Matemática Discreta

Prova 2 - 2009.2

Prof. Juliano Iyoda

18 de Novembro de 2009

1. $\{1,0\ pt\}$ Defina a função $F(x,y,z)$ como uma *soma de produtos* (forma normal disjuntiva).

x	y	z	F(x,y,z)
0	0	0	1
0	0	1	1
0	1	0	0
0	1	1	0
1	0	0	0
1	0	1	1
1	1	0	0
1	1	1	1

Resposta: $\overline{x}\,\overline{y}\,\overline{z} + \overline{x}\,\overline{y}z + x\,\overline{y}z + xyz$

2. $\{2,0\ pt\}$ Seja $p(n) =$ "$8^n - 2^n$ é divisível por 6". Prove por *indução matemática* que $p(n)$ é verdade para todo inteiro $n \geq 1$.
Caso precise, utilize o Teorema 1: $8^{k+1} - 2^{k+1} = 8(8^k - 2^k) + 8 \cdot 2^k - 2 \cdot 2^k$
Resposta:
Base. $p(1) =$ "*8^1 - 2^1 é divisível por 6*" $=$ "*6 é divisível por 6*"$= \mathsf{T}$.
Passo indutivo.

$8^{k+1} - 2^{k+1}$	
$= 8(8^k - 2^k) + 8 \cdot 2^k - 2 \cdot 2^k$	[*Teorema 1*]
$= 8(8^k - 2^k) + 2^k(8-2)$	[*Aritmética*]
$= 8(8^k - 2^k) + 2^k \cdot 6$	[*Aritmética*]
$= 8 \cdot 6m + 2^k \cdot 6$	[*Hipótese de Indução:* $(8^k - 2^k)$ *é divisível por 6*]
$= 6(8m + 2^k)$	[*Aritmética*]
que é divisível por 6	[*Aritmética*]

3. $\{3,0\ pt\}$ A sequência de Fibonnaci é definida como

$$Fib(0) = 1$$
$$Fib(1) = 1$$
$$Fib(n) = Fib(n-1) + Fib(n-2), \text{ para } n \geq 2.$$

A sequência de Lucas é definida como

$$Luc(1) = 1$$
$$Luc(2) = 3$$
$$Luc(n) = Luc(n-1) + Luc(n-2), \text{ para } n \geq 3.$$

Prove por *indução forte* que $Luc(n) = Fib(n) + Fib(n-2)$, para $n \geq 2$.
Resposta:
Base.

$$\begin{array}{ll}
Luc(2) & \\
= 3 & [Def.\ Luc] \\
= (1+1)+1 & [Aritmética] \\
= (Fib(1)+Fib(0))+Fib(0) & [Def.\ fib] \\
= Fib(2)+Fib(0) & [Def.\ fib]
\end{array}$$

$$\begin{array}{ll}
Luc(3) & \\
= 4 & [Def.\ Luc] \\
= (1+1+1)+1 = & [Aritmética] \\
= (Fib(1)+Fib(0)+Fib(1))+Fib(0) & [Def.\ fib] \\
= (Fib(2)+Fib(1))+Fib(0) & [Def.\ fib] \\
= Fib(3)+Fib(1) & [Def.\ fib]
\end{array}$$

Passo indutivo. Para $k \geq 3$.

$$\begin{array}{ll}
Luc(k+1) & \\
= Luc((k+1)-1)+Luc((k+1)-2) & [Def.\ Luc] \\
= Luc(k)+Luc(k-1) & [Aritmética] \\
= (Fib(k)+Fib(k-2))+Luc(k-1) & [Hip.\ Indução] \\
= (Fib(k)+Fib(k-2)) + (Fib(k-1)+Fib((k-1)-2)) & [Hip.\ Indução] \\
= Fib(k)+Fib(k-2)+Fib(k-1)+Fib(k-3) & [Aritmética] \\
= (Fib(k)+Fib(k-1)) + (Fib(k-2)+Fib(k-3)) & [Aritmética] \\
= Fib(k+1)+Fib(k-1) & [Def.\ Fib] \\
= Fib(k+1)+Fib((k+1)-2) & [Aritmética]
\end{array}$$