

Matemática Discreta

Prova 2 - 2011.1

Engenharia da Computação

Prof. Juliano Iyoda

30 de Junho de 2011

1. Seja o conjunto de strings contendo programas de computador:

$$A = \{“x = 2 ;”, “x = 2 ; x = x + 2 ;”, “x = 2 ; x = x + 2 ; x = x + 2 ;”, \dots\}$$

Note que os programas têm apenas atribuições. A definição formal é:

Caso base. “ $x = 2 ;$ ” $\in A$.

Passo recursivo. Se $s \in A$, então $(s + “x = x + 2 ;”) \in A$.

Obs₁. O símbolo de + acima concatena strings. Exemplo: “a” + “bcd” = “abcd”.

Obs₂. Todos elementos de A são provenientes do passo base e passo recursivo.

Seja $EXEC(s)$ a função que retorna o *valor de x ao término* da execução do programa s .

Por exemplo, $EXEC(“x = 2 ;”) = 2$, $EXEC(“x = 2 ; x = x + 2 ;”) = 4$, etc.

Seja $ATR(s)$ a função que retorna o *número de atribuições* contidos em s .

Por exemplo, $ATR(“x = 2 ;”) = 1$, $ATR(“x = 2 ; x = x + 2 ;”) = 2$.

Queremos provar por indução estrutural que $EXEC(s) = 2 \cdot ATR(s)$, para todo $s \in A$.

- a) {0,5 pt} Qual o objetivo de prova do caso base?

Resposta: $EXEC(“x = 2 ;”) = 2 \cdot ATR(“x = 2 ;”)$

- b) {1,0 pt} Prove o caso base (justifique cada passo de prova com “Def. de $EXEC$ ”, “Def. de ATR ” ou “Aritmética”).

Resposta:

$$\begin{aligned} EXEC(“x = 2 ;”) & \\ &= 2 && \text{[Def. de } EXEC\text{]} \\ &= 2 \cdot 1 && \text{[Aritmética]} \\ &= 2 \cdot ATR(“x = 2 ;”) && \text{[Def. de } ATR\text{]} \end{aligned}$$

- c) {0,5 pt} Qual o objetivo de prova do passo indutivo?

Resposta: $EXEC(s + “x = x + 2 ;”) = 2 \cdot ATR(s + “x = x + 2 ;”)$

- d) {0,5 pt} Qual a hipótese de indução?

Resposta: $EXEC(s) = 2 \cdot ATR(s)$

- e) {1,0 pt} Prove o passo indutivo. Justifique cada passo de prova com “Aritmética”, “Definição de $EXEC$ ”, “Definição de ATR ”, “Hipótese de Indução” ou com as equações [1] ou [2] abaixo:

$$\begin{aligned} EXEC(s + “x = x + 2 ;”) &= 2 + EXEC(s) && [1] \\ ATR(s + “x = x + 2 ;”) &= 1 + ATR(s) && [2] \end{aligned}$$

Resposta:

$$\begin{aligned} & EXEC(s + "x = x + 2 ;") \\ &= 2 + EXEC(s) && [1] \\ &= 2 + 2 \cdot ATR(s) && [\text{Hipótese de Indução}] \\ &= 2(1 + ATR(s)) && [\text{Aritmética}] \\ &= 2(ATR(s + "x = x + 2 ;")) && [2] \end{aligned}$$

2. A empresa Golaço oferece voos (Recife, Aracaju), (Aracaju, João Pessoa) e (João Pessoa, Recife).

a) {2,0 pt} Calcule o fecho transitivo desta relação usando matrizes. Exiba seus cálculos. Faça uma matriz com linha e coluna representando Recife, Aracaju e João Pessoa (nesta ordem).

Resposta: Assumindo linha e coluna na ordem Recife, Aracaju e João Pessoa.

$$\mathbf{M}_R = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{M}_{R \circ R} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} \odot \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{M}_{(R \circ R) \circ R} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \odot \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{M}_{R^*} = \mathbf{M}_R \vee \mathbf{M}_{R \circ R} \vee \mathbf{M}_{(R \circ R) \circ R} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

b) {0,5 pt} Baseado na matriz do fecho transitivo, liste os pares de voos possíveis com a Golaço (incluindo voos com escalas).

Resposta: (Recife, Recife), (Recife, Aracaju), (Recife, João Pessoa), (Aracaju, Recife), (Aracaju, Aracaju), (Aracaju, João Pessoa), (João Pessoa, Recife), (João Pessoa, Aracaju), (João Pessoa, João Pessoa),