Matemática Discreta

Prova 2 - 2010.2

Prof. Juliano Iyoda

10 de Dezembro de 2010

1. Seja o conjunto de strings $A = \{\text{“2”}, \text{“22”}, \text{“222”}, \ldots\}$ definido assim:
   Caso base. “2” $\in A$.
   Caso recursivo. Se $s \in A$, então “2”$+s \in A$.

   Obs$_1$. O símbolo de + acima concatena strings. Exemplo: “2”+“222” = “2222”.
   Obs$_2$. Todos elementos de A são provenientes do passo base e passo recursivo.

   Seja $C(s)$ a função que retorna o *comprimento* do string s.
   Por exemplo, $C(\text{“2”}) = 1$, $C(\text{“22222”}) = 5$, etc.

   Seja $P(s)$ a função que retorna o *produto dos dígitos* do string s.
   Por exemplo, $P(\text{“2”}) = 2$, $P(\text{“222”}) = 2 \cdot 2 \cdot 2 = 8$.

   Queremos provar por indução estrutural que $2^{C(t)} = P(t)$, para todo $t \in A$.

   a) $\{0,5\ pt\}$ Qual o objetivo de prova do caso base?
   Resposta: $2^{C(\text{“2“})} = P(\text{“2“})$

   b) $\{0,5\ pt\}$ Prove o caso base (justifique cada passo de prova com “Def. de C”, “Def. de P” ou “Aritmética”).
   Resposta:

   $$\begin{array}{ll} 2^{C(\text{“2“})} & \\ = 2^1 & [\text{Def. de } C] \\ = 2 & [\text{Aritmética}] \\ = P(\text{“2”}) & [\text{Def. de } P] \end{array}$$

   c) $\{0,5\ pt\}$ Qual o objetivo de prova do passo indutivo?
   Resposta: $C^{(\text{“2“}+s)} = P(\text{“2”}+s)$

   d) $\{0,5\ pt\}$ Qual a hipótese de indução?
   Resposta: $2^{C(s)} = P(s)$

   e) $\{0,5\ pt\}$ Prove o passo indutivo. Justifique cada passo de prova com “Hipótese de Indução” ou com uma das equações abaixo:

   $$\begin{array}{ll} 2^{1+n} = 2 \cdot 2^n & [1] \\ C(\text{“2”}+s) = 1 + C(s) & [2] \\ P(\text{“2”}+s) = 2 \cdot P(s) & [3] \end{array}$$

   Resposta:

   $$\begin{array}{lr} 2^{C(\text{“2“}+s)} & \\ = 2^{1+C(s)} & [2] \\ = 2 \cdot 2^{C(s)} & [1] \\ = 2 \cdot P(s) & [\text{Hipótese de Indução}] \\ = P(\text{“2”}+s) & [3] \end{array}$$

2. $\{2\ pt\}$ Sejam $A = \{1, 2, 3\}$ e $R = \{(1, 2), (2, 1), (1, 3)\}$ uma relação em A. Calcule a matriz $\mathbf{M}_{R^*}$ que representa o fecho transitivo de R.
Resposta:

$$\mathbf{M}_R = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

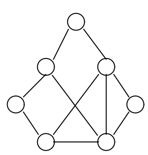
$$\mathbf{M}_{R \circ R} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \odot \begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{M}_{(R \circ R) \circ R} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \odot \begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

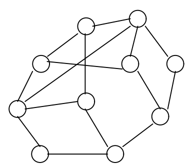
$$\mathbf{M}_{R^*} = \mathbf{M}_R \vee \mathbf{M}_{R \circ R} \vee \mathbf{M}_{(R \circ R) \circ R} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

3. Utilize o teorema das cores e defina se os grafos abaixo são bipartidos ou não (exiba os desenhos pintados).

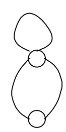
a) $\{0, 5\ pt\}$



b) $\{0, 5\ pt\}$



c) $\{0, 5\ pt\}$



d) $\{0, 5\ pt\}$

Q_3 (hipercubo de 3 dimensões)

Resposta: a) Não bipartido b) Bipartido c) Não bipartido d) Bipartido