Matemática Discreta

Prova 2 - 2011.1

Sistemas de Informação
Prof. Juliano Iyoda

01 de Julho de 2011

1. Seja o conjunto de strings de bits $A = \{$"0","1","01","10",$\ldots\}$ definido assim:
   Passo base 1. "0" $\in A$.
   Passo base 2. "1" $\in A$.
   Passo recursivo. Se $s \in A$ e $t \in A$, então $s + t \in A$.

   Obs_1. O símbolo de + acima concatena strings. Exemplo: "ab"+"cd" = "abcd".
   Obs_2. Todos elementos de A são provenientes dos passos base e passo recursivo.

   Seja $UNS(s)$ a função que retorna a *quantidade de bits 1* do string s.
   Por exemplo, $UNS(\text{“0”}) = 0$, $UNS(\text{“1”}) = 1$, $UNS(\text{“010”}) = 1$, etc.

   Seja $S(s)$ a função que retorna a *soma dos bits* do string s.
   Por exemplo, $S(\text{“0”}) = 0$, $S(\text{“1”}) = 1$, $S(\text{“0101”}) = 2$, $S(\text{“0101011”}) = 4$, etc.

   Queremos provar por indução estrutural que $UNS(t) = S(t)$, para todo $t \in A$.

   a) $\{0,5\ pt\}$ Quais os objetivos de prova dos casos base?
   Resposta: $(UNS(\text{“0”}) = S(\text{“0”}))$ e $(UNS(\text{“1”}) = S(\text{“1”}))$

   b) $\{1,0\ pt\}$ Prove os casos base (justifique cada passo de prova com "Def. de *UNS*", "Def. de *S*" ou "Aritmética").
   Resposta:

   $$\begin{aligned}
   & UNS(\text{“0”}) \\
   & = 0 \qquad [\text{Def. de } UNS] \\
   & = S(\text{“0”}) \qquad [\text{Def. de } S]
   \end{aligned}$$

   $$\begin{aligned}
   & UNS(\text{“1”}) \\
   & = 1 \qquad [\text{Def. de } UNS] \\
   & = S(\text{“1”}) \qquad [\text{Def. de } S]
   \end{aligned}$$

   c) $\{0,5\ pt\}$ Qual o objetivo de prova do passo indutivo?
   Resposta: $UNS(s + t) = S(s + t)$

   d) $\{0,5\ pt\}$ Quais as hipóteses de indução?
   Resposta: $(UNS(s) = S(s))$ e $(UNS(t) = S(t))$

   e) $\{1,0\ pt\}$ Prove o passo indutivo. Justifique cada passo de prova com "Hipótese de Indução" ou com uma das equações abaixo:

   $$UNS(s + t) = UNS(s) + UNS(t) \qquad [1]$$
   $$S(s + t) = S(s) + S(t) \qquad [2]$$

Resposta:

$$\begin{array}{lr} UNS(s+t) & \\ = UNS(s) + UNS(t) & [1] \\ = S(s) + S(t) & \text{[Hipótese de Indução]} \\ = S(s+t) & [2] \end{array}$$

2. Seja $PESSOAS = \{João, Maria, Raimundo, Teresa\}$.

a)$\{0,5\ pt\}$ Liste os pares da relação $R = \{(a, b) \mid a\ amava\ b\}$ em $PESSOAS$ baseado no texto de Drummond: "João amava Teresa que amava Raimundo que amava Maria."
Resposta:

$$R = \{(João, Teresa), (Teresa, Raimundo), (Raimundo, Maria)\}$$

b)$\{0,5\ pt\}$ A relação R é transitiva? Justifique sua resposta.
Resposta: A relação não é transitiva. Justificativa: João amava Teresa e Teresa amava Raimundo, mas João não amava Raimundo.

c)$\{1,0\ pt\}$ Utilize matrizes para calcular o fecho transitivo. Faça uma matriz com linha e coluna representando João, Maria, Raimundo e Teresa (nesta ordem).
Resposta:

$$\mathbf{M}_R = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{M}_{R \circ R} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \odot \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{M}_{(R \circ R) \circ R} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} \odot \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{M}_{((R \circ R) \circ R) \circ R} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \odot \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{M}_{R^*} = \mathbf{M}_R \vee \mathbf{M}_{R \circ R} \vee \mathbf{M}_{(R \circ R) \circ R} \vee \mathbf{M}_{((R \circ R) \circ R) \circ R} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

d)$\{0,5\ pt\}$ Liste os pares que compõem o fecho transitivo.

Resposta:

$$\begin{aligned} R^* = \ & \{(João, Maria), \\ & (João, Raimundo), \\ & (João, Teresa), \\ & (Raimundo, Maria), \\ & (Teresa, Maria), \\ & (Teresa, Raimundo)\} \end{aligned}$$