

Redes de Funções de Base Radial

Radial Basis Functions (RBFs)

Germano C. Vasconcelos
Centro de Informática - UFPE

Introdução

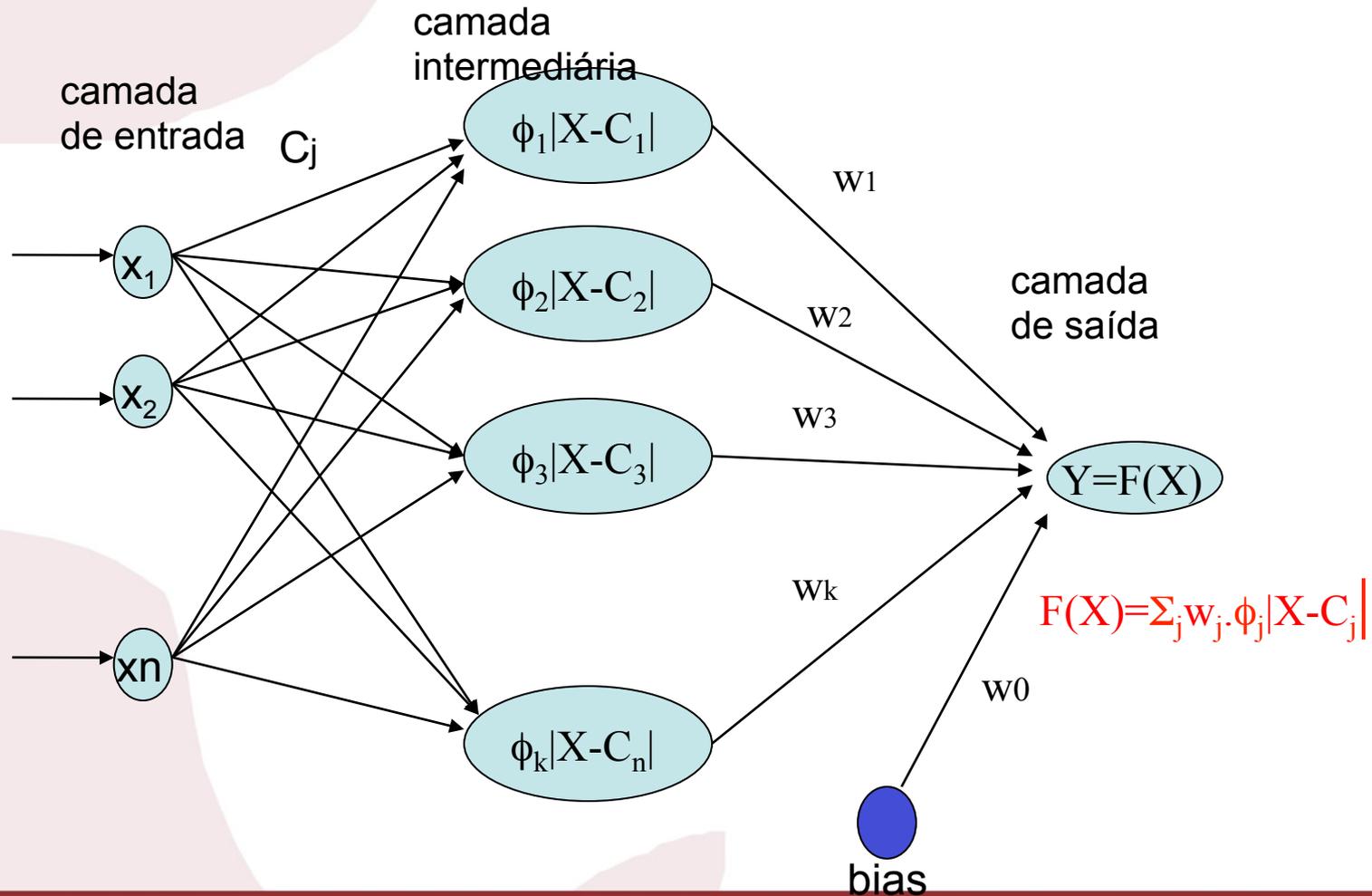


“Em uma RBF, a rede é definida do ponto de vista de um problema de aproximação de funções”

Uma superfície F no espaço multidimensional é definida como uma combinação linear de funções de base radial

$F \Rightarrow$ comb. linear de funções de base radial

Estrutura de uma RBF



Características das RBFs



- Rede feedforward que “pode” ser treinada de forma supervisionada e não-supervisionada
- Normalmente uma camada de neurônios que computam funções de base radial
- Os pesos na camada intermediária representam centroids
- Os pesos na camada de saída ponderam as saídas da camada intermediária



Características das RBFs



- São aproximadores universais de funções
- Estimam a probabilidade a posteriori do ponto de vista Bayesiano
- Apresentam requerimentos de memória em geral mais altos que redes do tipo MLP



Características das RBFs

- Estratégias de treinamento diferentes para as funções radiais, os centroids e os pesos da camada de saída
- Regra de propagação = função radial
Ex: Distância Euclideana $\Rightarrow net_j = |X-C| = \sqrt{\sum (x_i - c_i)^2}$
- Função de ativação = função local
Ex: Gaussiana $\Rightarrow o_j = f(net_j) = \exp(- net_j^2/d_j^2)$

Trabalhos com RBFs



- Broomhead & Lowe (1988)
- Moody & Darken (1989)
- Poggio & Girosi (1990)
- Niranjan & Fallside (1990)

E muitos outros ...



Treinamento



- Três conjuntos de parâmetros a serem estimados
- As larguras d das funções básicas
- Os centros C_j
- Os pesos W_{ji} da camada de saída



As Larguras d



- Valor **definido a priori**
- Técnica de **gradiente descendente**
- Heurística dos **K-vizinhos mais próximos (KNN)**



Definição de σ com KNN

$$\sigma_i = \sqrt{\frac{1}{K} \sum_{k=1}^K \|\vec{c}_k - \vec{c}_i\|^2}$$

k -th vizinho mais próximo de c_i

- Cobertura dos exemplos de treinamento através de uma representação suave

Os Centros C_j



- Distribuir uniformemente ou aleatoriamente
- Tomar uma amostra do conjunto de treinamento
- Método **não supervisionado** de agrupamento (clustering)
- **Gradiente descendente**



Método Não-supervisionado - Algoritmo K-Médias (K-means clustering)

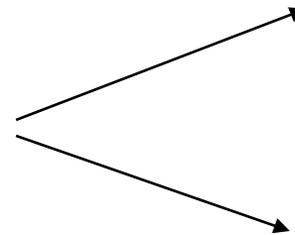


- Particiona o espaço de padrões em K grupos
- K vetores de entrada são escolhidos aleatoriamente como centros de K grupos de padrões
- Outros vetores de treinamento são atribuídos ao grupo com o centro mais próximo (distância Euclideana, por exemplo)
- Centros são recalculados como o vetor médio do grupo (média dos vetores do grupo)
- Vetores de treinamento são novamente apresentados e atribuídos aos centros mais próximos
- Processo é repetido até não ocorrer mais alterações na modificação dos centros

Pesos W_{ji} na Camada de Saída

- Processo de otimização linear
- Solução de mínimo global

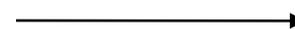
Esquema de Correção de Erros



Mínimo Erro Quadrado (LMS)

Newton-like Method

Procedimento direto



Manipulação de matrizes

Treinamento por Gradiente Descendente

$$e_j = d_j - F(X)$$
$$= d_j - \sum w_i \cdot \phi(\|x_i - c_i\|_{c_i})$$

1. Camada de saída

$$\partial E(n) / \partial W_i(n) = \sum e_j(n) \cdot \phi(\|x_i - c_i(n)\|_{c_i})$$

$$W_i(n+1) = W_i(n) - \eta_1 \partial E(n) / \partial W_i(n) \quad i=1,2,\dots,M$$

Treinamento por Gradiente Descendente

2. Centros

$$\partial E(n) / \partial \mathbf{C}_i(n) = 2 \sum_j W_j \mathbf{\Sigma} e_j(n) \cdot \phi'(\|\mathbf{x}_j - \mathbf{c}_j(n)\|_{\mathbf{C}_i}) \mathbf{\Sigma}^{-1} [\mathbf{x}_j - \mathbf{c}_j(n)]$$

$$\mathbf{C}_i(n+1) = \mathbf{C}_i(n) - \eta_2 \partial E(n) / \partial \mathbf{C}_i(n) \quad i=1,2,\dots,M$$

Treinamento por Gradiente Descendente

3. Larguras das funções

$$\partial E(n) / \partial \Sigma^{-1}_i(n) = -W_i \Sigma e_j(n) \cdot \phi' (\|x_j - t_j(n)\|_{ci}) Q_{ji}(n)$$

$$Q_{ji}(n) = [x_j - t_i(n)] [x_j - t_i(n)]^T$$

$${}_{ci}\Sigma^{-1}_i(n+1) = \Sigma^{-1}_i(n) - \eta_3 \partial E(n) / \partial \Sigma^{-1}_i(n) \quad i=1,2,\dots,M$$

Manipulação de Matrizes (Pseudo-inverse method)



$$E[f] = \sum_p^n (y_p - f(x_p))^2$$

$$f(x_p) = \sum w_j \cdot \phi(|x_p - c_j|)$$

$$W = (G^T \cdot G + \lambda G_o)^{-1} \cdot G^T \cdot Y$$

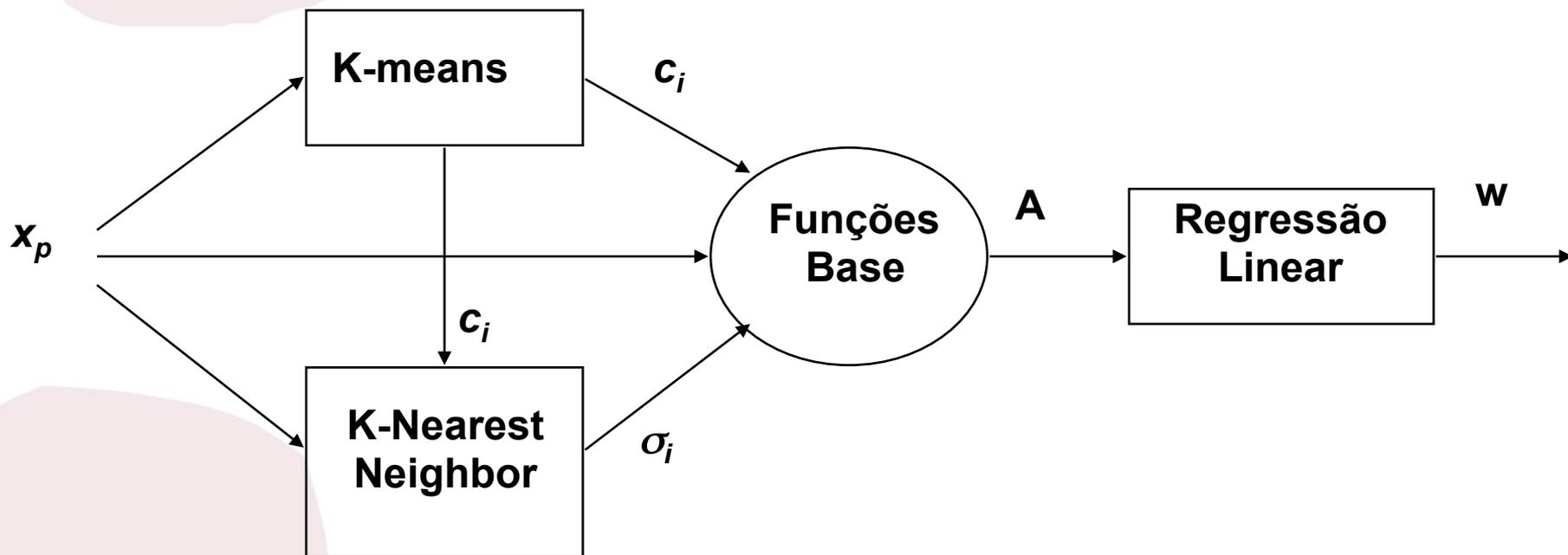
onde...



$$G = \begin{pmatrix} \phi(|x_1 - c_1|) & \phi(|x_1 - c_2|) & \dots & \phi(|x_1 - c_k|) \\ \phi(|x_2 - c_1|) & \phi(|x_2 - c_2|) & \dots & \phi(|x_2 - c_k|) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \phi(|x_p - c_1|) & \phi(|x_p - c_2|) & \dots & \phi(|x_p - c_k|) \end{pmatrix}$$

$$G_o = \begin{pmatrix} \phi(|c_1 - c_1|) & \phi(|c_1 - c_2|) & \dots & \phi(|c_1 - c_k|) \\ \phi(|c_2 - c_1|) & \phi(|c_2 - c_2|) & \dots & \phi(|c_2 - c_k|) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \phi(|c_p - c_1|) & \phi(|c_p - c_2|) & \dots & \phi(|c_p - c_k|) \end{pmatrix}$$

Uma Opção de Treinamento

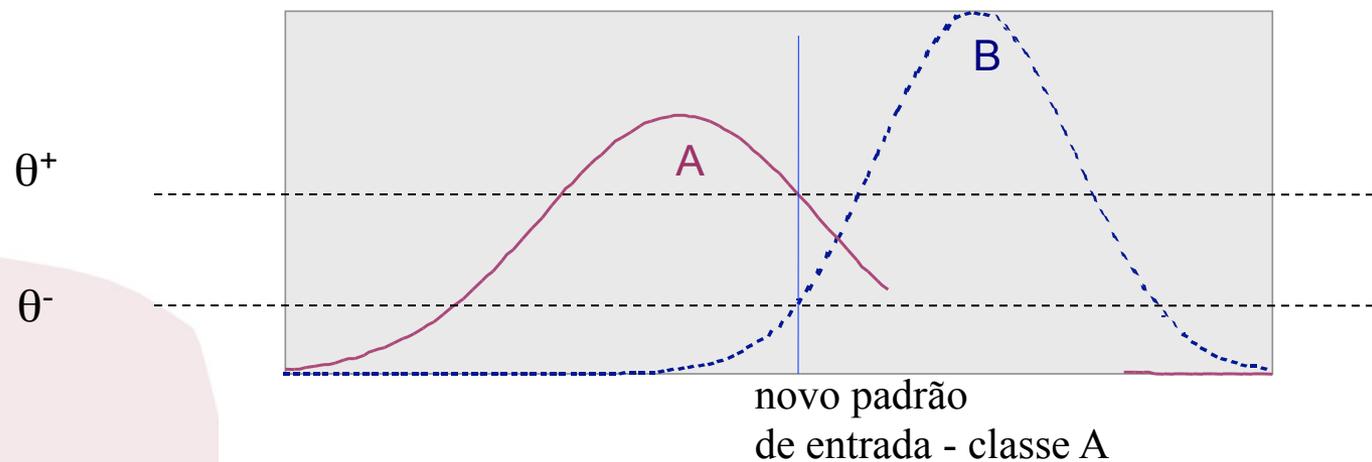


RBFs Construtivas



- Um conjunto de modelos RBFs tem sido desenvolvido dentro do paradigma construtivo...
- DDA (Dynamic Decay Adjustment)
 - Berthold & Diamond (1995)

Princípio de Funcionamento do Algoritmo DDA



Ver Berthold & Diamond - NIPS' 7

Funcionamento do Algoritmo DDA

Ver Berthold & Diamond - NIPS' 7

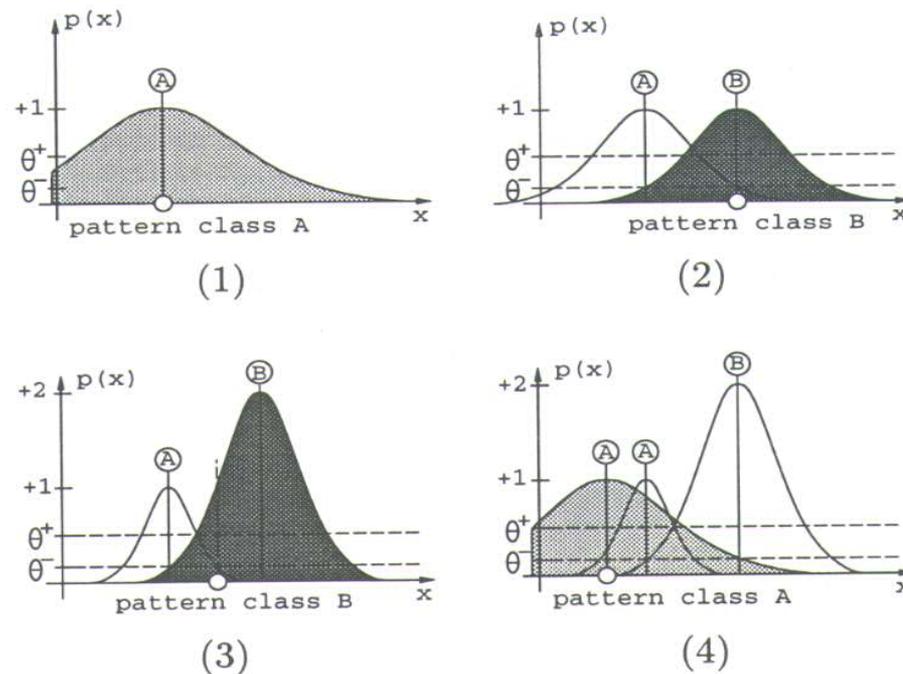


Figure 3: An example of the DDA-algorithm: (1) a pattern of class A is encountered and a new RBF is created; (2) a training pattern of class B leads to a new prototype for class B and shrinks the radius of the existing RBF of class A; (3) another pattern of class B is classified correctly and shrinks again the prototype of class A; (4) a new pattern of class A introduces another prototype of that class.

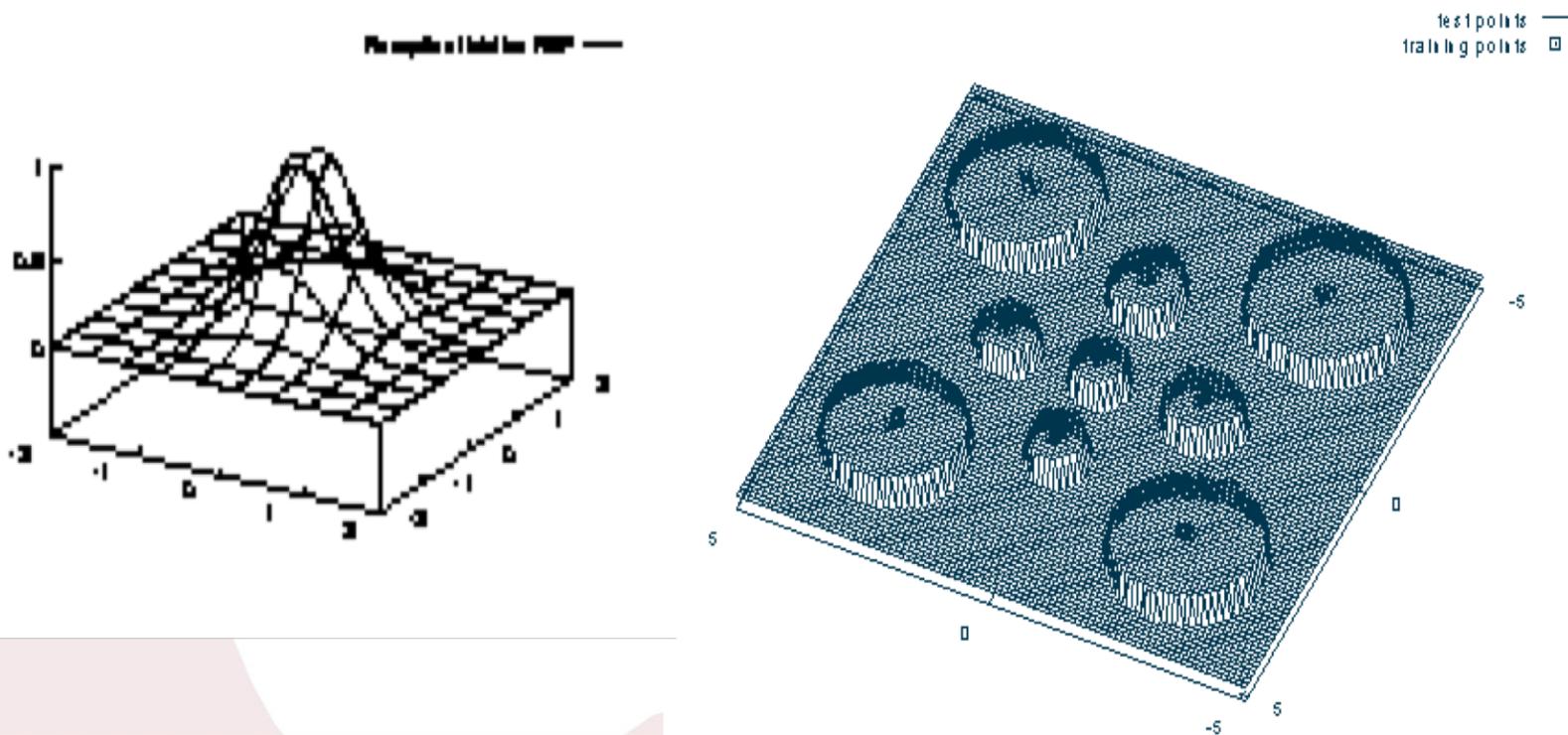
Aplicações



- Reconhecimento de voz
- Diagnose médica
- Reconhecimento de caracteres
- Mineração de dados e textos
- Reconhecimento de alvos
- Classificação de fonemas
- Análise de crédito
- Previsão e controle

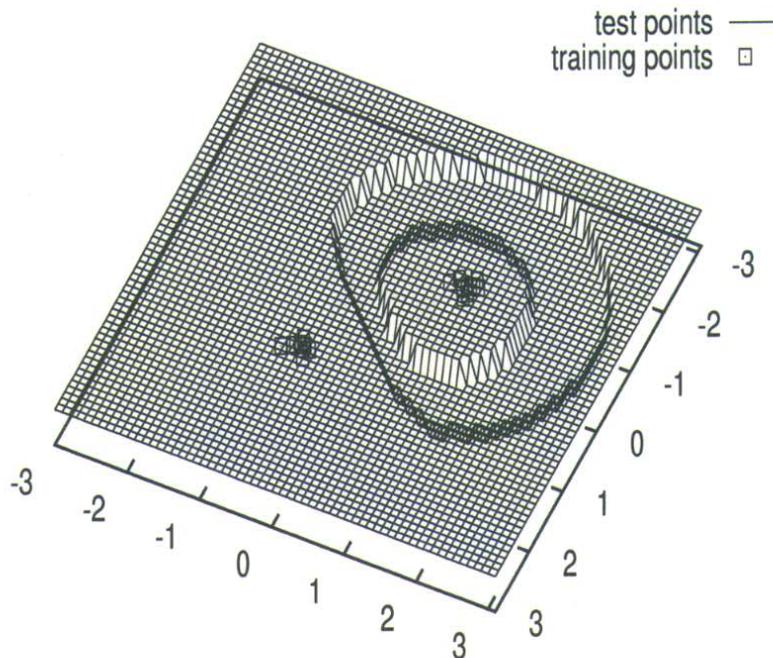


Superfícies de Decisão



Problema Potencial

Considere a figura abaixo:



Mostre que é possível para uma RBF com duas entradas, duas unidades intermediárias e duas saídas definir superfícies de decisão como as mostradas. Uma superfície fechada é definida para uma das classes; para a outra classe a superfície é aberta.