

# Álgebra Linear e Formação de Imagens: a Tomografia Computadorizada

Franciella Marques da Costa\*    Edson Agustini†

Faculdade de Matemática - FAMAT

Universidade Federal de Uberlândia - UFU - MG

Setembro de 2005

## Resumo

Neste trabalho apresentamos um algoritmo utilizado em aparelhos de tomografia computadorizada que permite elaborar, a partir de uma série de medições de densidades de *Raios X*, imagens de seções transversais do corpo humano. Além do algoritmo exemplificado, é feita uma pequena introdução sobre o princípio de funcionamento de um tomógrafo e são tecidos alguns comentários sobre os problemas do excesso de radiação ao qual um paciente está submetido em sessões de tomografia de corpo inteiro.

**Palavras-chave:** *tomografia computadorizada, sistemas lineares sobredeterminados, algoritmos de Técnicas de Reconstrução Algébrica.*

## 1 Introdução

Em 1971, Godfrey Hounsfield, um programador britânico, trabalhando junto com um neurorradiologista, conseguiu mostrar as partes internas de um cérebro humano. Foram esses dois que batizaram o processo que acabavam de inventar com o nome pomposo de *tomografia computadorizada axial transversa*. Vem a ser uma técnica para reconstruir imagens bidimensionais de seções transversais de pacientes a partir de um conjunto de fluxos de *Raios X* unidimensionais. As vantagens de tal facilidade são óbvias: ao invés de examinar vagas sombras em um fotograma (chapa) de *Raios X* convencional, os médicos podem examinar alterações patológicas na anatomia com o mesmo grau de claridade que teriam se tivessem cortado o paciente em duas partes.

Para construir cada imagem, são emitidos feixes de *Raios X* que ultrapassam o corpo do paciente e são captados por detectores. A fração de fótons da radiação que não é absorvida ou desviada pelo corpo é captada por detectores dotados de um “*crystal cintilador*” ou um “*fotomultiplicador*” que converte a energia incidente em corrente elétrica,

---

\*[franciellamarques@hotmail.com](mailto:franciellamarques@hotmail.com) Orientanda do PROMAT - Programa Institucional de Iniciação Científica e Monitoria da Faculdade de Matemática da Universidade Federal de Uberlândia - MG de jan/2005 a dez/2005.

†[agustini@ufu.br](mailto:agustini@ufu.br) Professor orientador.

proporcional à potência dos *Raios X* originais, que por sua vez é convertida em sinais eletrônicos que são enviados a um computador, que constrói as imagens.



FIGURA 1: *Tomógrafo.*



FIGURA 2: *Uma imagem da base de um crânio obtida por tomografia computadorizada.*

A construção de uma imagem requer encontrar soluções aproximadas de sistemas muito grandes de equações lineares. Neste trabalho apresentamos o modo como são montadas essas equações e apresentamos um algoritmo que se enquadra na chamada classe de *Técnicas de Reconstrução Algébrica (TRA)*, que é utilizado para encontrar soluções aproximadas desses sistemas lineares, soluções essas, que são úteis na construção das imagens das seções transversais do corpo em formato digital.

Existem dois modos de “escanear” a seção transversal: o *modo paralelo* e o *modo leque*, conforme as Figuras 3 e 4.

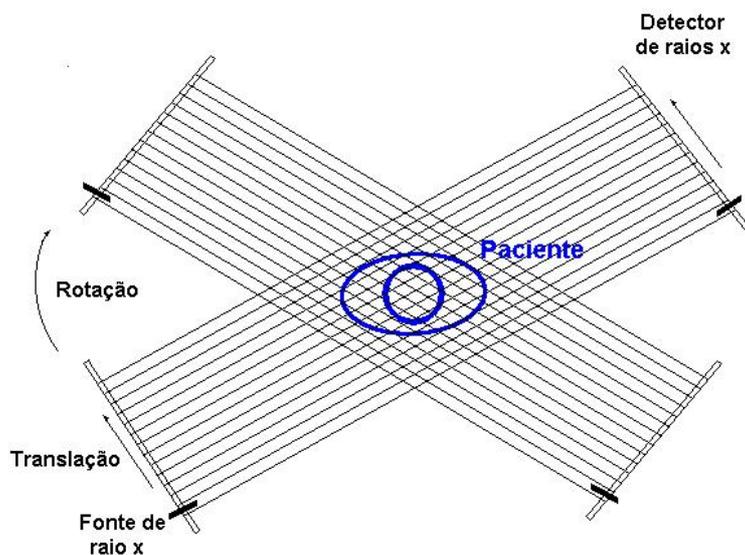


FIGURA 3: *“Escanear” por meio de Raios X em modo paralelo.*

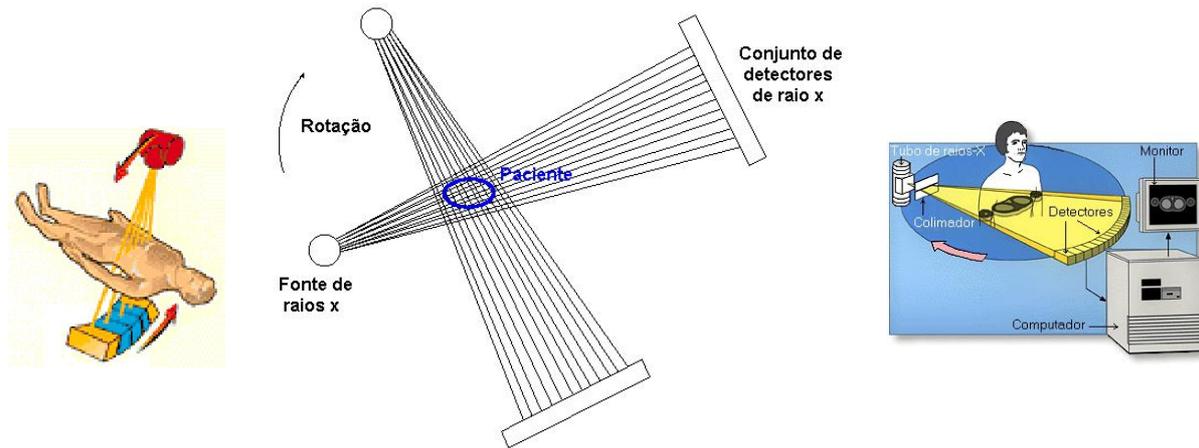


FIGURA 4: “Escaneamento” por meio de Raios X em modo leque.

No modo paralelo, a fonte de Raios X emite feixes de raios paralelos que ultrapassam o paciente e a radiação que não foi absorvida ou desviada é captada pelos detectores de Raios X. Em seguida, o par fonte-detector é girado de um pequeno ângulo e é feito um novo conjunto de medidas. Esse processo é repetido até ser obtido o número de medidas desejado. Analogamente, no modo leque, a fonte de Raios X gera um leque de raios e o que não foi absorvido ou desviado pelo paciente é captado pelo detector de Raios X. A fonte e o detector são girados e são feitas novas medidas. Esse processo é repetido até que o número de medidas seja o suficiente. A Figura 5 mostra um dos feixes de Raios X transpassando um paciente. Na mesma figura temos, ao fundo, os *pixels* da imagem da seção transversal desejada. Os *pixels* são pequenos quadrados monocromáticos que formam a imagem, ou seja, são os “elementos básicos” da imagem. Na tomografia, a cada *pixel* é atribuída uma tonalidade de cinza.

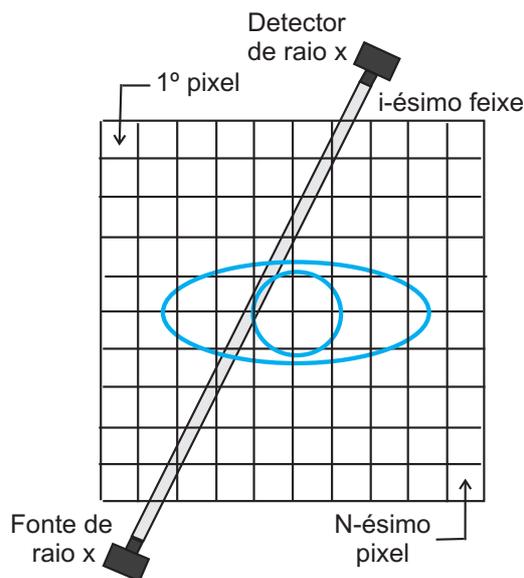


FIGURA 5: Um dos feixes de Raios X transpassando o paciente.

## 2 Montando um Sistema de Equações Lineares

Consideremos a Figura 5 para ver como a secção transversal é reconstruída a partir das medidas dos feixes de *Raios X*. Nesta figura, o campo de visão foi dividido em *pixels* numerados de 1 a  $N$ . Para compreender melhor o processo de construção da imagem, imaginemos que a secção transversal física do paciente seja a própria imagem dividida em *pixels*. Como o paciente é bombardeado inúmeras vezes por feixes de *Raios X*, cada *pixel* será “igualmente bombardeado” por feixes de *Raios X*, em diversas direções, à medida que o tomógrafo gira.

Nosso objetivo é determinar a densidade de *Raios X* em cada *pixel*. A cada densidade de *Raios X* em cada *pixel* é associada uma tonalidade de cinza. Como cada tecido humano absorve ou desvia densidades diferentes de *Raios X*, a imagem distingue os diversos tecidos e órgãos.

A densidade de *Raios X* absorvida pelo  $j$ -ésimo *pixel* é denotada por  $x_j$  e é definida por:

$$x_j = \ln \left( \frac{\text{número de fótons entrando no } j\text{-ésimo pixel}}{\text{número de fótons saindo do } j\text{-ésimo pixel}} \right).$$

Usando a propriedade logarítmica  $\ln(a/b) = -\ln(b/a)$ , temos

$$x_j = -\ln(\text{fração de fótons que passa pelo } j\text{-ésimo pixel sem ser absorvida}).$$

As Figuras 6 e 7 representam fótons entrando e saindo de um e de uma fileira de *pixels*, respectivamente.

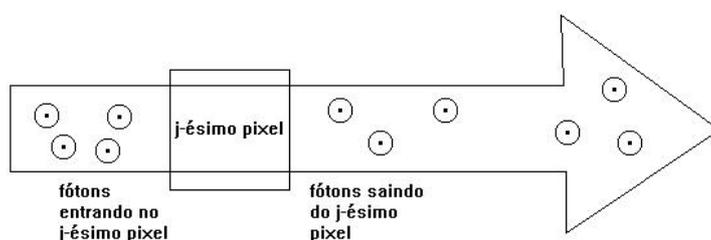


FIGURA 6: Fótons entrando e saindo de um *pixel*.

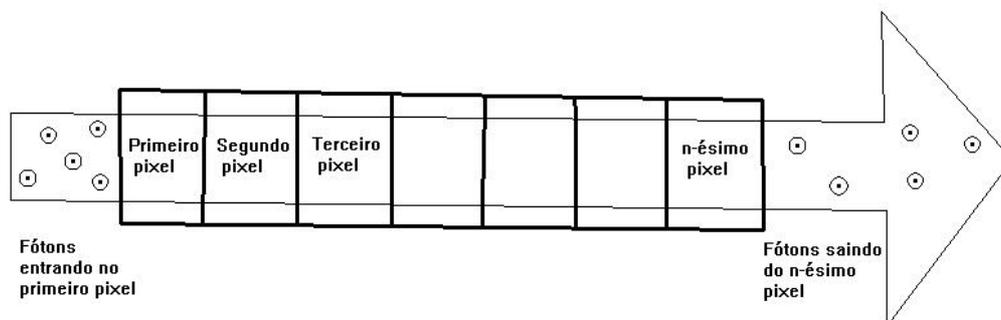


FIGURA 7: Fótons entrando e saindo em uma fileira de *pixels*.

Conforme a Figura 7, um feixe de *Raios X* passa por uma fileira inteira de *pixels* de tal modo que o número de fótons saindo de um *pixel* é igual ao número de fótons entrando

no próximo *pixel*. Se esses pixels são numerados  $1, 2, \dots, n$ , pela propriedade aditiva da função logarítmica temos:

$$\begin{aligned} x_1 + x_2 + \dots + x_n &= \ln \left( \frac{\text{número de fótons entrando no primeiro pixel}}{\text{número de fótons saindo do } n\text{-ésimo pixel}} \right) \\ &= -\ln (\text{fração de fótons que passa pela linha de } n \text{ pixels sem ser absorvida}). \end{aligned} \quad (1)$$

Assim, para determinar a densidade de *Raios X* de uma fileira, basta somar as densidades dos *pixels* individuais. A densidade do  $i$ -ésimo feixe de um “escaneamento” é denotada por  $b_i$  e é dada por:

$$\begin{aligned} b_i &= \ln \left( \frac{\text{números de fótons do } i\text{-ésimo feixe entrando no detector}}{\text{sem ter a seção transversal no campo de visão}}}{\text{número de fótons do } i\text{-ésimo feixe entrando no detector}}}{\text{com a seção transversal no campo de visão}} \right) \\ &= -\ln (\text{fração de fótons do } i\text{-ésimo feixe que passa pela seção transversal sem ser absorvida}). \end{aligned} \quad (2)$$

Para cada feixe que passa por uma fileira horizontal ou vertical de *pixels* devemos ter:

$$\left( \begin{array}{l} \text{fração de fótons do feixe que passa} \\ \text{pela fileira de pixels sem ser absorvida} \end{array} \right) = \left( \begin{array}{l} \text{fração de fótons do feixe que passa} \\ \text{pela seção transversal sem ser absorvida} \end{array} \right).$$

Assim, se o  $i$ -ésimo feixe passa por uma fileira horizontal ou vertical de *pixels*, então das equações (1) e (2) temos:

$$x_1 + x_2 + \dots + x_n = b_i.$$

Nesta equação, a densidade  $b_i$  é possível de ser medida no aparelho de tomografia e  $x_1, x_2, \dots, x_n$  são densidades desconhecidas que devem ser determinadas.

De modo análogo ao “caso horizontal ou vertical”, se o  $i$ -ésimo feixe passa por um conjunto de *pixels* que numeramos  $j_1, j_2, \dots, j_i$ , então temos:

$$x_{j_1} + x_{j_2} + \dots + x_{j_i} = b_i.$$

Se definirmos

$$a_{ij} = \begin{cases} 1, & \text{se } j = j_1, j_2, \dots, j_i \\ 0, & \text{caso contrário} \end{cases},$$

podemos escrever a equação como:

$$a_{i1}x_1 + a_{i2}x_2 + \dots + a_{iN}x_N = b_i. \quad (3)$$

A equação (3) é chamada de  $i$ -ésima equação de feixe.

Olhando para a Figura 5, observamos que os feixes de *Raios X* não passam necessariamente verticais ou horizontais por cada *pixel*. Há *pixels* que são bombardeados apenas minimamente pelo feixe. Logo, não seria muito preciso atribuir  $a_{ij} = 1$  para um feixe totalmente bombardeado ou parcialmente bombardeado por um feixe de *Raios X*, como estamos fazendo acima. Dependendo da capacidade computacional do tomógrafo, pode-se definir os  $a_{ij}$  de modo diferente. Na Figura 8, mostramos três maneiras de definir os  $a_{ij}$  da equação (3). O *método do centro do pixel* é o que estamos adotando. Embora não seja o mais preciso, é o que apresenta menor dificuldade computacional.

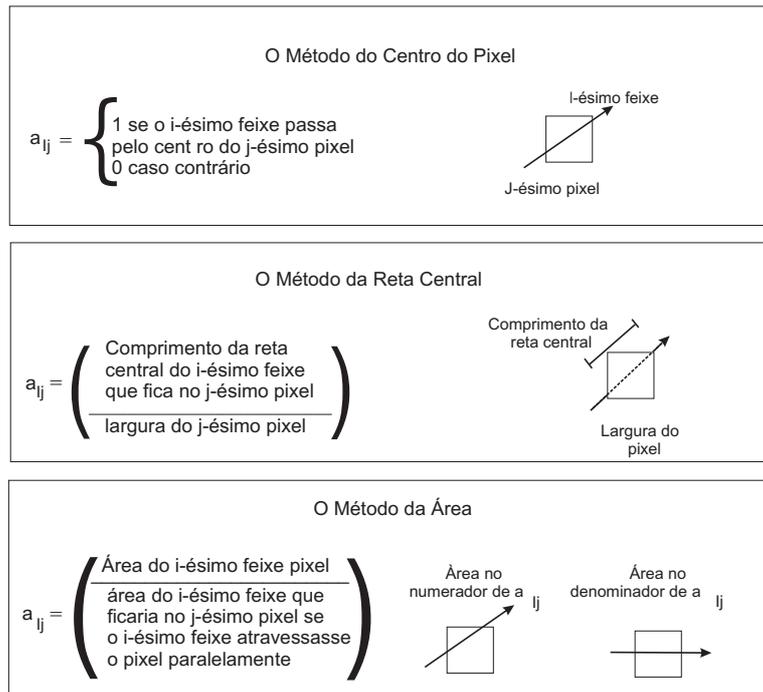


FIGURA 8: Métodos para determinação dos coeficientes das densidades de pixel.

Supondo que para construir uma imagem foram emitidos  $M$  feixes de Raios  $X$  no total, podemos escrever as  $M$  equações de feixe de um “escaneamento” completo como:

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \dots + a_{1N}x_N = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \dots + a_{2N}x_N = b_2 \\ \vdots \\ a_{M1}x_1 + a_{M2}x_2 + \dots + a_{MN}x_N = b_M \end{cases} \quad (4)$$

Assim, teremos um sistema linear de  $M$  equações (as  $M$  equações do feixe) e  $N$  incógnitas (as  $N$  densidades de de cada *pixel*).

Dependendo do número de feixes e de *pixels* usados, podemos ter  $M > N$ ,  $M = N$  ou  $M < N$ . Vamos considerar o caso sobredeterminado em que  $M > N$ , que é o caso que ocorre nos tomógrafos. Esse sistema não terá uma solução matemática exata, devido aos erros experimentais e de modelagem inerentes ao problema. No entanto, existe um algoritmo simples que permite achar uma solução aproximada para o sistema linear (4).

É importante ressaltar que, para a geração de uma imagem padrão moderna de  $512 \times 512$  *pixels* de  $1 \text{ mm}^2$ , temos  $N = 262.144$  e  $M$  maior ainda!

### 3 O Algoritmo

Foram desenvolvidos vários algoritmos para achar uma solução para um sistema linear sobredeterminado muito grande. (4). O algoritmo que vamos descrever pertence a uma classe de *Técnicas de Reconstrução Algébrica* (TRA). Esse método vem sendo utilizado desde a primeira máquina comercializada de tomografia computadorizada.

Para introduzir essa técnica usamos como exemplo o seguinte sistema linear de três

equações ( $M = 3$ ) e duas incógnitas ( $N = 2$ ):

$$\begin{cases} L_1 : x_1 + x_2 = 2 \\ L_2 : x_1 - 2x_2 = -2 \\ L_3 : 3x_1 - x_2 = 3 \end{cases} \quad (5)$$

As retas  $L_1, L_2$  e  $L_3$  determinadas por estas equações estão esboçadas no plano  $x_1x_2$ . Essas três retas não tem uma intersecção comum, como mostra Figura 9:

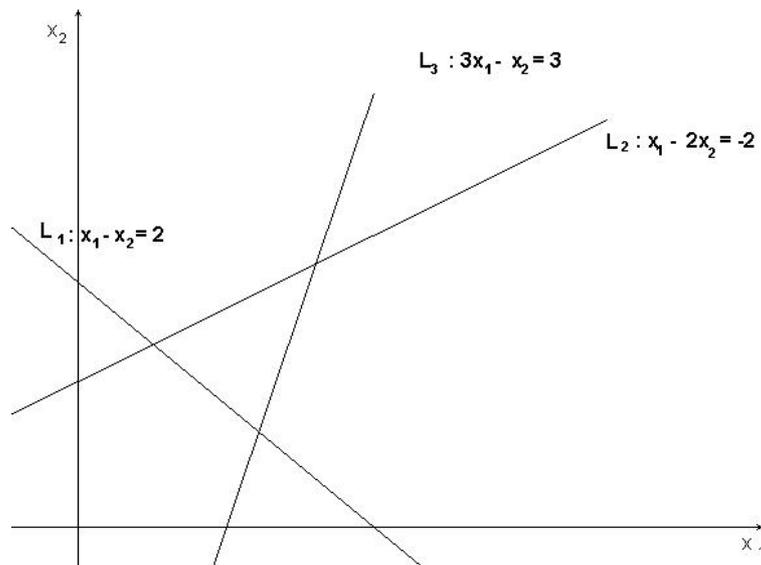


FIGURA 9: As retas  $L_1, L_2$  e  $L_3$ .

Isto significa que esse sistema linear não tem uma solução exata. Contudo, os pontos  $(x_1, x_2)$  do triângulo determinado por  $L_1, L_2$  e  $L_3$  podem ser considerados soluções aproximadas do sistema, pois estão situados “perto” dessas três retas. O seguinte procedimento iterativo descreve uma construção geométrica para gerar pontos na fronteira dessa região triangular:

### 3.1 O Algoritmo no Caso Bidimensional

**Passo 1:** Escolha um ponto inicial  $\mathbf{x}_0$  arbitrário no plano  $x_1x_2$ .

**Passo 2:** Projete  $\mathbf{x}_0$  ortogonalmente sobre a primeira reta  $L_1$  e chame a projeção de  $\mathbf{x}_1^{(1)}$ . O sobrescrito (1) indica que esta é a primeira de uma sucessão de rodadas do algoritmo.

**Passo 3:** Projete  $\mathbf{x}_1^{(1)}$  ortogonalmente sobre a segunda reta  $L_2$  e chame a projeção de  $\mathbf{x}_2^{(1)}$ .

**Passo 4:** Projete  $\mathbf{x}_2^{(1)}$  ortogonalmente sobre a terceira reta  $L_3$  e chame a projeção de  $\mathbf{x}_3^{(1)}$ .

**Passo 5:** Tome  $\mathbf{x}_3^{(1)}$  como o novo valor de  $\mathbf{x}_0$  repita a rodada de passos de 2 a 4. Na segunda rodada, chame os pontos projetados de  $\mathbf{x}_1^{(2)}, \mathbf{x}_2^{(2)}$  e  $\mathbf{x}_3^{(2)}$ ; na terceira rodada chame os pontos projetados de  $\mathbf{x}_1^{(3)}, \mathbf{x}_2^{(3)}$  e  $\mathbf{x}_3^{(3)}$  e assim por diante (Figura 10):

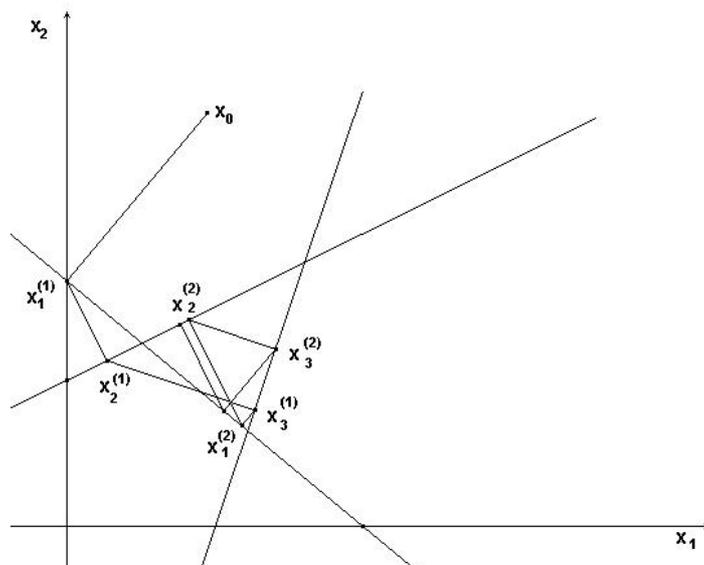


FIGURA 10: *Os primeiros passos do algoritmo.*

Este algoritmo gera três seqüências de pontos:

$$\begin{aligned} & \mathbf{x}_1^{(1)}, \mathbf{x}_1^{(2)}, \mathbf{x}_1^{(3)} \dots \\ & \mathbf{x}_2^{(1)}, \mathbf{x}_2^{(2)}, \mathbf{x}_2^{(3)} \dots \\ & \mathbf{x}_3^{(1)}, \mathbf{x}_3^{(2)}, \mathbf{x}_3^{(3)} \dots \end{aligned}$$

que estão nas três retas  $L_1$ ,  $L_2$  e  $L_3$ , respectivamente. Pode ser mostrado que, sempre que as três retas não são paralelas, a primeira seqüência converge a um ponto  $\mathbf{x}_1^*$  de  $L_1$ , a segunda converge a um ponto  $\mathbf{x}_2^*$  de  $L_2$  e a terceira a um ponto  $\mathbf{x}_3^*$  de  $L_3$  (Figura 11). Estes três pontos limites formam o que se chama um *ciclo-limite* do processo iterativo. Pode ser mostrado que o ciclo-limite independe do ponto inicial  $\mathbf{x}_0$ .

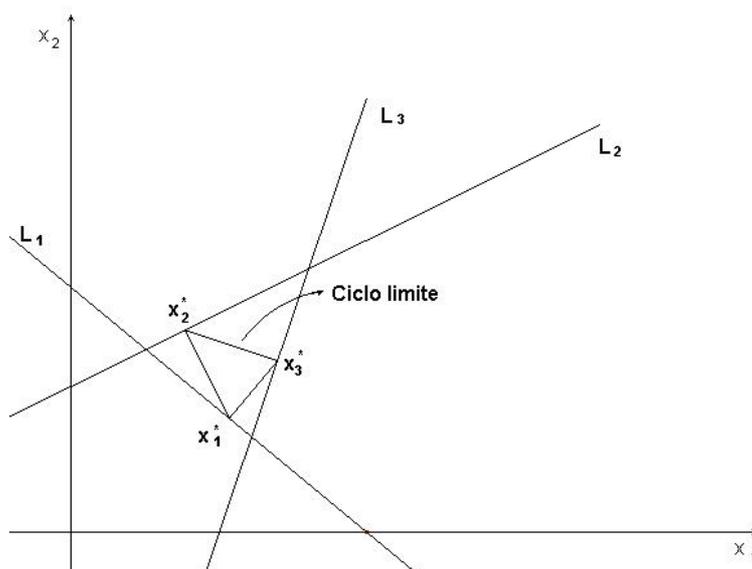


FIGURA 11: *Ciclo limite.*

A seguir estudamos as fórmulas específicas necessárias para aplicar a projeção ortogonal do algoritmo acima. Primeiro expressamos a equação:

$$a_1x_1 + a_2x_2 = b$$

da reta no espaço  $x_1x_2$  em forma vetorial por:

$$\mathbf{a}^t \mathbf{x} = b,$$

sendo:

$$\mathbf{a} = \begin{bmatrix} a_1 \\ a_2 \end{bmatrix} \text{ e } \mathbf{x} = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}.$$

O teorema a seguir fornece a expressão da projeção.

**Teorema 3.1** (*fórmula da projeção ortogonal*) *Sejam  $L$  uma reta em  $\mathbb{R}^2$  de equação  $\mathbf{a}^t \mathbf{x} = b$  e  $\mathbf{x}^*$  um ponto qualquer de  $\mathbb{R}^2$  (Figura 12). Então a projeção ortogonal  $\mathbf{x}_p$  de  $\mathbf{x}^*$  sobre  $L$  é dada por*

$$\mathbf{x}_p = \mathbf{x}^* + \frac{(b - \mathbf{a}^t \mathbf{x}^*)}{\mathbf{a}^t \mathbf{a}} \mathbf{a}.$$

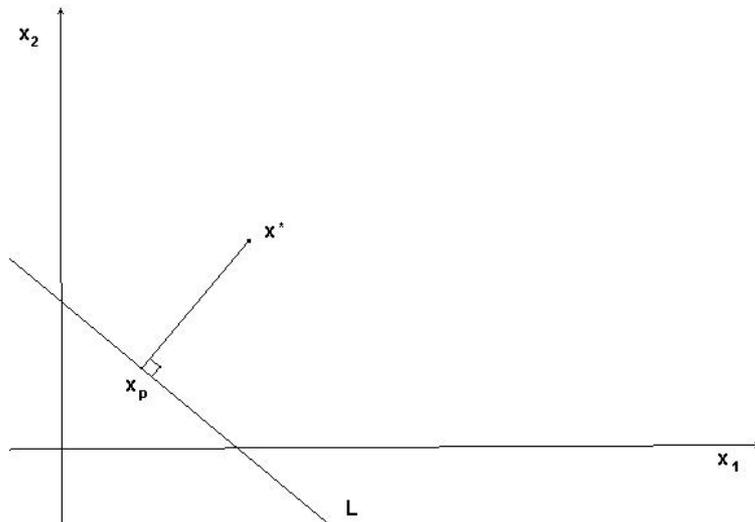


FIGURA 12: A projeção ortogonal de um ponto em uma reta.

**Demonstração**

Antes de demonstrarmos o teorema, convém estabelecer uma expressão para a projeção ortogonal de um vetor na direção de outro. Para tanto, consideremos a projeção ortogonal de  $\vec{u}$  na direção de  $\vec{v}$ :

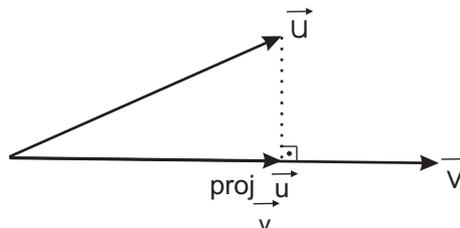


FIGURA 13: Projeção ortogonal de um vetor na direção de outro.

Seja  $\alpha \vec{v}$  a projeção ortogonal de  $\vec{u}$  na direção de  $\vec{v}$ . Definimos  $\vec{w}$  como sendo (Figura 14):

$$\vec{w} = \vec{u} - \alpha \vec{v}. \tag{6}$$

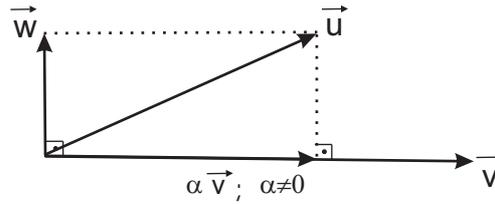


FIGURA 14: O produto escalar de  $\vec{w}$  por  $\vec{v}$  é nulo.

Assim, temos que  $\vec{w}$  e  $\vec{v}$  são ortogonais. Logo, o produto escalar de  $\vec{w}$  por  $\alpha\vec{v}$  é nulo, ou seja:

$$\vec{w} \cdot (\alpha\vec{v}) = 0. \quad (7)$$

Logo, de (6) e (7) temos:

$$\begin{aligned} (\vec{u} - \alpha\vec{v}) \cdot (\alpha\vec{v}) &= 0 \Rightarrow \\ \vec{u} \cdot (\alpha\vec{v}) - (\alpha\vec{v}) \cdot (\alpha\vec{v}) &= 0 \Rightarrow \\ \alpha(\vec{u} \cdot \vec{v}) - \alpha^2(\vec{v} \cdot \vec{v}) &= 0 \Rightarrow \\ \vec{u} \cdot \vec{v} - \alpha(\vec{v} \cdot \vec{v}) &= 0 \Rightarrow \\ \vec{u} \cdot \vec{v} &= \alpha(\vec{v} \cdot \vec{v}) \Rightarrow \\ \alpha &= \frac{\vec{u} \cdot \vec{v}}{\vec{v} \cdot \vec{v}} \end{aligned}$$

Mas  $\alpha\vec{v} = \text{proj}_{\vec{v}} \vec{u}$ , o que implica:

$$\text{proj}_{\vec{v}} \vec{u} = \frac{\vec{u} \cdot \vec{v}}{\vec{v} \cdot \vec{v}} \vec{v}$$

Vamos à demonstração do teorema propriamente dita.

Sejam:

$$\mathbf{a} = \begin{bmatrix} a_1 \\ a_2 \end{bmatrix} \text{ e } \mathbf{x} = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix},$$

logo, a equação geral  $a_1x_1 + a_2x_2 = b$  de uma reta no plano pode ser escrita na forma

$$\mathbf{a}^t \mathbf{x} = b \Rightarrow \begin{bmatrix} a_1 & a_2 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = b$$

O vetor  $\tilde{\mathbf{a}}^t = (a_1, a_2)$  é ortogonal à reta  $\mathbf{a}^t \mathbf{x} = b$ .

Sejam  $\tilde{\mathbf{x}}^*$  um vetor qualquer do plano cartesiano e  $\tilde{\mathbf{x}}_p$  sua projeção ortogonal na reta  $L$  de equação vetorial  $\mathbf{a}^t \mathbf{x} = b$ .

Assim, utilizando projeções, (Figura 15):

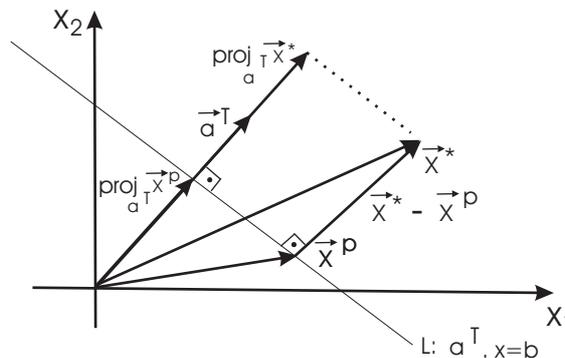


FIGURA 15: Projeções ortogonais.

podemos escrever:

$$\begin{aligned}\tilde{\mathbf{x}}^* - \tilde{\mathbf{x}}_p &= \text{proj}_{\tilde{\mathbf{a}}^t} \tilde{\mathbf{x}}^* - \text{proj}_{\tilde{\mathbf{a}}^t} \tilde{\mathbf{x}}_p \\ &= \frac{\tilde{\mathbf{x}}^* \cdot \tilde{\mathbf{a}}^t}{\tilde{\mathbf{a}}^t \cdot \tilde{\mathbf{a}}^t} \tilde{\mathbf{a}}^t - \frac{\tilde{\mathbf{x}}_p \cdot \tilde{\mathbf{a}}^t}{\tilde{\mathbf{a}}^t \cdot \tilde{\mathbf{a}}^t} \tilde{\mathbf{a}}^t\end{aligned}$$

Na notação matricial, podemos escrever a equação vetorial acima como a equação matricial abaixo:

$$\begin{aligned}\mathbf{x}^* - \mathbf{x}_p &= \frac{\mathbf{a}^t \mathbf{x}^*}{\mathbf{a}^t \mathbf{a}} \mathbf{a} - \frac{\mathbf{a}^t \mathbf{x}_p}{\mathbf{a}^t \mathbf{a}} \mathbf{a} \\ &= \left( \frac{\mathbf{a}^t \mathbf{x}^*}{\mathbf{a}^t \mathbf{a}} - \frac{\mathbf{a}^t \mathbf{x}_p}{\mathbf{a}^t \mathbf{a}} \right) \mathbf{a}\end{aligned}$$

Mas  $\mathbf{x}_p$  pertence à reta  $L$ , logo,  $\mathbf{x}_p$  satisfaz a equação da reta  $L$ :  $\mathbf{a}^t \mathbf{x}_p = b$ . Assim:

$$\begin{aligned}\mathbf{x}^* - \mathbf{x}_p &= \left( \frac{\mathbf{a}^t \mathbf{x}^*}{\mathbf{a}^t \mathbf{a}} - \frac{b}{\mathbf{a}^t \mathbf{a}} \right) \mathbf{a} \Rightarrow \\ \mathbf{x}_p &= \mathbf{x}^* + \left( \frac{b - \mathbf{a}^t \mathbf{x}^*}{\mathbf{a}^t \mathbf{a}} \right) \mathbf{a},\end{aligned}$$

como queríamos. □

### 3.2 Um Exemplo

Podemos utilizar o algoritmo no caso bidimensional para obter uma solução aproximada do sistema linear sobredeterminado:

$$\begin{cases} L_1 : x_1 + x_2 = 2 \\ L_2 : x_1 - 2x_2 = -2 \\ L_3 : 3x_1 - x_2 = 3 \end{cases} .$$

Escrevendo as equações das três retas na forma vetorial:

$$\begin{aligned}L_1 : \mathbf{a}_1^t \mathbf{x} &= b_1 \\ L_2 : \mathbf{a}_2^t \mathbf{x} &= b_2 \\ L_3 : \mathbf{a}_3^t \mathbf{x} &= b_3\end{aligned}$$

sendo:

$$\mathbf{x} = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{a}_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{a}_2 = \begin{bmatrix} 1 \\ -2 \end{bmatrix} \quad \text{e} \quad \mathbf{a}_3 = \begin{bmatrix} 3 \\ -1 \end{bmatrix},$$

obtemos pelo Teorema 3.1 a expressão:

$$\mathbf{x}_k^{(p)} = \mathbf{x}_{k-1}^{(p)} + \frac{b_k - \mathbf{a}_k^t \mathbf{x}_{k-1}^{(p)}}{\mathbf{a}_k^t \mathbf{a}_k} \mathbf{a}_k; \quad k = 1, 2, 3$$

para o esquema iterativo do algoritmo acima, sendo  $p = 1$  para a primeira rodada de iteração,  $p = 2$  para a segunda rodada de iteração e assim por diante. Ao fim de cada ciclo de iterações, ou seja, depois de calcular  $\mathbf{x}_3^{(p)}$ , iniciamos o ciclo seguinte com  $\mathbf{x}_0$  tomado como  $\mathbf{x}_3^{(p)}$ .

Começemos com  $\mathbf{x}_0 = \mathbf{x}_0^{(1)} = (1, 3)$ .

Logo, utilizando a expressão acima temos:

$$\mathbf{x}_1^{(1)} = \begin{bmatrix} 1 \\ 3 \end{bmatrix} + \frac{2 - \begin{bmatrix} 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 3 \end{bmatrix}}{\begin{bmatrix} 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}} \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 2 \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{x}_2^{(1)} = \begin{bmatrix} 0 \\ 2 \end{bmatrix} + \frac{-2 - \begin{bmatrix} 1 & -2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ 2 \end{bmatrix}}{\begin{bmatrix} 1 & -2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ -2 \end{bmatrix}} \begin{bmatrix} 1 \\ -2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0,4 \\ 1,2 \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{x}_3^{(1)} = \begin{bmatrix} 0,4 \\ 1,2 \end{bmatrix} + \frac{3 - \begin{bmatrix} 3 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0,4 \\ 1,2 \end{bmatrix}}{\begin{bmatrix} 3 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 3 \\ -1 \end{bmatrix}} \begin{bmatrix} 3 \\ -1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1,3 \\ 0,9 \end{bmatrix}$$

Prosseguindo, temos os dados da Tabela 1:

	$x_1$	$x_2$
$\mathbf{x}_0$	1,00000	3,00000
$\mathbf{x}_1^{(1)}$	0,00000	2,00000
$\mathbf{x}_2^{(1)}$	0,40000	1,20000
$\mathbf{x}_3^{(1)}$	1,30000	0,90000
$\mathbf{x}_1^{(2)}$	1,20000	0,80000
$\mathbf{x}_2^{(2)}$	0,88000	1,44000
$\mathbf{x}_3^{(2)}$	1,42000	1,26000
$\mathbf{x}_1^{(3)}$	1,08000	0,92000
$\mathbf{x}_2^{(3)}$	0,83200	1,41600
$\mathbf{x}_3^{(3)}$	1,40800	1,22400
$\mathbf{x}_1^{(4)}$	1,09200	0,90800
$\mathbf{x}_2^{(4)}$	0,83680	1,41840
$\mathbf{x}_3^{(4)}$	1,40920	1,22760
$\mathbf{x}_1^{(5)}$	1,09080	0,90920
$\mathbf{x}_2^{(5)}$	0,83632	1,41816
$\mathbf{x}_3^{(5)}$	1,40908	1,22724
$\mathbf{x}_1^{(6)}$	1,09092	0,90908
$\mathbf{x}_2^{(6)}$	0,83637	1,41818
$\mathbf{x}_3^{(6)}$	1,40909	1,22728

É possível mostrar, usando técnicas de Análise, que a seqüência de pontos em  $L_1$ ,  $L_2$  e  $L_3$  converge para os vértices do ciclo limite cujas coordenadas possuem os seguintes

valores exatos:

$$\begin{aligned}\mathbf{x}_1^* &= \left( \frac{12}{11}, \frac{10}{11} \right) = (1,0909\dots, 0,90909\dots) \\ \mathbf{x}_2^* &= \left( \frac{46}{55}, \frac{78}{55} \right) = (0,83636\dots, 1,41818\dots) \\ \mathbf{x}_3^* &= \left( \frac{31}{22}, \frac{27}{22} \right) = (1,40909\dots, 1,22727\dots)\end{aligned}$$

Pode ser observado que na sexta rodada do algoritmo obtemos uma excelente aproximação do ciclo limite. Portanto, uma das três iteradas  $\mathbf{x}_1^{(6)}$ ,  $\mathbf{x}_2^{(6)}$  ou  $\mathbf{x}_3^{(6)}$  (ou qualquer ponto no interior do triângulo com esses vértices) pode ser usada como uma solução aproximada do sistema linear.

### 3.3 O Algoritmo Generalizado

Para generalizar o algoritmo do caso bidimensional de tal modo que se aplique a sistemas sobredeterminados quaisquer:

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \dots + a_{1n}x_n = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \dots + a_{2n}x_n = b_2 \\ \vdots \\ a_{M1}x_1 + a_{M2}x_2 + \dots + a_{MN}x_n = b_M \end{cases} \quad (8)$$

de  $M$  equações e  $N$  incógnitas, introduzimos as matrizes coluna  $\mathbf{x}$  e  $\mathbf{a}_i$  como segue:

$$\mathbf{x} = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix}, \quad \mathbf{a}_i = \begin{bmatrix} a_{i1} \\ a_{i2} \\ \vdots \\ a_{in} \end{bmatrix}, \quad i = 1, 2, \dots, M.$$

Com estas matrizes, as  $M$  equações que constituem o nosso sistema linear (8) podem ser escritas em formato matricial como:

$$\mathbf{a}_i^t \mathbf{x} = b_i; \quad i = 1, 2, \dots, M.$$

Cada uma dessas  $M$  equações define o que é chamado um hiperplano no espaço euclidiano  $N$ -dimensional,  $\mathbb{R}^n$ . Em geral, estes hiperplanos não têm intersecção comum e assim procuramos um ponto que esteja “razoavelmente” próximo de todos os hiperplanos. Um tal ponto será uma solução aproximada do sistema linear e suas  $N$  entradas determinarão densidades de pixel aproximadas com as quais formamos a imagem da seção transversal desejada.

Como no caso bidimensional, introduzimos um processo iterativo que gera ciclos de sucessivas projeções ortogonais sobre os  $M$  hiperplanos a partir de um ponto arbitrário do  $\mathbb{R}^n$ . Denotamos estas sucessivas iteradas por:

$$\mathbf{x}_k^{(p)} = \left( \begin{array}{l} \text{A iterada pertence ao } k\text{-ésimo hiperplano} \\ \text{gerado durante o } p\text{-ésimo ciclo de iterações} \end{array} \right)$$

Os resultados que vimos no caso bidimensional valem para o caso  $N$ -dimensional e o algoritmo é como segue:

**Passo 1:** Escolha um ponto  $\mathbf{x}_0$  arbitrário do  $\mathbb{R}^n$ .

**Passo 2:** Para a primeira rodada, tome  $p = 1$ .

**Passo 3:** Para  $k = 1, 2, \dots, M$ , calcule:

$$\mathbf{x}_k^{(p)} = \mathbf{x}_{k-1}^{(p)} + \frac{b_k - \mathbf{a}_k^t \mathbf{x}_{k-1}^{(p)}}{\mathbf{a}_k^t \mathbf{a}_k} \mathbf{a}_k.$$

**Passo 4:** Denote  $\mathbf{x}_0^{(p+1)} = \mathbf{x}_m^{(p)}$ .

**Passo 5:** Aumente o número da rodada  $p$  por 1 e retorne ao passo 3.

No passo 3, a iterada  $\mathbf{x}_k^{(p)}$  é chamada a projeção ortogonal de  $\mathbf{x}_{k-1}^{(p)}$  sobre o hiperplano  $\mathbf{a}_k^t \mathbf{x} = b_k$ . Conseqüentemente, como no caso bidimensional, este algoritmo determina uma seqüência de projeções ortogonais de um hiperplano sobre o seguinte até chegar ao último, quando então retornamos, cada vez, voltando a projetar sobre o primeiro.

Pode ser mostrado que se os vetores  $\tilde{\mathbf{a}}_1, \tilde{\mathbf{a}}_2, \dots, \tilde{\mathbf{a}}_n$  geram o  $\mathbb{R}^n$ , então a iteradas  $\mathbf{x}_k^{(1)}, \mathbf{x}_k^{(2)}, \mathbf{x}_k^{(3)}, \dots$  no  $k$ -ésimo hiperplano convergem a um ponto  $\mathbf{x}_k^*$  naquele hiperplano, que não depende da escolha do ponto inicial  $\mathbf{x}_0$ .

Na tomografia computadorizada é escolhida uma das iteradas  $\mathbf{x}_k^{(p)}$ , com  $p$  suficientemente grande, como uma solução aproximada do sistema linear para as densidades de *pixel*.

Observe que para o *método do centro de pixel*, a quantidade escalar  $\mathbf{a}_k^t \mathbf{a}_k$  que aparece na equação do passo 3 do algoritmo é simplesmente o número de *pixels* nos quais o  $k$ -ésimo feixe passa pelo centro. Analogamente, note que a quantidade escalar  $b_k - \mathbf{a}_k^t \mathbf{x}_{k-1}^{(p)}$  naquela mesma equação pode ser interpretada como o excesso de densidade que resulta do  $k$ -ésimo feixe se as densidades de **pixel** são tomadas como sendo iguais às entradas de  $\mathbf{x}_{k-1}^{(p)}$ . Isto fornece a seguinte interpretação do nosso esquema de iteração do tipo TRA para o *método do centro de pixel*: Gere a densidade de *pixel* de cada iterada distribuindo o excesso de densidade de feixe de sucessivos feixes do “escaneamento” de maneira uniforme entre aqueles *pixels* nos quais o feixe passa pelo centro. Quando for alcançado o último feixe do “escaneamento”, retorne ao primeiro feixe e continue.

### 3.4 Mais um Exemplo

Podemos usar o algoritmo generalizado para obter as densidades de *pixel* desconhecidas dos nove *pixels* que estão dispostos na Figura 16. Estes nove *pixels* ( $N = 9$ ) são “escaneados”, usando o modo paralelo, com doze feixes ( $M = 12$ ) cujas densidades de feixe são medidas e indicadas na Figura 16:

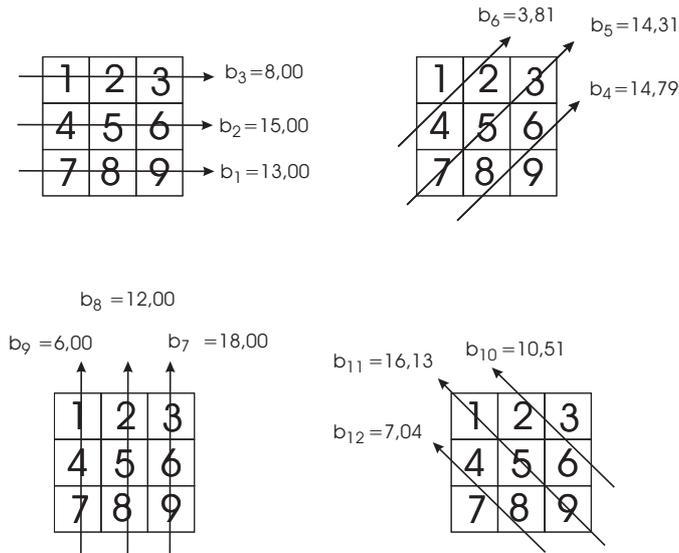


FIGURA 16: Os feixes de raios X e suas medidas no detector.

Escolhemos o *método do centro de pixel* para montar as doze equações. Como pode ser conferido, as equações de feixe são:

$$\left\{ \begin{array}{l} x_7 + x_8 + x_9 = 13,00 \\ x_4 + x_5 + x_6 = 15,00 \\ x_1 + x_2 + x_3 = 8,00 \\ x_6 + x_8 + x_9 = 14,79 \\ x_3 + x_5 + x_7 = 14,31 \\ x_1 + x_2 + x_4 = 3,81 \\ x_3 + x_6 + x_9 = 18,00 \\ x_2 + x_5 + x_8 = 12,00 \\ x_1 + x_4 + x_7 = 6,00 \\ x_2 + x_3 + x_3 = 10,51 \\ x_1 + x_5 + x_9 = 16,13 \\ x_4 + x_7 + x_8 = 7,04 \end{array} \right.$$

Utilizando a fórmula proposta pelo algoritmo generalizado:

$$\mathbf{x}_k^{(p)} = \mathbf{x}_{k-1}^{(p)} + \frac{b_k - \mathbf{a}_k^t \mathbf{x}_{k-1}^{(p)}}{\mathbf{a}_k^t \mathbf{a}_k} \mathbf{a}_k,$$

montamos a seguinte tabela:

	$x_1$	$x_2$	$x_3$	$x_4$	$x_5$	$x_6$	$x_7$	$x_8$	$x_9$
$\mathbf{x}_0$	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00
$\mathbf{x}_1^{(1)}$	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	4,33	4,33	4,33
$\mathbf{x}_2^{(1)}$	0,00	0,00	0,00	5,00	5,00	5,00	4,33	4,33	4,33
$\mathbf{x}_3^{(1)}$	2,67	2,67	2,67	5,00	5,00	5,00	4,33	4,33	4,33
$\mathbf{x}_4^{(1)}$	2,67	2,67	2,67	5,00	5,00	5,37	4,33	4,71	4,71
$\mathbf{x}_5^{(1)}$	2,67	2,67	3,34	5,00	5,77	5,37	5,10	4,71	4,71
$\mathbf{x}_6^{(1)}$	0,49	0,49	3,34	2,83	5,77	5,37	5,10	4,71	4,71
$\mathbf{x}_7^{(1)}$	0,49	0,49	4,93	2,83	5,77	6,87	5,10	4,71	6,20
$\mathbf{x}_8^{(1)}$	0,49	0,84	4,93	2,83	6,11	6,87	5,10	5,05	6,20
$\mathbf{x}_9^{(1)}$	-0,31	0,84	4,93	2,02	6,11	6,87	4,30	5,05	6,20
$\mathbf{x}_{10}^{(1)}$	-0,31	0,13	4,22	2,02	6,11	6,16	4,30	5,05	6,20
$\mathbf{x}_{11}^{(1)}$	1,06	0,13	4,22	2,02	7,49	6,16	4,30	5,05	7,58
$\mathbf{x}_{12}^{(1)}$	1,06	0,13	4,22	0,58	7,49	6,16	2,85	3,61	7,58
$\mathbf{x}_{12}^{(2)}$	2,03	0,69	4,42	1,34	7,49	5,39	2,65	3,04	6,61
$\mathbf{x}_{12}^{(3)}$	1,78	0,51	4,52	1,26	7,49	5,48	2,56	3,22	6,86
$\mathbf{x}_{12}^{(4)}$	1,82	0,52	4,62	1,37	7,49	5,37	2,45	3,22	6,82
$\mathbf{x}_{12}^{(5)}$	1,79	0,49	4,71	1,43	7,49	5,31	2,37	3,25	6,85
$\mathbf{x}_{12}^{(10)}$	1,68	0,44	5,03	1,70	7,49	5,03	2,04	3,29	6,96
$\mathbf{x}_{12}^{(20)}$	1,49	0,48	5,29	2,00	7,49	4,73	1,79	3,25	7,15
$\mathbf{x}_{12}^{(30)}$	1,38	0,55	5,34	2,11	7,49	4,62	1,74	3,19	7,26
$\mathbf{x}_{12}^{(40)}$	1,33	0,59	5,33	2,14	7,49	4,59	1,75	3,15	7,31
$\mathbf{x}_{12}^{(45)}$	1,32	0,60	5,32	2,15	7,49	4,59	1,76	3,14	7,32

A tabela acima ilustra os resultados do esquema iterativo começando com uma iterada inicial  $\mathbf{x}_0 = \mathbf{0}$ . A tabela fornece os valores de cada uma das iteradas da primeira rodada,  $\mathbf{x}_1^{(1)}$  até  $\mathbf{x}_{12}^{(1)}$ , mas depois disto fornece as iteradas somente de  $\mathbf{x}_{12}^{(p)}$  para alguns valores de  $p$ . As iteradas  $\mathbf{x}_{12}^{(p)}$  começam a se repetir até duas casas decimais para  $p \geq 45$ , de modo que tomamos as entradas de  $\mathbf{x}_{12}^{(45)}$  como um valor aproximado das nove densidades de *pixel*.

A área de tomografia computadorizada é, atualmente, uma área de pesquisa bastante ativa. Na verdade, o esquema de TRA discutido aqui já foi substituído, nos sistemas comerciais, por técnicas mais sofisticadas que são mais rápidas e fornecem uma visão mais acurada da secção transversal. Contudo, todas as novas técnicas remontam ao mesmo problema matemático básico: encontrar uma boa solução aproximada de um sistema sobredeterminado e inconsistente constituído de uma grande quantidade de equações lineares.

## 4 O Problema da Exposição Excessiva à Radiação na Tomografia Computadorizada

Embora esse assunto final não seja de cunho matemático, encerramos esse trabalho com algumas palavras sobre a questão do excesso de radiação ao qual um paciente está exposto em sessões de tomografia computadorizada. Obviamente não se discute a utilidade que a tomografia computadorizada representa na medicina moderna (tanto que Godfrey Hounsfield ganhou o prêmio Nobel de Medicina em 1979), no entanto, há um lado negativo nessa tecnologia.

Em 1º. de setembro de 2004 a agência inglesa de notícias BBC ([www.bbc.co.uk](http://www.bbc.co.uk)) traz uma reportagem intitulada “**Tomografia computadorizada pode causar câncer**”, cujo conteúdo segue abaixo:

*Tomografias computadorizadas do corpo inteiro expõem pacientes a níveis de radiação semelhantes aos das bombas atômicas lançadas sobre Hiroshima na Segunda Guerra Mundial, afirmam cientistas da Universidade de Columbia, nos Estados Unidos. O exame usa uma forma de radiação que pode detectar sinais de câncer e outras doenças. Mas ela também pode causar câncer, segundo a pesquisa da Universidade de Columbia publicada no jornal especializado Radiation.*

*Os cientistas pedem para que pessoas saudáveis não se submetam ao exame como parte de seus check-ups rotineiros, mas afirmam que para quem tem sintomas de alguma doença, os benefícios da tomografia computadorizada compensam de longe os riscos de exposição à radiação. Nos Estados Unidos, e em menor escala no Reino Unido, mais e mais pessoas saudáveis e sem nenhum sintoma se submetem ao exame - algumas vezes anualmente - como prevenção.*

*O médico David Brenner e seus colegas estimaram os riscos de repetidas tomografias usando dados sobre as vítimas de radiação depois do lançamento de bombas atômicas em Hiroshima e Nagasaki, em 1945. A dose de radiação estimada no estômago e nos pulmões em uma tomografia de corpo inteiro é próxima à recebida por alguns dos sobreviventes dos bombardeios, que foram expostos à radiação mínima durante as explosões atômicas. Sabe-se que, por causa da radiação, esses sobreviventes sofrem maior risco de câncer, o que, para os cientistas, sugere que um risco semelhante advém das tomografias de corpo inteiro.*

*“Nossa pesquisa prova definitivamente que o risco de radiação está associado à tomografia de corpo inteiro”, disse Brenner. Eles estimam que se uma pessoa de 45 anos fizer uma tomografia, o risco de desenvolver câncer como resultado seria uma chance em 1,2 mil. Mas se a mesma pessoa passar pelo exame todos os anos, durante 30 anos, este risco sobre para uma chance a cada 50.*

## Referências

- [1] ANTON, H & RORRES, C. *Álgebra Linear com Aplicações*. 8a. ed. Porto Alegre: Bookman. 2001.
- [2] BOLDRINI, J. L. ET ALLI. *Álgebra Linear*. 3a. ed. Rio de Janeiro: Harbra. 1986.
- [3] BOULOS, P. & CAMARGO, I. *Geometria Analítica: um tratamento vetorial*. 2a. ed. São Paulo: McGraw-Hill. 1987.