

Matemática Discreta

Prova 1 - 2011.1

Prof. Juliano Iyoda
Sistema de Informação
29 de Abril de 2011

1. {2, 25 pt} Prove que $\overline{A \cap \overline{A}} = \{x \mid \top\}$. Justifique cada passo de prova com uma equação ou regra de inferência em anexo. A única **exceção** a esta regra é o uso de comutatividade e associatividade. Ou seja, as equações (10), (11), (12) e (13) podem ser usadas simultaneamente em 1 passo de prova.

Resposta:

$$\begin{aligned} & \overline{A \cap \overline{A}} \\ &= \{x \mid x \notin (A \cap \overline{A})\} && [64] \\ &= \{x \mid \neg(x \in (A \cap \overline{A}))\} && [46] \\ &= \{x \mid \neg(x \in A \wedge x \in \overline{A})\} && [60] \\ &= \{x \mid \neg(x \in A \wedge x \notin A)\} && [65] \\ &= \{x \mid \neg(x \in A \wedge \neg(x \in A))\} && [46] \\ &= \{x \mid \neg(\mathbf{F})\} && [21] \\ &= \{x \mid \top\} && [1] \end{aligned}$$

2. {2, 25 pt} Dada a premissa $x \notin A$, conclua que $x \notin (A \cap B)$. Justifique cada passo de prova com uma equação ou regra de inferência em anexo. A única **exceção** a esta regra é o uso de comutatividade e associatividade. Ou seja, as equações (10), (11), (12), (13), (73), (74), (75) e (76) podem ser usadas simultaneamente em 1 passo de prova.

Resposta:

$$\begin{aligned} 1. & x \notin A && [\text{Premissa}] \\ 2. & \neg(x \in A) && [46 \text{ em (1)}] \\ 3. & \neg(x \in A) \vee \neg(x \in B) && [41 \text{ em (2)}] \\ 4. & \neg((x \in A) \wedge (x \in B)) && [17 \text{ em (3)}] \\ 5. & \neg(x \in (A \cap B)) && [60 \text{ em (4)}] \\ 6. & x \notin (A \cap B) && [46 \text{ em (5)}] \end{aligned}$$

3. Desenhe o gráfico de:

a) {0, 5 pt} $\lfloor x \rfloor$

Resposta: [http://www.wolframalpha.com/input/?i=floor\(x\)](http://www.wolframalpha.com/input/?i=floor(x))

b) {0, 5 pt} $\lceil \lfloor x \rfloor \rceil$

Resposta: [http://www.wolframalpha.com/input/?i=ceil\(floor\(x\)\)](http://www.wolframalpha.com/input/?i=ceil(floor(x)))

b) {0, 5 pt} $\lfloor 2x \rfloor$

Resposta: [http://www.wolframalpha.com/input/?i=floor\(2x\)](http://www.wolframalpha.com/input/?i=floor(2x))

$$\begin{aligned} \text{T} &\equiv \neg\text{F} & (1) \\ \neg\text{T} &\equiv \text{F} & (2) \\ p \wedge \text{T} &\equiv p & (3) \\ p \vee \text{F} &\equiv p & (4) \\ p \vee \text{T} &\equiv \text{T} & (5) \\ p \wedge \text{F} &\equiv \text{F} & (6) \\ p \vee p &\equiv p & (7) \\ p \wedge p &\equiv p & (8) \\ \neg(\neg p) &\equiv p & (9) \\ p \vee q &\equiv q \vee p & (10) \\ p \wedge q &\equiv q \wedge p & (11) \\ (p \vee q) \vee r &\equiv p \vee (q \vee r) & (12) \\ (p \wedge q) \wedge r &\equiv p \wedge (q \wedge r) & (13) \\ p \vee (q \wedge r) &\equiv (p \vee q) \wedge (p \vee r) & (14) \\ p \wedge (q \vee r) &\equiv (p \wedge q) \vee (p \wedge r) & (15) \\ \neg(p \wedge q) &\equiv \neg p \vee \neg q & (16) \\ \neg(p \vee q) &\equiv \neg p \wedge \neg q & (17) \\ p \vee (p \wedge q) &\equiv p & (18) \\ p \wedge (p \vee q) &\equiv p & (19) \\ p \vee \neg p &\equiv \text{T} & (20) \\ p \wedge \neg p &\equiv \text{F} & (21) \\ p \rightarrow q &\equiv \neg p \vee q & (22) \\ p \rightarrow q &\equiv \neg q \rightarrow \neg p & (23) \\ p \vee q &\equiv \neg p \rightarrow q & (24) \\ p \wedge q &\equiv \neg(p \rightarrow \neg q) & (25) \\ \neg(p \rightarrow q) &\equiv p \wedge \neg q & (26) \\ (p \rightarrow q) \wedge (p \rightarrow r) &\equiv p \rightarrow (q \wedge r) & (27) \\ (p \rightarrow r) \wedge (q \rightarrow r) &\equiv (p \vee q) \rightarrow r & (28) \\ (p \rightarrow q) \vee (p \rightarrow r) &\equiv p \rightarrow (q \vee r) & (29) \\ (p \rightarrow r) \vee (q \rightarrow r) &\equiv (p \wedge q) \rightarrow r & (30) \\ p \leftrightarrow q &\equiv (p \rightarrow q) \wedge (q \rightarrow p) & (31) \\ p \leftrightarrow q &\equiv \neg p \leftrightarrow \neg q & (32) \\ p \leftrightarrow q &\equiv (p \wedge q) \vee (\neg p \wedge \neg q) & (33) \\ \neg(p \leftrightarrow q) &\equiv p \leftrightarrow \neg q & (34) \\ \neg \exists x P(x) &\equiv \forall x \neg P(x) & (35) \\ \neg \forall x P(x) &\equiv \exists x \neg P(x) & (36) \\ \frac{p}{p \rightarrow q} & & (37) \\ \therefore q & & \\ \frac{\neg q}{p \rightarrow q} & & (38) \\ \therefore \neg p & & \\ \frac{p \rightarrow q}{q \rightarrow r} & & (39) \\ \therefore p \rightarrow r & & \\ \frac{p \vee q}{\neg p} & \quad \frac{p \vee q}{\neg q} & (40) \\ \therefore q & \quad \therefore p & \\ \frac{p}{\therefore p \vee q} & \quad \frac{p}{\therefore q \vee p} & (41) \end{aligned}$$

$$\frac{p \wedge q}{\therefore p} \quad \frac{p \wedge q}{\therefore q} \quad (42)$$

$$\frac{p}{q} \quad (43)$$

$$\therefore p \wedge q$$

$$\frac{p \rightarrow q}{\therefore \neg q \rightarrow \neg p} \quad (44)$$

$$\frac{p \vee q}{\neg p \vee r} \quad (45)$$

$$\therefore q \vee r$$

$$a \notin A \equiv \neg(a \in A) \quad (46)$$

$$\{x \mid x \in A\} = A \quad (47)$$

$$P(a) \equiv a \in \{x \mid P(x)\} \quad (48)$$

$$(A = B) \equiv \forall x(x \in A \leftrightarrow x \in B) \quad (49)$$

$$(A \subseteq B) \equiv \forall x(x \in A \rightarrow x \in B) \quad (50)$$

$$(A \subset B) \equiv \forall x(x \in A \rightarrow x \in B) \wedge \exists x(x \in B \wedge x \notin A) \quad (51)$$

$$\emptyset \subseteq S, \text{ para todo } S \quad (52)$$

$$\emptyset = \{x \mid \text{F}\} \quad (53)$$

$$x \in \emptyset \equiv \text{F} \quad (54)$$

$$S \subseteq S, \text{ para todo } S \quad (55)$$

$$(A \times \emptyset) = (\emptyset \times A) = \emptyset \quad (56)$$

$$A \cup B = \{x \mid x \in A \vee x \in B\} \quad (57)$$

$$(x \in A \vee x \in B) \equiv (x \in (A \cup B)) \quad (58)$$

$$A \cap B = \{x \mid (x \in A) \wedge (x \in B)\} \quad (59)$$

$$(x \in A \wedge x \in B) \equiv (x \in (A \cap B)) \quad (60)$$

$$|A \cup B| = |A| + |B| - |A \cap B| \quad (61)$$

$$A - B = \{x \mid x \in A \wedge x \notin B\} \quad (62)$$

$$(x \in A \wedge x \notin B) \equiv (x \in (A - B)) \quad (63)$$

$$\bar{A} = \{x \mid x \notin A\} \quad (64)$$

$$(x \notin A) \equiv (x \in \bar{A}) \quad (65)$$

$$A \cup \emptyset = A \quad (66)$$

$$A \cap U = A \quad (67)$$

$$A \cup U = U \quad (68)$$

$$A \cap \emptyset = \emptyset \quad (69)$$

$$A \cup A = A \quad (70)$$

$$A \cap \bar{A} = \emptyset \quad (71)$$

$$(\bar{A}) = A \quad (72)$$

$$A \cup B = B \cup A \quad (73)$$

$$A \cap B = B \cap A \quad (74)$$

$$A \cup (B \cup C) = (A \cup B) \cup C \quad (75)$$

$$A \cap (B \cap C) = (A \cap B) \cap C \quad (76)$$

$$A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C) \quad (77)$$

$$A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C) \quad (78)$$

$$\overline{A \cup B} = \bar{A} \cap \bar{B} \quad (79)$$

$$\overline{A \cap B} = \bar{A} \cup \bar{B} \quad (80)$$

$$A \cup (A \cap B) = A \quad (81)$$

$$A \cap (A \cup B) = A \quad (82)$$

$$A \cup \bar{A} = U \quad (83)$$

$$A \cap \bar{A} = \emptyset \quad (84)$$