Relações de Equivalência

George Darmiton da Cunha Cavalcanti
CIn - UFPE

Definição

Uma relação sobre um conjunto A é chamada de *relação de equivalência* se ela é reflexiva, simétrica e transitiva

Exemplo

Suponha que R é uma relação sobre o conjunto das palavras de forma que aRb se e somente se $tam(a)=tam(b)$, $tam(x)$ representa o tamanho da palavra x. R é uma relação de equivalência?

Reflexiva

Desde que $tam(a)=tam(a)$, aRa para toda palavra a.

Simétrica

Suponha que aRb, assim $tam(a)=tam(b)$. Desta forma bRa, pois $tam(b)=tam(a)$

Transitiva

Suponha que aRb e bRc, assim, $tam(a)=tam(b)$ e $tam(b)=tam(c)$, logo $tam(a)=tam(c)$, desta forma aRc

Exemplo

Seja R uma relação sobre o conjunto dos reais de forma que aRb se e somente se $a-b$ é um inteiro. R é uma relação de equivalência?

Reflexiva

Desde que $a - a = 0$ é um inteiro para todo número real a.

Simétrica

Suponha que aRb, assim a $-b$ é um inteiro, logo $b - a$ também é um inteiro; bRa.

Transitiva

Suponha que aRb e bRc, assim, $a - b$ e $b - c$ são inteiros. Desta forma, $a - c = (a - b) + (b - c)$ também é um inteiro, logo aRc.

Exemplo

Seja $m>1$. Mostre que $R=\{(a,b) \mid a\equiv b(mod\ m)\}$ é uma relação de equivalência sobre o conjunto dos inteiros.

Relembrando $a\equiv b(mod\ m)$ se e somente se m divide $a-b$

Reflexiva

$a-a=0$ é divisível por m, desde que $0 = 0\times m$.

Simétrica

Suponha que $a\equiv b(mod\ m)$. Então $a-b$ é divisível por m, assim $a-b=km$. Logo, $b-a=(-k)m$, então $b\equiv a(mod\ m)$.

Transitiva

Suponha que $a\equiv b(mod\ m)$ e $b\equiv c(mod\ m)$. Assim, m divide ambos $a-b$ e $b-c$. Desta forma, $a-b = km$ e $b-c = lm$.

Logo, $a-c = (a-b) + (b-c) = km + kl = (k+l)m$. Assim, $a\equiv c(mod\ m)$.

Classes de Equivalência

- Seja $\boldsymbol{R}$ uma relação de equivalência sobre um conjunto $\boldsymbol{A}$.

- O conjunto de todos os elementos que são relacionados a um elemento $\boldsymbol{a}$ de $\boldsymbol{A}$ é chamado de *classe de equivalência* de $\boldsymbol{a}$.

- A *classe de equivalência* de $\boldsymbol{a}$ com respeito a $\boldsymbol{R}$ é denotada por $[a]_R$.

Classes de Equivalência

- Em outras palavras, se ***R*** é uma relação de equivalência sobre um conjunto ***A***, a classe de equivalência do elemento ***a*** é:

$$[a]_R = \{s \mid (a,s) \in R\}$$

Exemplo

Quais são as classes de equivalência de ***0*** e de ***1*** para a *congruência módulo* ***4***?

A classe de equivalência de ***0*** contém todos os inteiros ***a*** de forma que $a \equiv 0 (mod\ 4)$. Assim,

$[0] = \{..., -8, -4, 0, 4, 8, ...\}$

A classe de equivalência de ***1*** contém todos os inteiros ***a*** de forma que $a \equiv 1 (mod\ 4)$. Assim,

$[1] = \{..., -7, -3, 1, 5, 9, ...\}$

Classes de equivalências e Partições

O teorema abaixo mostra que as classes de equivalência de dois elementos de A são idênticas ou disjuntas.

Teorema

Seja R uma relação de equivalência sobre um conjunto A. Essas declarações são equivalentes:

i) a R b

ii) $[a] = [b]$

iii) $[a] \cap [b] \neq \emptyset$

Prova do Teorema

Mostrar primeiro que (i) implica (ii).

Assuma que aRb.

Provaremos que [a]=[b], mostrando que [a]$\subseteq$[b] e [b]$\subseteq$[a].

Suponha que c$\in$ [a], assim aRc.

Sabendo que aRb e que R é simétrica, então bRa.

Como R é transitiva, bRc. Assim, c$\in$ [b].

Isso mostra que [a]$\subseteq$[b].

Prova do Teorema

Mostrar que (ii) implica (iii).

Assuma que [a]=[b].

Segue-se que $[a] \cap [b] \neq \emptyset$.

Uma vez que, [a] não é vazia, pois $a \in [a]$, sabendo que R é reflexiva.

Prova do Teorema

Mostrar que (iii) implica (i).

Assuma que $[a] \cap [b] \neq \emptyset$.

Assim, existe um elemento *c* de forma que $c \in [a]$ e $c \in [b]$.

Em outras palavras, aRc e bRc.

Por simetria, cRb.

Por transitividade, desde que aRc e cRb, então aRb.

Classes de equivalências e Partições

- Seja R uma relação de equivalência sobre um conjunto A.
- A união das classes de equivalência de R é o conjunto A

$$\bigcup_{a \in A} [a]_R = A$$

Classes de equivalências e Partições

Em adição ao teorema mostrado anteriormente, as classes de equivalências são iguais ou disjuntas, então

$$[a]_R \cap [b]_R = \varnothing$$

$$\text{Quando } [a]_R \neq [b]_R$$

Partições

- Uma *partição* de um conjunto S é uma coleção de subconjuntos disjuntos não vazios de S.

- A a união de todas as partições resulta em S.

- Em outras palavras, os subconjuntos A_i formam partições de S se e somente se

$$A_i \neq \emptyset$$

$$A_i \cap A_j = \emptyset, \text{ quando } i \neq j$$

$$\bigcup_{i \in I} A_i = S$$