Matemática Discreta

Miniprova 4 - 2011.1

Prof. Juliano Iyoda
Sistemas de Informação
10 de Junho de 2011

1. $\{1, 0\ pt\}$ Use o Teorema Chinês do Resto para encontrar uma solução para o sistema de equações abaixo. **Exiba seus cálculos**. Sugestão: teste seu resultado para ter certeza que calculou corretamente.

$$\begin{aligned} x &\equiv 4\ (mod\ 5) \\ x &\equiv 3\ (mod\ 3) \\ x &\equiv 2\ (mod\ 8) \end{aligned}$$

Para sua ajuda, segue abaixo a fórmula do Teorema Chinês do Resto. Em um sistema de equações

$$\begin{aligned} x &\equiv a_1\ (mod\ m_1) \\ x &\equiv a_2\ (mod\ m_2) \\ &\vdots \\ x &\equiv a_n\ (mod\ m_n) \end{aligned}$$

A solução é $x = a_1M_1y_1 + a_2M_2y_2 + \ldots + a_nM_ny_n$. Onde, $m = m_1m_2 \ldots m_n$, $M_k = m/m_k$ e y_k é o inverso de M_k módulo m_k.

Resposta: Sejam $m = 5 \cdot 3 \cdot 8 = 120$, $M_1 = 3 \cdot 8 = 24$, $M_2 = 5 \cdot 8 = 40$, $M_3 = 5 \cdot 3 = 15$, $m_1 = 5$, $m_2 = 3$, $m_3 = 8$.
Cálculo de y_1 (inverso de 24 módulo 5):

$$24 = 5 \cdot 4 + 4$$
$$5 = 4 \cdot 1 + 1$$

$$\begin{aligned} &1 \\ &= 5 - 4 \\ &= 5 - (24 - 5 \cdot 4) \\ &= 5 - 24 + 5 \cdot 4 \\ &= 5 \cdot 5 - 24 \end{aligned}$$

$$y_1 = -1.$$

Cálculo de y_2 (inverso de 40 módulo 3):

$$40 = 3 \cdot 13 + 1$$

$$\begin{aligned} &1 \\ &= 40 - 3 \cdot 13 \end{aligned}$$

$$y_2 = 1.$$

Cálculo de y_3 (inverso de 15 módulo 8):

$$\begin{aligned} &15 = 8 \cdot 1 + 7 \\ &8 = 7 \cdot 1 + 1 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} &1 \\ &= 8 - 7 \\ &= 8 - (15 - 8) \\ &= 8 - 15 + 8 \\ &= 2 \cdot 8 - 15 \end{aligned}$$

$$y_3 = -1.$$

$x = 4 \cdot 24 \cdot (-1) + 3 \cdot 40 \cdot 1 + 2 \cdot 15 \cdot (-1) = -96 + 120 - 30 = -6.$

2. Queremos provar por indução matemática que todo número ímpar, ao ser dividido por 2, tem resto 1. Ou seja, queremos provar que $((2n-1) \textbf{ mod } 2) = 1$ para todo $n > 0$:

a)$\{0,15\ pt\}$ Qual o objetivo de prova do caso base?
Resposta: $((2 \cdot 1 - 1) \textbf{ mod } 2) = 1.$

b)$\{0,15\ pt\}$ Prove o caso base.
Resposta:

$$\begin{aligned} &((2 \cdot 1 - 1) \textbf{ mod } 2) & \\ &= (2 - 1) \textbf{ mod } 2 & \text{[Aritmética]} \\ &= 1 \textbf{ mod } 2 & \text{[Aritmética]} \\ &= 1 & \text{[Aritmética]} \end{aligned}$$

c)$\{0,15\ pt\}$ Qual o objetivo de prova do passo indutivo?
Resposta: $((2(k+1) - 1) \textbf{ mod } 2) = 1.$

d)$\{0,15\ pt\}$ Qual a hipótese de indução?
Resposta: $((2k - 1) \textbf{ mod } 2) = 1.$

e)$\{0,40\ pt\}$ Prove o passo indutivo. Justifique seus passos de prova com "Aritmética", "Hipótese de Indução" ou "[1]", onde [1] é a equação abaixo:

$$(((2k-1)+2) \textbf{ mod } 2) \quad = \quad ((((2k-1) \textbf{ mod } 2)+(2 \textbf{ mod } 2)) \textbf{ mod } 2) \quad [1]$$

Resposta:

$$
\begin{aligned}
& (2(k+1)-1) \textbf{ mod } 2 \\
&= (2k+2-1) \textbf{ mod } 2 && \text{[Aritmética]} \\
&= ((2k-1)+2) \textbf{ mod } 2 && \text{[Aritmética]} \\
&= (((2k-1) \textbf{ mod } 2) + (2 \textbf{ mod } 2)) \textbf{ mod } 2 && \text{[1]} \\
&= (1 + (2 \textbf{ mod } 2)) \textbf{ mod } 2 && \text{[Hipótese de Indução]} \\
&= (1+0) \textbf{ mod } 2 && \text{[Aritmética]} \\
&= 1 \textbf{ mod } 2 && \text{[Aritmética]} \\
&= 1 && \text{[Aritmética]}
\end{aligned}
$$