IF824 - Otimização
Otimização não-linear: Método das penalidades

Gurvan Huiban

27 de maio de 2014

Os trabalhos são realizados na ferramenta Matlab[1] ou na ferramenta Sage[2].

1 Descrição do método

Seja o problema de otimização restrito seguinte:

$$\begin{array}{ll} \min & f(X) \\ & |X \in \Omega \end{array} \tag{1}$$

com

$$\Omega = \{X \in \mathbb{R}^n / g_i(X) \leqslant 0, 1 \leqslant i \leqslant m\}$$

O método das penalidade serve para transformar este problema num problema irrestrito da seguinte forma:

$$\begin{array}{ll} \min & f(X) + cP(X) \\ & |X \in \mathbb{R}^n \end{array} \tag{2}$$

onde

$$P : \begin{cases} \mathbb{R}^n & \to & \mathbb{R}^+ \\ X & \mapsto & P(X) = \begin{cases} \simeq 0 & \text{quando } X \in \Omega \\ P(X) > 0 & \text{quando } X \notin \Omega \end{cases} \end{cases}$$

Seguem duas possibilidades para a função $P(X)$:

$$P(X) = \sum_{i=1}^{m} \left(\max\{0, g_i(X)\}\right)^2 \tag{3}$$

$$P(X) = \sum_{i=1}^{m} e^{cg_i(X)} \tag{4}$$

Seja uma sequência estritamente crescente $\{c_k\}$ tal que $\lim_{k\to\infty} c_k = \infty$. Nós queremos gerar a sequência de pontos $\{X_k^*\}$ onde X_k^* é a solução do problema 2 para $c = c_k$.

2 Implementação

O objetivo do trabalho é a implementação do método das penalidades com Matlab ou Sage (sua preferência).

- A partir dos problemas exemplos, gere grafos representando as penalidades geradas a partir de cada uma das restrições e juntas. Se necessário, use coeficientes para que as penalidades das diferentes restrições tenha mais ou menos a mesma ordem de grandeza. Observam o efeito do coeficiente c nas superfícies de nível.

[1] ©1994-2013 The MathWorks, Inc.
[2] `http://www.sagemath.org/`

- Gere grafos representando a função objetivo (superfícies de nível) do problema transformado pelo método das penalidades, para alguns valores de c.
- Resolve o problema de otimização com alguns valores para c de forma que os c formem uma sequência estritamente crescente. Represente em grafos a sequência de soluções encontradas.

2.1 Matlab

No Matlab, já existem as seguintes funções:

- `fminsearch`: Otimização irrestrita.
- `ezcontour`: Desenho de superfícies de nível.
- `ezplot`: Desenho de uma função $f(X) = 0$.

2.2 Sage

No Sage, já existem as seguintes funções:

- `minimize`: Otimização irrestrita.
- `contour_plot`: Desenho de superfícies de nível.
- `implicit_plot`: Desenho de uma função $f(X) = 0$.

2.3 Problemas sugeridos

Seguem abaixo alguns problemas que podem ser usados para testar a implementação do método.

2.3.1 Problema 1

Este problema tem seu ótimo no interior de Ω.

$$\min \quad f(X) = 2x_1^2 + x_1x_2 + x_2^2 - 4x_1 - 2x_2 + 9$$
$$|x_i \geqslant 0$$

2.3.2 Problema 2

Este problema só tem funções lineares.

$$\min \quad f(X) = -4x_1 - 2x_2 + 9$$
$$\left| \begin{array}{rcl} x_1 + x_2 & \leqslant & 3 \\ x_i & \geqslant & 0 \end{array} \right.$$

2.3.3 Problema 3

Este problema tem uma restrição quadrática.

$$\min \quad f(X) = \max x_1 + x_2$$
$$\left| \begin{array}{rcl} 5x_1^2 + x_2^2 & \leqslant & 5 \\ x_2 & \geqslant & 0 \end{array} \right.$$