

Matemática Discreta

Mini-prova 4 - 2010.2

Prof. Juliano Iyoda

26 de Novembro de 2010

1. Seja o conjunto de strings $A = \{“1”, “11”, “111”, \dots\}$ definido assim:

Caso base. O string “1” pertence a A .

Caso recursivo. Seja s um string que pertença a A . Então o string “1”+ s também pertence à A .

Obs₁. O símbolo de + acima é uma concatenação de strings. Exemplo: “xyz”+“abc” = “xyzabc”, “1”+“111” = “1111”.

Obs₂. Todos elementos de A são provenientes do passo base e passo recursivo.

Seja $C(s)$ a função que retorna o *comprimento* do string s . Por exemplo, $C(“1”) = 1$, $C(“11111”) = 5$, etc.

Seja $F(s)$ a função que retorna a *soma dos dígitos* do string s . Por exemplo, $F(“1”) = 1$, $F(“123”) = 1 + 2 + 3 = 6$, $F(“1111”) = 1 + 1 + 1 + 1 = 4$, etc.

Queremos provar por indução estrutural que $C(s) = F(s)$ para todo $s \in A$.

- a) {0, 3 pt} Qual o objetivo de prova do caso base? **Resposta:** $C(“1”) = F(“1”)$

- b) {0, 3 pt} Prove o caso base (justifique cada passo de prova com “Def. de C ” ou “Def. de F ”).

Resposta:

$$\begin{aligned} C(“1”) & \\ &= 1 \quad [\text{Def. de } C] \\ &= F(“1”) \quad [\text{Def. de } F] \end{aligned}$$

- c) {0, 3 pt} Qual o objetivo de prova do passo indutivo? **Resposta:** $C(“1”+s) = F(“1”+s)$

- d) {0, 3 pt} Qual a hipótese de indução? **Resposta:** $C(s) = F(s)$

- e) {0, 3 pt} Prove o passo indutivo (justifique cada passo de prova com “Def. de C ”, “Def. de F ” ou “Hipótese de Indução”).

Resposta:

$$\begin{aligned} C(“1”+s) & \\ &= 1 + C(s) \quad [\text{Def. de } C] \\ &= 1 + F(s) \quad [\text{Hipótese de Indução}] \\ &= F(“1”+s) \quad [\text{Def. de } F] \end{aligned}$$

2. Sejam $B = \{1, 2, 3\}$ e $R = \{(1, 1), (1, 2), (2, 1)\}$ uma relação em B .

a) $\{0, 25 \text{ pt}\}$ Defina o fecho reflexivo de R .

Resposta: $\{(1, 1), (1, 2), (2, 1), (2, 2), (3, 3)\}$

b) $\{0, 25 \text{ pt}\}$ Defina o fecho simétrico de R .

Resposta: $\{(1, 1), (1, 2), (2, 1)\}$