Matemática Discreta

Mini-prova 4 - 2010.1

Prof. Juliano Iyoda

21 de Junho de 2010

1. $\{1,0\ pt\}$ Seja $P(n) = \left(\sum_{i=1}^{n} i^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}\right)$.
   Prove por indução que $P(n)$ é verdade para $n \geq 1$.

   - Mostre seus cálculos;
   - Escreva o **objetivo de prova** do caso base e do passo indutivo.
   - Escreva a **hipótese de indução**
   - Justifique da melhor forma possível cada passo de prova.
   - Utilize a Equação 1 abaixo caso precise:

   $$\frac{k(k+1)(2k+1)+6(k+1)^2}{6} = \frac{(k+1)((k+1)+1)(2(k+1)+1)}{6} \qquad [1]$$

   Resposta:
   Critérios de correção:
   Objetivo de prova da base: $\{0,2\ pt\}$
   Prova da base: $\{0,2\ pt\}$
   Objetivo de prova do passo indutivo: $\{0,2\ pt\}$
   Hipótese de indução: $\{0,2\ pt\}$
   Prova do passo indutivo: $\{0,2\ pt\}$

   Base. Objetivo de prova: $\sum_{i=1}^{1} i^2 = \frac{1(1+1)(2\cdot 1+1)}{6}$

   Prova:

   $$\begin{aligned}
   \sum_{i=1}^{1} i^2 &= 1^2 && [\text{Def. } \textstyle\sum] \\
   &= 1 && [1^2 = 1] \\
   &= \tfrac{1(1+1)(2\cdot 1+1)}{6} && [\text{Aritmética}]
   \end{aligned}$$

   Indução. Objetivo de prova: $\sum_{i=1}^{k+1} i^2 = \frac{(k+1)((k+1)+1)(2(k+1)+1)}{6}$

Hipótese de indução: $\sum_{i=1}^{k} i^2 \; = \; \frac{k(k+1)(2k+1)}{6}$

Prova:

$$\begin{aligned} \sum_{i=1}^{k+1} i^2 &= \sum_{i=1}^{k} i^k + (k+1)^2 & [\text{Def. } \textstyle\sum] \\ &= \tfrac{k(k+1)(2k+1)}{6} + (k+1)^2 & [\text{Hipótese de Indução}] \\ &= \tfrac{k(k+1)(2k+1)+6(k+1)^2}{6} & [\text{Denominador comum}] \\ &= \tfrac{(k+1)((k+1)+1)(2(k+1)+1)}{6} & [\text{Eq. } 1] \end{aligned}$$

2. $\{1,0\ pt\}$ Resolva o sistema de equações abaixo.

$$\begin{aligned} x &\equiv 2\ (mod\ 3) \\ x &\equiv 1\ (mod\ 4) \\ x &\equiv 3\ (mod\ 5) \end{aligned}$$

- Mostre seus cálculos;
- Deixe explícito os valores de cada $\mathbf{M_k}$
- Deixe explícito os valores de cada $\mathbf{y_k}$
- **Dica:** sempre que calcular y_k e x, **teste** se estes números estão corretos.

Resposta:
Critérios de correção:
Cálculo dos M_k : $\{0,25\ pt\}$
Cálculo dos y_k : $\{0,5\ pt\}$
Cálculo de x : $\{0,25\ pt\}$

$M_1 = \frac{3 \cdot 4 \cdot 5}{3} = 20$, $M_2 = \frac{3 \cdot 4 \cdot 5}{4} = 15$, $M_3 = \frac{3 \cdot 4 \cdot 5}{5} = 12$.

y_1 é o inverso de 20 módulo 3. Cálculo:

Pelo algoritmo de Euclides:

$$\begin{aligned} 20 &= 6 \cdot 3 + 2 \\ 3 &= 1 \cdot 2 + 1 \end{aligned}$$

Então:

$$\begin{aligned} 1 &= 3 - 1 \cdot 2 \\ 1 &= 3 - 1(20 - 6 \cdot 3) \\ 1 &= 3 - 20 + 6 \cdot 3 \\ 1 &= (-1) \cdot 20 + 7 \cdot 3 \end{aligned}$$

Ou seja, $y_1 = -1$.

y_2 é o inverso de 15 módulo 4. Cálculo:

Pelo algoritmo de Euclides:

$$\begin{aligned} 15 &= 3 \cdot 4 + 3 \\ 4 &= 1 \cdot 3 + 1 \textit{Então:} \\ 1 &= 4 - 1 \cdot 3 \\ 1 &= 4 - 1(15 - 3 \cdot 4) \\ 1 &= 4 - 15 + 3 \cdot 4 \\ 1 &= (-1)15 + 4 \cdot 4 \end{aligned}$$

Ou seja, $y_2 = -1$.

y_3 é o inverso de 12 módulo 5. Cálculo:

Pelo algoritmo de Euclides:

$$12 = 2 \cdot 5 + 2$$
$$5 = 2 \cdot 2 + 1 \textit{Então:}$$
$$1 = 5 - 2 \cdot 2$$
$$1 = 5 - 2(12 - 2 \cdot 5)$$
$$1 = 5 - 2 \cdot 12 + 4 \cdot 5$$
$$1 = (-2)12 + 5 \cdot 5$$

Ou seja, $y_3 = -2$.

$x = (2 \cdot 20 \cdot (-1)) + (1 \cdot 15 \cdot (-1)) + (3 \cdot 12 \cdot (-2)) = -127$. Ou qualquer solução y, tal que $y \equiv -127\ (mod\ 60)$, por exemplo: $y = 53$.