1. Verifique se cada um dos seguintes subconjuntos é subespaço vetorial:

A) $U \subseteq M_{2\times 2}$ definido por: $U = \{A \in M_{2\times 2} \mid A\ é\ Matriz\ Triangular\ Superior\}$

Seja A ∈ U, A = $\begin{pmatrix} a & b \\ 0 & c \end{pmatrix}$ e B ∈ U, B = $\begin{pmatrix} a' & b' \\ 0 & c' \end{pmatrix}$.
Logo, a,b e c não podem ser iguais de zero simultaneamente e a',b' e c' não podem ser iguais de zero simultaneamente.

SOMA: A + B = $\begin{pmatrix} a+a' & b+b' \\ 0 & c+c' \end{pmatrix}$

Como abaixo da diagonal principal os elementos são nulos (definição de uma matriz triangular superior), A + B ∈ U.

PRODUTO:

kA = $\begin{pmatrix} ka & kb \\ 0 & kc \end{pmatrix}$
Como abaixo da diagonal principal os elementos são nulos (definição de uma matriz triangular superior), kA ∈ U.

Logo, U é um subespaço vetorial.

B) $W \subseteq M_{2\times 2}$ definido por: $W = \{A \in M_{2\times 2} \mid A\ é\ Matriz\ Triangular\}$

Seja A ∈ W, A = $\begin{pmatrix} a & b \\ 0 & c \end{pmatrix}$ e B ∈ W, B = $\begin{pmatrix} a' & 0 \\ b' & c' \end{pmatrix}$.
Logo, a,b e c não podem ser iguais de zero simultaneamente e a',b' e c' não podem ser iguais de zero simultaneamente.

SOMA: A + B = $\begin{pmatrix} a+a' & b \\ b' & c+c' \end{pmatrix}$

Se b ≠ 0 e b' ≠ 0; a matriz A + B não é uma matriz triangular superior. Como existe essa restrição. A + B ∉ W, portanto W não é subespaço vetorial.

- Outra maneira de provar é com um contra exemplo!

C) $N \subseteq IR^n$ definido por: $N = \{v \in IR^n \mid a\ soma\ de\ duas\ coordenadas\ de\ v\ dá\ zero\}$

Seja A ∈ N, A = (x1,x2,x3,...,xn) e B ∈ N, B = (y1,y2,y3,...,yn).

Supondo: x1 + x2 = 0; e y2 + y3 = 0;

SOMA: A + B = (x1+y1, x2+y2, x3+y3,..., xn+yn)

1ª comparação: x1+y1+x2+y2 = 0 + y1 + y2 que não necessariamente é 0;
2ª comparação: x2+y2+x3+y3 = 0 + x2 + x3 que não necessariamente é 0;

A+B pode não possuir pares de coordenadas cuja soma seja nula.

Como existe essa restrição. A + B $\notin$ N, portanto N não é subespaço vetorial.

- Outra maneira de provar é com um contra exemplo!

D) $S \subseteq IR^4$ definido por: $S = \{(x, y, z, w) \in IR^4 \mid x = y \; e \; z = w\}$

Seja A $\in$ U, A = (x,y,z,w) e B $\in$ U, B = (x',y',z',w').

x = y; z = w; x' = y'; z' = w';

SOMA: A + B = (x+x', y+y', z+z', w+w')

1ª comparação: x+x' = y + y' → 0 = 0
2ª comparação: z+z' = w + w' → 0 = 0

PRODUTO:

Seja k $\in$ Z.

kA = (kx,ky,kz,kw)

Análise:

kx = ky e kz = kw, como x = y e z = w, kx = ky e kz = kw. kA $\in$ S.

Logo, S é um subespaço vetorial.

2. Considere os seguintes subespaços de IR^4:

$S = \{(x, y, z, w) \in IR^4 \mid x + y + w = 0 \; e \; 2x - z - w = 0\}$ e

$R = \{(x, y, z, w) \in IR^4 \mid x - 2y + 2z = 0 \; e \; 2x + z + w = 0 \; e \; y - 2z + w = 0\}$

Descreva $S+R$ na forma de conjunto-solução de sistema homogêneo.

$$\begin{cases} x + y + w = 0 \\ 2x - z - w = 0 \end{cases}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 1 \\ 2 & 0 & -1 & -1 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & -2 & -1 & -3 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1/2 & 3/2 \end{pmatrix} \rightarrow$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & -1/2 & -1/2 \\ 0 & 1 & 1/2 & 3/2 \end{pmatrix}$$

$$S = \begin{cases} x = s/2 + t/2 = (s + t)/2 \quad \rightarrow s(1/2, -1/2, 1, 0) + t(1/2, -3/2, 0, 1) \\ y = (-3t - s)/2 \\ z = s \\ w = t \end{cases}$$

$$\begin{cases} x + -2y + 2z = 0 \\ 2x + z + w = 0 \\ y - 2z + w = 0 \end{cases}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & -2 & 2 & 0 \\ 2 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & -2 & 1 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 1 & -2 & 2 & 0 \\ 0 & 4 & -3 & 1 \\ 0 & 1 & -2 & 1 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 1 & -2 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 5 & -3 \\ 0 & 1 & -2 & 1 \end{pmatrix} \rightarrow$$

$$\begin{pmatrix} 1 & -2 & 0 & 6/5 \\ 0 & 1 & 0 & -1/5 \\ 0 & 0 & 1 & -3/5 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 4/5 \\ 0 & 1 & 0 & -1/5 \\ 0 & 0 & 1 & -3/5 \end{pmatrix}$$

$$R = \begin{cases} x = -4b/5 \quad \rightarrow \quad b(-4b/5, b/5, 3b/5, b) \\ y = b/5 \\ z = 3b/5 \\ w = b \end{cases}$$

$(x,y,z,w) = s(1/2, -1/2, 1, 0) + t(1/2, -3/2, 0, 1) + b(-4/5, 1/5, 3/5, 1)$

$$\begin{pmatrix} 1/2 & 1/2 & -4/5 & x \\ -1/2 & -3/2 & 1/5 & y \\ 1 & 0 & 3/5 & z \\ 0 & 1 & 1 & w \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 1 & -8/5 & 2x \\ 0 & -1 & -3/5 & x + y \\ 0 & 1 & -11/5 & -z + 2x \\ 0 & 1 & 1 & w \end{pmatrix} \rightarrow$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & -8/5 & 2x \\ 0 & -1 & -3/5 & x+y \\ 0 & 0 & -14/5 & -z+y+3x \\ 0 & 0 & 2/5 & w+x+y \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 1 & -8/5 & 2x \\ 0 & 1 & 3/5 & -x-y \\ 0 & 0 & -14/5 & -z+y+3x \\ 0 & 0 & 2/5 & w+x+y \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 2+x+y+\frac{3(w+x+y)}{2}+\ 25/16(w+x+y) \\ 0 & 1 & 0 & -x-y-3(w+x+y)/2 \\ \boxed{0 \quad 0 \quad 0 \quad -z+8y+10x+7w} \\ 0 & 0 & 1 & 5/2(w+x+y) \end{pmatrix}$$

Sistema homogêneo: $-z+8y+10x+7w\ =\ 0$.