Conjuntos

George Darmiton da Cunha Cavalcanti
CIn - UFPE

Introdução

- Conjunto
  - Coleção de objetos não ordenada.

- Os objetos de um conjunto são chamados de elementos ou membros do conjunto.

- Diz-se que um conjunto A contém seus elementos.

$\in$ e $\notin$

- $\in$ (Pertence)
  - Escreve-se $a \in A$ para denotar que a e um elemento de A;
- $\notin$ (Não pertence)
  - E $a \notin A$ para denotar que a não e um elemento de A.

Descrevendo Conjuntos

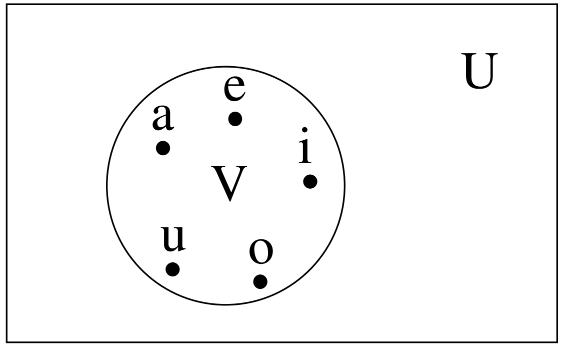
- Existem várias maneiras de se descrever um conjunto:
  - Listando seus elementos:
    - $V = \{a, e, i, o, u\}$
  - Definindo uma propriedade:
    - $V = (x \mid x$ é vogal$\}$
  - Definição recursiva:

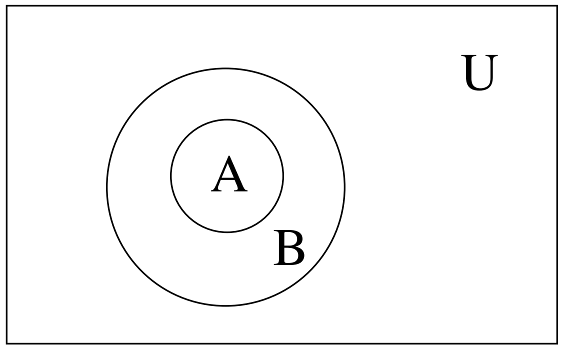
    a) $2 \in A$

    b) Se $x \in A$ então $(x + 2) \in A$

Descrevendo Conjuntos

- Diagrama de Venn (John Venn (1881)):
  - Um conjunto U, universo, que contém todos os objetos sob consideração: retângulo;
  - Dentro do retângulo: círculos (ou outras figuras geométricas) que representam conjuntos;
  - Pontos são usados para representar elementos particulares dos conjuntos.





Conjuntos conhecidos

- $N = \{0, 1, 2, 3, ...\}$
  - o conjunto dos números naturais
- $Z = \{..., -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3, ...\}$
  - O conjuntos dos números inteiros
- $Z^+ = \{1, 2, 3, ...\}$
  - O conjuntos dos números inteiros positivos
- $Q = \{p/q \mid p \in Z, q \in Z, q \neq 0\}$
  - O conjuntos dos números racionais
- R, o conjuntos dos números reais

Exemplos

$$2 \in \mathbb{N},\ 2 \in \mathbb{Z},\ 2 \in \mathbb{Q},\ 2 \in \mathbb{R};$$

$$-2 \notin \mathbb{N},\ -2 \in \mathbb{Z},\ -2 \in \mathbb{Q},\ -2 \in \mathbb{R};$$

$$\frac{1}{3} \notin \mathbb{N},\ \frac{1}{3} \notin \mathbb{Z},\ \frac{1}{3} \in \mathbb{Q},\ \frac{1}{3} \in \mathbb{R};$$

$$\sqrt{3} \notin \mathbb{N},\ \sqrt{3} \notin \mathbb{Z},\ \sqrt{3} \notin \mathbb{Q},\ \sqrt{3} \in \mathbb{R};$$

Mais Exemplos

$A = \{-2,\ \frac{1}{3},\ \sqrt{3},\ 2\};$

$\{2n :\ n \in \mathbb{N}\}$-conjunto dos números naturais pares;

$\{2n-1 :\ n \in \mathbb{N}\}$-conjunto dos números naturais ímpares;

$\{n \in \mathbb{N} :\ 5 \leq n < 21\};$ $\{\emptyset\};$

$\{\{2\},\ \{1,\ 2\},\ \emptyset\};$ $\{x \in \mathbb{R} :\ x^2 - 3x + 2 = 0\};$

Igualdade entre Conjuntos

- Diz-se que dois conjuntos são iguais se e somente se eles contém os mesmos elementos.

- Exemplo:
  - $\{a,b,c\} = \{c,b,a\} = \{a ,a, a, b, b, c, c, c, c\}$

Subconjunto

- Um conjunto A e subconjunto de B se e somente se todo elemento de A for também elemento de B.

- A notação $A \subseteq B$ e usada para denotar que A é subconjunto de B.

Subconjunto

- $A \subseteq B$: $\forall x(x \in A \rightarrow x \in B)$
- $\emptyset \subseteq A$, qualquer que seja A
- $A \subseteq A$, qualquer que seja A
- Se $A \subseteq B$ e $B \subseteq A$ então $A=B$

- Subconjunto Próprio
  - Se $A \neq B$ e A é subconjunto de B então $A \subset B$

Exemplos

$A = \{1, 2\}$

$B = \{x \in R \mid x^2 - 3x + 2 = 0\}$

Então $A = B$

$A = \{1, 2\}$

$C = \{x \in N \mid x \text{ é divisor de } 12\}$

Então $A \subset C$

Conjunto das Partes

- Dado um conjunto S, o conjunto das partes de S e o conjunto de todos os subconjuntos de S.

- O conjunto das partes de S é denotado por P(S).

- Se um conjunto S possui n elementos então o seu conjunto das partes possui 2^n elementos.

Conjunto das Partes: exemplo

$A = \{1, 2, 3\}$

$P(A) = P(\{1,2,3\})$

$P(\{1,2,3\}) =$

$\{\varnothing,\{1\},\{2\}, \{3\}, \{1,2\}, \{1,3\}, \{2,3\}, \{1,2,3\}\}$

n-tuplas ordenadas

- A ordem dos elementos em uma coleção é freqüentemente importante.
- Sabendo que conjuntos não possuem ordem, uma estrutura diferente é necessária.
- Isso é conseguido por n-tuplas ordenadas

n-tupla ordenada

- n-tupla ordenada
  – A n-tupla ordenada $(a_1, a_2, ..., a_n)$ é a coleção ordenada que possui a_1 como primeiro elemento, a_2 como segundo elemento, ..., e a_n como n-ésimo elemento.

- 2-tuplas são chamadas de pares ordenados;

- $(a, b) \neq (b, a)$, a menos que *a* seja igual a *b*.

- n-tuplas ordenadas são iguais:
  – $(a_1, a_2, ..., a_n) = (b_1, b_2, ..., b_n)$ quando $a_i = b_i$, $i=1,2,3,...,n$.

Produto Cartesiano

- Sejam A e B conjuntos arbitrários, o produto cartesiano de A e B, denotado por $A \times B$, é o conjunto de todos os pares ordenados a, b, sabendo que $a \in A$ e $b \in B$.

- $A \times B = \{(a,b) \mid a \in A \text{ e } b \in B\}$

- $A \times B = B \times A$?

Produto Cartesiano

- Produto cartesiano com mais de 2 conjuntos.

- O Produto cartesiano dos conjuntos A_1, A_2, ..., A_n denotado por $A_1 \times A_2 \times \ldots \times A_n$, é o conjunto das n-tuplas ordenadas $(a_1, a_2, \ldots, a_n)$ sabendo que $a_i \in A_i$ para $i = 1, 2, 3, \ldots, n$.

Operações com Conjuntos

- União
  - Sejam A e B dois conjuntos arbitrários. A união dos conjuntos A e B, denotada por $A \cup B$, é o conjunto que contém aqueles elementos que estão ou em A ou em B, ou em ambos.
  - $A \cup B = \{x \mid x \in A \text{ ou } x \in B\}$

Operações com Conjuntos

- Interseção
  - Sejam A e B dois conjuntos arbitrários. A interseção dos conjuntos A e B, denotada por $A \cap B$, é o conjunto que contém aqueles elementos que estão em A e em B ao mesmo tempo.

  - $A \cap B = \{x \mid x \in A \text{ e } x \in B\}$

Operações com Conjuntos

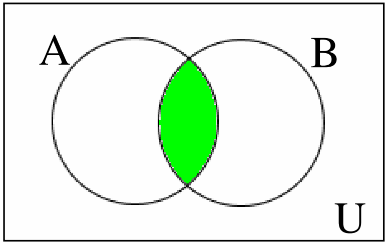
- Diferença
  – Sejam A e B dois conjuntos arbitrários. A diferença entre A e B, denotada por A–B, é o conjunto que contém aqueles elementos que estão em A mas não estão em B.
  – A diferença de A e B também é chamada de complemento de B em relação a A.

  – $A-B = \{x \mid x \in A \text{ e } x \notin B\}$

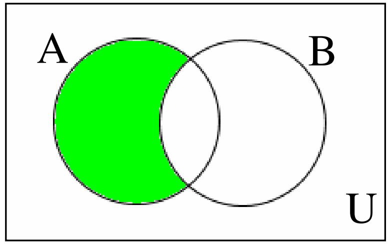
Operações com Conjuntos

- Complemento
  - Seja U o conjunto universo. O complemento do conjunto A, denotado por $\bar{A}$ ou por A', é o complemento de A em relação a U.
  - Em outras palavras, o complemento do conjunto A e U–A.
  - $\bar{A} = \{x \mid x \notin A\}$

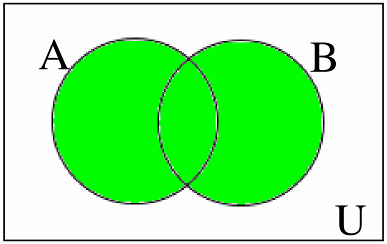
Operações com Conjuntos



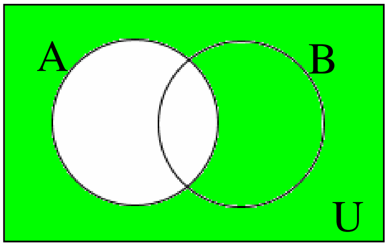
$A \cap B$



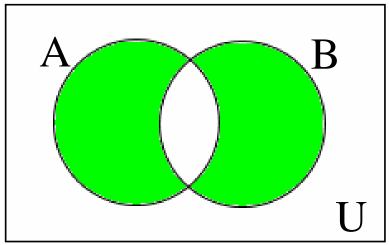
$A - B$



$A \cup B$



$\bar{A}$



$(A - B) \cup (B - A)$

Operações com Conjuntos

$Sejam\ X = \{-5,\ 2,\ 10,\ \sqrt{5}\},\ Y = \{\sqrt{3},\ 1,\ 2\}.$

$X \cup Y = \{-5,\ 2,\ 10,\ \sqrt{5},\ \sqrt{3},\ 1\};$

$X \cap Y = \{2\};$

$X - Y = \{-5,\ 10,\ \sqrt{5}\};$

$$X \times Y = \{(-5,\ \sqrt{3}),\ (-5,\ 1),\ (-5,\ 2),\ (2,\ \sqrt{3}),\ (2,\ 1)),\ (2,\ 2),$$
$$(10,\ \sqrt{3}),\ (10,\ 1),\ (10,\ 2),\ (\sqrt{5},\ \sqrt{3}),\ (\sqrt{5},\ 1),\ (\sqrt{5},\ 2)\};$$

$\mathcal{P}(Y) = \{\emptyset,\ \{\sqrt{3}\},\ \{1\},\ \{2\},\ \{\sqrt{3},\ 1\},\ \{\sqrt{3},\ 2\},\ \{1,\ 2\},\ \{\sqrt{3},\ 1,\ 2\}\}.$

Propriedades das operações

$A \cup \emptyset = A$

$A \cap \emptyset = \emptyset$

Se $A \subseteq B$ então

$A \cup B = B$

$A \cap B = A$

Idempotência

$A \cup A = A$

$A \cap A = A$

Comutatividade

$A \cup B = B \cup A$

$A \cap B = B \cap A$

Propriedades das operações

Associatividade

$$(A \cup B) \cup C = A \cup (B \cup C)$$

$$(A \cap B) \cap C = A \cap (B \cap C)$$

Distributividade

$$(A \cup B) \cap C = (A \cap C) \cup (B \cap C)$$

$$(A \cap B) \cup C = (A \cup C) \cap (B \cup C)$$

Propriedades das operações

De Morgan

$(A \cup B)' = A' \cap B'$

$(A \cap B)' = A' \cup B'$

Absorção

$(A \cup B) \cap A = A$

$(A \cap B) \cup A = A$

Exemplo

- Prove que $(A \cap B)' = A' \cup B'$

1. Suponha que $x \in (A \cap B)'$.
2. De 1. tem-se que $x \notin A \cap B$.
3. De 2. tem-se que $x \notin A$ ou $x \notin B$.
4. De 3. tem-se que $x \in A'$ ou $x \in B'$. Assim, $x \in (A' \cup B')$.
5. Foi provado que $(A \cap B)' \subseteq (A' \cup B')$.

Exemplo

- Continuação da prova: $(A \cap B)' = A' \cup B'$

6. Suponha que $x \in A' \cup B'$
7. De 6. tem-se que $x \in A'$ ou $x \in B'$
8. De 7. tem-se que $x \notin A$ ou $x \notin B$.
9. De 8. tem-se que $x \notin (A \cap B)$. Assim, $x \in (A \cap B)'$.
10. Foi provado que $(A' \cup B') \subseteq (A \cap B)'$.

Exemplo

Use as identidades entre conjuntos para provar que

$(A \cup (B \cap C))' = (C' \cup B') \cap A'$

1. Pela lei de De Morgan infere-se que $(A \cup (B \cap C))' = A' \cap (B \cap C)'$.
2. $= A' \cap (B' \cup C')$ (lei de De Morgan).
3. $= (B' \cup C') \cap A'$ (comutatividade da interseção)
4. $= (C' \cup B') \cap A'$ (comutatividade da união)

UFPE Centro de Informática U·F·P·E

Generalizando união e interseção

- Os conceitos de união e interseção entre conjuntos podem ser aplicados a uma coleção de conjuntos.

- Nesse caso, a notação utilizada é definida como:

$$A_1 \cup A_2 \cup \cdots \cup A_n = \bigcup_{i=1}^{n} A_i$$

$$A_1 \cap A_2 \cap \cdots \cap A_n = \bigcap_{i=1}^{n} A_i$$

Cardinalidade

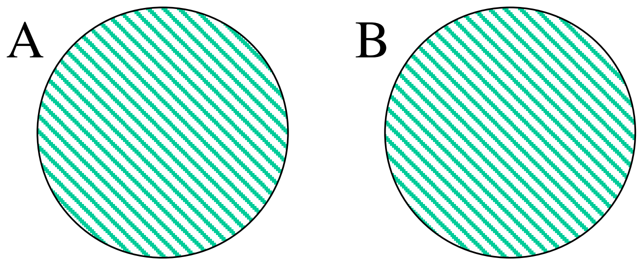
- Seja S um conjunto. Se existem exatamente n elementos distintos em S, sabendo que n é um inteiro não negativo, diz-se que S e um conjunto finito e n é a cardinalidade de S.

- A cardinalidade de S e denotada por |S|.

- Um conjunto e dito infinito se ele não é finito.

Cardinalidade: exemplo

- Sejam A, B dois conjuntos finitos tais que $A \cap B = \emptyset$; (ou seja, A, B são disjuntos), assim:
  - $|A \cup B| = |A| + |B|$



Cardinalidade: exemplo

- Sejam A e B dois conjuntos finitos.
- Então, $|A-B| = |A| - |A\cap B|$

Conjuntos disjuntos

- Demonstração
  - Sabendo que $(A-B)\cap(A\cap B)=\varnothing$ e que
  - $A = \overbrace{(A-B)}\cup\overbrace{(A\cap B)}$
  - Logo, pelo exemplo anterior
  - $|A| = |A-B| + |A\cap B|$
  - Logo
  - $|A-B| = |A| - |A\cap B|$

Cardinalidade: exemplo

- Sejam A e B dois conjuntos finitos.
- Então, $|A \cup B| = |A| + |B| - |A \cap B|$

- Demonstração
  - Uma vez que $A-B$, $B-A$ e $A \cap B$ são disjuntos dois a dois e a sua união é $A \cup B$, usando as definições anteriores,

$$
\begin{aligned}
|A \cup B| &= |(A-B) \cup [(B-A) \cup (A \cap B)]| \\
&= |A-B| + |(B-A) \cup (A \cap B)| \\
&= |A-B| + |B-A| + |A \cap B| \\
&= |A| - |A \cap B| + |B| - |A \cap B| + |A \cap B| \\
&= |A| + |B| - |A \cap B|
\end{aligned}
$$

Cardinalidade: exemplo

- Sejam A, B e C conjuntos finitos.
- Então,
- $|A \cup B \cup C| = |A| + |B| + |C| - |A \cap B| - |A \cap C| - |B \cap C| + |A \cap B \cap C|$

- Demonstração
- Usando o resultado anterior, tem-se,

$$
\begin{aligned}
|A \cup B \cup C| &= |A \cup (B \cup C)| \\
&= |A| + |(B \cup C)| - |A \cap (B \cup C)| \\
&= |A| + |B| + |C| - |B \cap C| - |(A \cap B) \cup (A \cap C)| \\
&= |A| + |B| + |C| - |B \cap C| - |A \cap B| - |A \cap C| + |A \cap B \cap C|
\end{aligned}
$$

Cardinalidade: exemplo

- Numa sala de aula, dos 100 alunos pelo menos 75 falavam inglês, pelo menos 70 falavam francês e pelo menos 65 falavam alemão. Quantos são, no mínimo, os participantes que falam as três línguas?

Sejam I, F e A os conjuntos dos participantes que falam respectivamente inglês, francês e alemão.

Assim, $|I \cap F| = |I| + |F| - |I \cup F| \geq 75+70-100 = 45$

$|I \cap A| = |I| + |A| - |I \cup A| \geq 75+65-100 = 40$

$|F \cap A| = |F| + |A| - |F \cup A| \geq 70+65-100 = 35$

Cardinalidade: exemplo

Então,

$$|I \cap F \cap A| = |I \cap (F \cap A)|$$

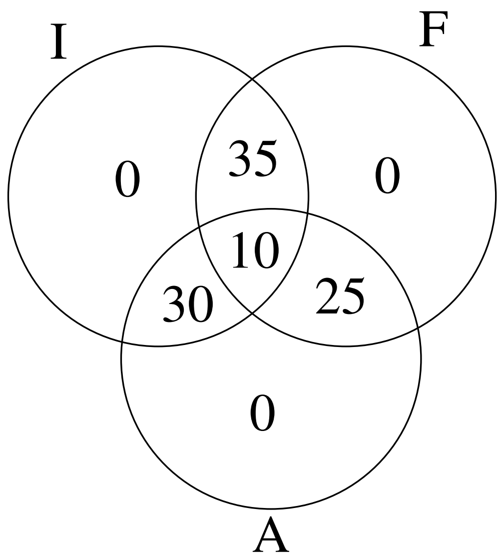
$$= |I| + |F \cap A| - |I \cup (F \cap A)|$$

$$\geq 75 + 35 - 100 = 10$$

Portanto, pelo menos 10 falam as três línguas.

Cardinalidade: exemplo

- Utilizando o diagrama de *Venn*, tem-se



Cardinalidade: exemplo

- Caso nos informassem que existe um participante de cada nacionalidade que fala unicamente a sua língua, tem-se:

$|I \cup A| \leq 99$

$|I \cup F| \leq 99$

$|F \cup A| \leq 99$

Neste caso,

Assim, $|I \cap F| = |I| + |F| - |I \cup F| \geq 75+70-99 = 46$

$|I \cap A| = |I| + |A| - |I \cup A| \geq 75+65-99 = 41$

$|F \cap A| = |F| + |A| - |F \cup A| \geq 70+65-99 = 36$

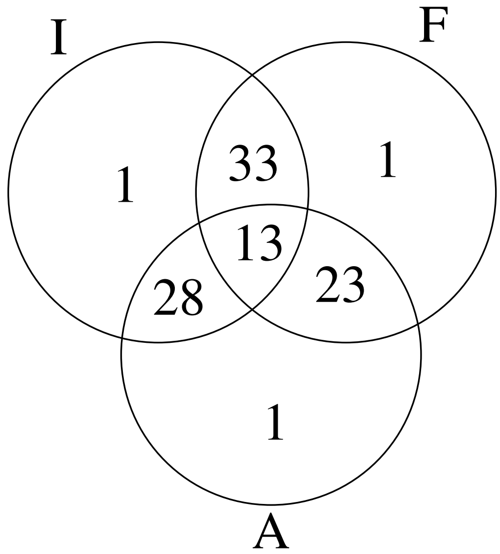
Cardinalidade: exemplo

Como apenas 1 fala francês, 1 inglês e 1 alemão,

$|I \cup (F \cap A)| \leq 98$

Conseqüentemente,

$$
\begin{aligned}
|I \cap F \cap A| &= |I \cap (F \cap A)| \\
&= |I| + |F \cap A| - |I \cup (F \cap A)| \\
&\geq 75 + 36 - 98 = 13
\end{aligned}
$$



Representando conjuntos nos computadores

- Existem várias maneiras de representar conjuntos no computador.

- Uma delas é armazenas os elementos dos conjuntos de maneira desordenada.

- Entretanto, essa maneira é bastante custosa, em termos de tempo de processamento, para realizar operações como união, interseção ou diferença.

Representando conjuntos nos computadores

- Seja U = {1,2,3,4,5,6,7,8,9,10} um conjunto em ordem crescente.

- Uma representação utilizando uma cadeia de bits para representar um subconjunto de U.

  – Os números ímpares de U
    - {1,3,5,7,9}
    - Representação – 10 1010 1010

  – Os números pares de U
    - {2,4,6,8,10}
    - Representação – 01 0101 0101

Representando conjuntos nos computadores

- Os números U menores que 6
  - {1,2,3,4,5}
  - Representação – 11 1110 0000

- Complemento dos número pares de U
  - Números pares de U: {2,4,6,8,10}
  - Representação – 01 0101 0101
  - Complemento – 10 1010 1010 (número ímpares)

Representando conjuntos nos computadores

- União e interseção
  - Números ímpares de U: {1,3,5,7,9}
  - Representação – 10 1010 1010

  - Números menores que 6 de U: {1,2,3,4,5}
  - Representação – 11 1110 0000

  - União
  - 10 1010 1010 $\vee$ 11 1110 0000 = 11 1110 1010
  - Conjunto = {1,2,3,4,5,7,9}

  - Interseção
  - 10 1010 1010 $\wedge$ 11 1110 0000 = 10 1010 000
  - Conjunto = {1,3,5}