IF824 - Otimização
Lista de exercícios 1*

Gurvan Huiban

27 de maio de 2014

1 Modelagem: imprensas

Uma gráfica usa 5 modelos diferentes de imprensas. Cada imprensa se danifica com o tempo e deve ser regularmente trocada. A tabela 1 indica o custo de troca de uma imprensa, a renda por ano gerada pela imprensa e a diminuição por ana de renda devido ao desgaste.

Imprensa	1	2	3	4	5
Custo de troca (kR$)	110	450	150	675	320
Renda (kR$ por ano)	90	110	55	220	250
Diminuição de renda (por ano)	5%	20%	30%	20%	40%

Tabela 1

O dono da gráfica gostaria de saber com qual frequência ele deve trocar cada imprensa de forma em minimizar os custos por ano (custo da troca e perda de renda). Alem disso, o dono da gráfica não quer gastar mais de kR$250 com a compra das imprensas.

2 Otimalidade

Quais são as características (viável/inviável, mínimo/máximo local e/ou global, nada) de cada ponto das figuras 1a até 1f. Estes problemas são unimodais ou multimodais?

3 Direções de melhoria do objetivo

3.1 Figura 1a

Com os pontos

$$X_1 = \begin{pmatrix} 5 \\ 0 \end{pmatrix} \qquad X_2 = \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \end{pmatrix} \qquad X_3 = \begin{pmatrix} 3 \\ 3 \end{pmatrix} \qquad X_4 = \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \end{pmatrix}$$

e considerando o problema da figura 1a como um problema de maximização, o que dizer das seguintes direções? (factíveis ou não, melhorando o objetivo ou não)

- $\Delta X = \begin{pmatrix} -3 \\ 3 \end{pmatrix}$ a partir de X_1
- $\Delta X = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ a partir de X_3
- $\Delta X = \begin{pmatrix} -10 \\ 0 \end{pmatrix}$ a partir de X_3
- $\Delta X = \begin{pmatrix} -10 \\ 1 \end{pmatrix}$ a partir de X_3

*A maioria destes exercícios foram tirados do livro **Optimization in Operations Research** de Ronald L. Rardin, Editora: Prentice Hall (1998)

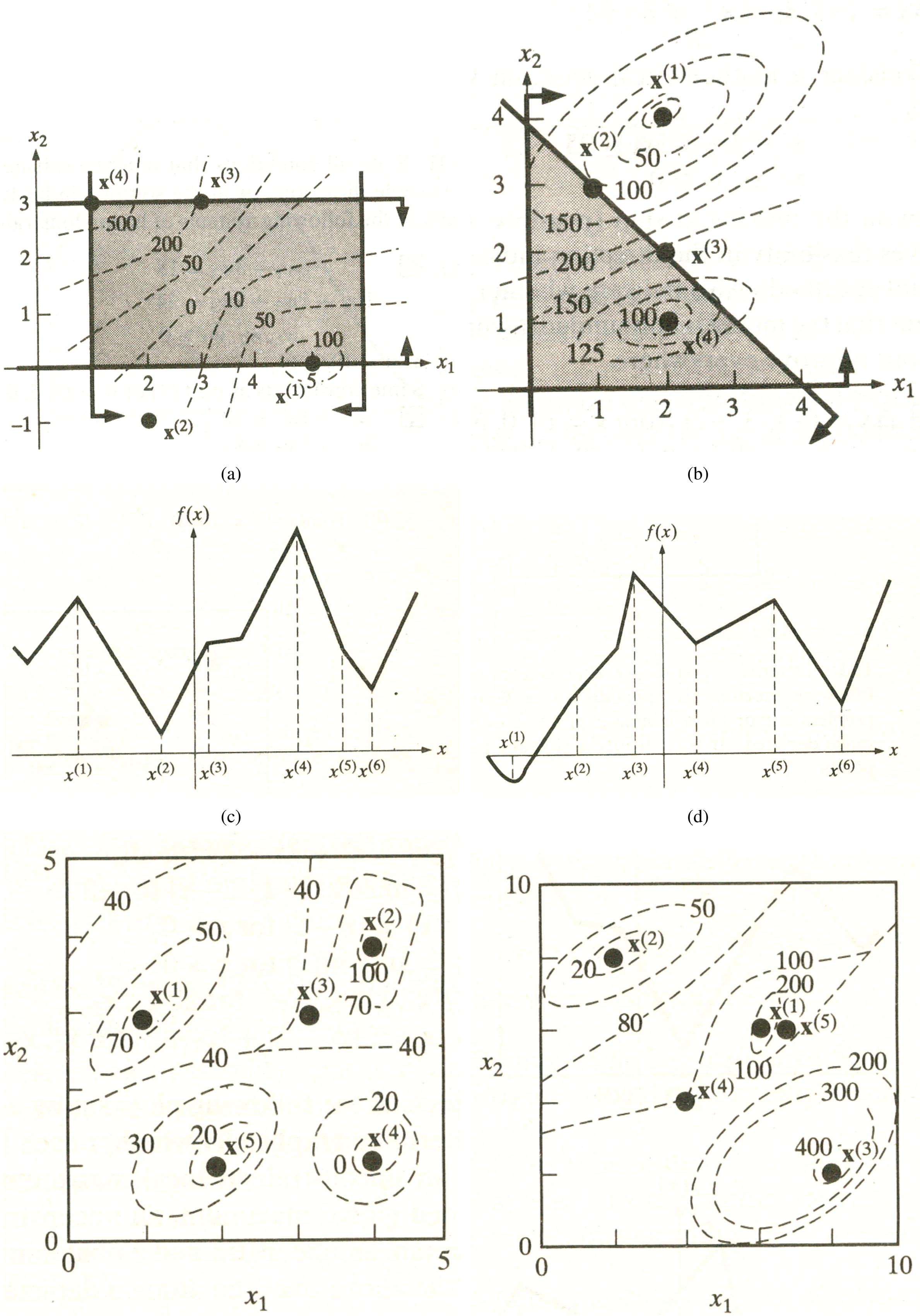

Figura 1

3.2 Figura 1b

Com os pontos

$$X_1 = \begin{pmatrix} 2 \\ 4 \end{pmatrix} \qquad X_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \end{pmatrix} \qquad X_3 = \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \end{pmatrix} \qquad X_4 = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}$$

e considerando o problema da figura 1b como um problema de minimização, o que dizer das direções seguintes? (factíveis ou não, melhorando o objetivo ou não)

- $\Delta X = \begin{pmatrix} -4 \\ 4 \end{pmatrix}$ a partir de X_3
- $\Delta X = \begin{pmatrix} -3 \\ 2 \end{pmatrix}$ a partir de X_4
- $\Delta X = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}$ a partir de X_2
- $\Delta X = \begin{pmatrix} 4 \\ 0 \end{pmatrix}$ a partir de X_3

3.3 Direção melhorando o objetivo

Indicar se a direção associada melhora ou não o objetivo para cada uma das funções objetivo seguintes, :

- $\max 4x_1 - 2x_3 + x_5$ com a direção $\begin{pmatrix} 2 \\ -3 \\ 4 \\ 0 \\ 6 \end{pmatrix}$ em $X_0 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 19 \\ 4 \\ 6 \end{pmatrix}$
- $\min -x_2 + 8x_3 + 6x_4$ com a direção $\begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 3 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}$ em $X_0 = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 8 \\ 11 \\ -3 \end{pmatrix}$
- $\min x_1x_2 + x_1^2 + 4x_2$ com a direção $\begin{pmatrix} -7 \\ 5 \end{pmatrix}$ em $X_0 = \begin{pmatrix} 3 \\ -1 \end{pmatrix}$
- $\min x_1x_2 + x_1^2 + 4x_2$ com a direção $\begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix}$ em $X_0 = \begin{pmatrix} 3 \\ -1 \end{pmatrix}$
- $\max (x_1 - 5)^2 + (x_2 + 1)^2$ com a direção $\begin{pmatrix} -1 \\ 2 \end{pmatrix}$ em $X_0 = \begin{pmatrix} 4 \\ 1 \end{pmatrix}$
- $\min (x_1 - 5)^2 + (x_2 + 1)^2$ com a direção $\begin{pmatrix} 8 \\ -6 \end{pmatrix}$ em $X_0 = \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \end{pmatrix}$

3.4 Direção factível

Seja o conjunto $\Omega = \left\{ X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} / \left\{ \begin{array}{l} 3x_1 - 2x_2 + 8x_3 = 14 \\ 6x_1 - 4x_2 - x_3 \leqslant 11 \\ x_1, x_2, x_3 \geqslant 0 \end{array} \right. \right\}$, definir se a direção ΔX é factível a partir do ponto X_0.

- $\Delta X = \begin{pmatrix} 0 \\ 4 \\ 1 \end{pmatrix}$ a partir de $X_0 = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$
- $\Delta X = \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ -1 \end{pmatrix}$ a partir de $X_0 = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$
- $\Delta X = \begin{pmatrix} 8 \\ 0 \\ -3 \end{pmatrix}$ a partir de $X_0 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}$
- $\Delta X = \begin{pmatrix} 0 \\ -4 \\ 1 \end{pmatrix}$ a partir de $X_0 = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$
- $\Delta X = \begin{pmatrix} 8 \\ 0 \\ -3 \end{pmatrix}$ a partir de X_0 $\begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$

3.5 Condições

A partir dos pontos X_0 e X_1 dos casos seguintes, uma direção factível deve apresentar que condições?

- $\Omega = \left\{ X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} / \left\{ \begin{array}{l} 2x_1 + 3x_3 = 18 \\ x_1 + x_2 + 2x_3 = 14 \\ x_1, x_2, x_3 \geqslant 0 \end{array} \right. \right\}$. $X_0 = \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 6 \end{pmatrix}$. $X_1 = \begin{pmatrix} 9 \\ 5 \\ 0 \end{pmatrix}$.
- $\Omega = \left\{ X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} / \left\{ \begin{array}{l} x_1 + x_2 = 10 \\ 2x_1 - x_2 \geqslant 8 \\ x_1 - 8x_2 \leqslant 1 \end{array} \right. \right\}$. $X_0 = \begin{pmatrix} 6 \\ 4 \end{pmatrix}$. $X_1 = \begin{pmatrix} 9 \\ 1 \end{pmatrix}$.

4 Convexidade

4.1 Conjuntos convexos

Analisar se os seguintes conjuntos Ω são convexos.

- $\Omega = \left\{ X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} / \left\{ \begin{array}{l} x_1^2 + x_2^2 \geqslant 9 \\ x_1 + x_2 \leqslant 10 \\ x_1, x_2 \geqslant 0 \end{array} \right. \right\}$
- $\Omega = \left\{ X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} / \left\{ \begin{array}{l} x_1^2 + x_2^2 \leqslant 25 \\ 2x_1 + 3x_2 \geqslant 6 \\ x_1, x_2 \geqslant 0 \end{array} \right. \right\}$
- $\Omega = \left\{ X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} / \left\{ \begin{array}{l} x_1 + -2x_2 + x_3 = 2 \\ x_1 + 8x_2 - x_3 \leqslant 16 \\ x_1 + 4x_2 - x_3 \geqslant 5 \\ x_1, x_2, x_3 \geqslant 0 \end{array} \right. \right\}$
- $\Omega = \left\{ X \in \mathbb{R}^{20} / \left\{ \begin{array}{l} \sum_{j=1}^{20} x_j = 1000 \\ 0 \leqslant x_j \leqslant 100, j = 1 \ldots 20 \end{array} \right. \right\}$
- $\Omega = \left\{ X \in \mathbb{R}^4 / \left\{ \begin{array}{l} x_1 + 2x_2 + 3x_3 + x_4 \leqslant 24 \\ 0 \leqslant x_j \leqslant 10, j = 1 \ldots 4 \\ x_j \in \mathbb{N}, j = 1 \ldots 4 \end{array} \right. \right\}$
- $\Omega = \left\{ X \in \mathbb{R}^4 / \left\{ \begin{array}{l} 2x_1 + x_2 + x_3 - 5x_4 \geqslant 3 \\ x_j \in \{0, 1\}, j = 1 \ldots 4 \end{array} \right. \right\}$

4.2 Funções convexas

Analisar se as seguintes funções são convexas, côncavas, os dois ou nenhum dos dois no domínio Ω definido.

- $f(X) = \ln(x_1) + 20 \ln_{x_2}$ sobre $\Omega = \left\{ X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} / x_1 > 0 \text{ e } x_2 > 0 \right\}$
- $f(x) = x \sin(x)$ sobre $\Omega = [0; 2\pi[$
- $f(x) = x(x-2)^2$ sobre $\Omega = \{x / x \geqslant 0\}$
- $f(x) = (x-8)^4 + 132x$ sobre $\Omega = \mathbb{R}$
- $f(X) = 3x_1 + 11x_2 - x_3 - 8x_5$ sobre $\Omega = \mathbb{R}^5$
- $f(X) = 20x_1 + 63x_2$ sobre $\Omega = \left\{ X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} / x_1 \geqslant 0 \text{ e } x_2 \geqslant 0 \right\}$
- $f(X) = \frac{10}{\sqrt{x_1}} - 40\sqrt{x_2}$ sobre $\Omega = \left\{ X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} / x_1 > 0 \text{ e } x_2 > 0 \right\}$

5 Condições de otimalidade de primeira ordem

Considerando cada um dos problemas seguintes irrestrito, indicar se o ponto X_0 verifica as condições de otimalidade de primeiro ordem para as funções seguintes. Caso as condições não sejam respeitadas, indicar uma direção que melhore o objetivo.

- $\min x_1^2 + x_1 x_2 - 6x_1 - 8x_2$ em $X_0 = \begin{pmatrix} 8 \\ -10 \end{pmatrix}$
- $\max 10x_1^2 + 12\ln(x_2)$ em $X_0 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}$

- $\min 16x_1 - x_1x_2 + 2x_2^2$ em $X_0 = \begin{pmatrix} 3 \\ 0 \end{pmatrix}$
- $\max x_1x_2 - 10x_1 + 4x_2$ em $X_0 = \begin{pmatrix} -4 \\ 10 \end{pmatrix}$

6 Condições de otimalidade de segunda ordem

Considerando cada um dos problemas seguintes irrestrito, indicar se o ponto X_0 é um máximo/mínimo local, se ele pode ser um máximo/mínimo local, ou se com certeza não é nenhum dos dois.

- $f(x_1, x_2) = 3x_1^2 - x_1x_2 + x_2^2 - 11x_1$ em $X_0 = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}$
- $f(x_1, x_2) = -x_1^2 - 6x_1x_2 - 9x_2$ em $X_0 = \begin{pmatrix} -3 \\ 1 \end{pmatrix}$
- $f(x_1, x_2) = x_1 - x_1x_2 + x_2^2$ em $X_0 = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}$
- $f(x_1, x_2) = 12x_2 - x_1^2 + 3x_1x_2 - 3x_2^2$ em $X_0 = \begin{pmatrix} 12 \\ 8 \end{pmatrix}$
- $f(x_1, x_2) = x_1x_2^3$ em $X_0 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$
- $f(x_1, x_2) = 6x_1 + \ln(x_1) + x_2^2$ em $X_0 = \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \end{pmatrix}$
- $f(x_1, x_2) = 2x_1^2 + 8x_1x_2 + 8x_2^2 - 12x_1 - 24x_2$ em $X_0 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$
- $f(x_1, x_2) = 4x_1^2 + \frac{3}{x_2} - 8x_1 + 3x_2$ em $X_0 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$

7 Karush-Kuhn-Tucker

7.1 Exercício 1

Usando as condições de KKT, resolver o problema seguinte.

$$\begin{array}{ll} \min & 15x_1^2 + 4x_2^2 \\ & \left| \begin{array}{l} 3x_1 + 2x_2 = 8 \\ x_1 \geqslant 0 \\ x_2 \geqslant 0 \end{array} \right. \end{array}$$

7.2 Exercício 2

$$\begin{array}{ll} \min & (x_3 - 11)^2 + 3\,(x_2 - 5)^2 + 14\,(x_1 - 9)^2 \\ & \left| \begin{array}{l} 2\,x_1 + 18\,x_2 - x_3 = 19 \\ 6\,x_1 + 8\,x_2 + 3\,x_3 \leq 20 \\ x1 \geq 0 \\ x2 \geq 0 \end{array} \right. \end{array}$$

Verificar as condições de KKT nos pontos:

$$X = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} \text{ e } X = \begin{pmatrix} 2269/255 \\ 61/85 \\ 2987/255 \end{pmatrix}$$