100]}
\end{aligned}$$