

# Cálculo de Seqüentes e Linguagem Visual para DL

Eunice Palmeira da Silva

Orientador: Fred Freitas  
Universidade Federal de Pernambuco

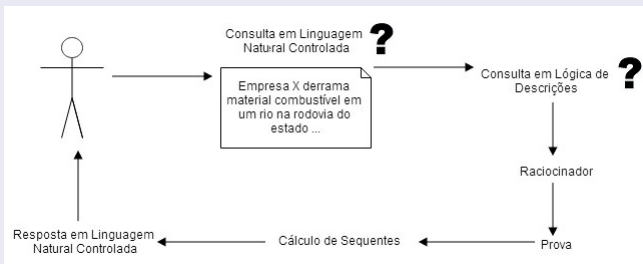
4 de fevereiro de 2014

# Roteiro

- 1 Introdução
  - Overview do Trabalho do Doutorado
- 2 Cálculo de Sequentes
  - Cálculo de Sequentes para ALC
- 3 Linguagem Visual para DL
  - Tipos de Linguagens Visual
  - Model Outlines
- 4 Considerações Finais
- 5 Referências

# Introdução

## Overview do Plano de Trabalho do Doutorado



# Cálculo de Sequentes - CS

## Cálculo de Sequentes - CS

- Foi apresentado por Gerhard Gentzen em 1934 como uma técnica para provar consistência da lógica de predicados [Pfe99].
- Possibilitou a demonstração do Teorema da Eliminação do Corte, garantindo que toda prova pode ser transformada em uma prova normal, ou seja, uma dedução sem a presença da regra do corte [dR10].
- Seus conceitos são amplamente aplicados nos campos de Teoria da Prova, Lógica Matemática e Dedução Automática [Wik13].
- Favorecem a produção de explicações em linguagem natural a partir de provas [RH08].

# Cálculo de Sequentes - CS

## Definição

- Sistema dedutivo na forma:  $\Gamma \Rightarrow \Delta$
- $\Gamma = \{A_1, A_2, \dots, A_n\}, \Delta = \{B_1, B_2, \dots, B_m\}$

Onde:

$\Gamma$  e  $\Delta$  são *sequências* finitas de fórmulas

A e B denotam fórmulas

## Interpretação

$$A_1, \dots, A_n \Rightarrow B_1, \dots, B_m$$

$$A_1 \wedge \dots \wedge A_n \Rightarrow B_1 \vee \dots \vee B_m$$

## Linguagem

- Possui  $\{\rightarrow, \wedge, \vee, \forall, \exists, \neg\}$  além dos usuais símbolos não lógicos.

[dR10, RH08, Med03, Wik13]

# Cálculo de Sequentes - CS

## Inferência

- Uma prova no CS é uma sequência de sequentes, onde cada um dos sequentes é derivável de sequentes que apareceram anteriormente na sequência, utilizando regras [Wik13].

Existem 4 tipos de inferências:

- Axioma
- Regra do Corte
- Regras Lógicas
- Regras Estruturais

# Cálculo de Sequentes - CS

## Inferência

- Axioma:  $A \Rightarrow A$
- Regra do Corte:

$$\frac{\Gamma_1 \Rightarrow \Delta_1, A \quad A, \Gamma_2 \Rightarrow \Delta_2}{\Gamma_1, \Gamma_2 \Rightarrow \Delta_1 \Delta_2}$$

## Teorema da Eliminação do Corte

Todos os usos da regra do corte podem ser eliminados de uma prova, implicando que qualquer sequente provável pode ser dada uma prova livre do corte.

[dR10, Med03, Pfe99, Wik13]

## Regras Lógicas

$$(L\wedge) \frac{A, B, \Gamma \Rightarrow \Delta}{A \wedge B, \Gamma \Rightarrow \Delta}$$

$$(R\wedge) \frac{\Gamma_1 \Rightarrow \Delta, A \quad \Gamma_2 \Rightarrow \Delta, B}{\Gamma_1, \Gamma_2 \Rightarrow \Delta, A \wedge B}$$

$$(L\vee) \frac{A, \Gamma_1 \Rightarrow \Delta \quad B, \Gamma_2 \Rightarrow \Delta}{A \vee B, \Gamma_1, \Gamma_2 \Rightarrow \Delta}$$

$$(R\vee) \frac{\Gamma \Rightarrow \Delta, A, B}{\Gamma \Rightarrow \Delta, A \vee B}$$

$$(L\rightarrow) \frac{\Gamma_1 \Rightarrow \Delta_1, A \quad B, \Gamma_2 \Rightarrow \Delta_2}{A \rightarrow B, \Gamma_1, \Gamma_2 \Rightarrow \Delta_1, \Delta_2}$$

$$(R\rightarrow) \frac{A, \Gamma \Rightarrow \Delta, B}{\Gamma \Rightarrow \Delta, A \rightarrow B}$$

$$(L\sim) \frac{\Gamma \Rightarrow \Delta, A}{\sim A, \Gamma \Rightarrow \Delta}$$

$$(R\sim) \frac{A, \Gamma \Rightarrow \Delta}{\Gamma \Rightarrow \Delta, \sim A}$$

$$(L\forall) \frac{A(x/t), \Gamma \Rightarrow \Delta}{\forall x A, \Gamma \Rightarrow \Delta}$$

$$(R\forall) \frac{\Gamma \Rightarrow \Delta, A(x/y)}{\Gamma \Rightarrow \Delta, \forall x A}$$

$$(L\exists) \frac{A(x/y), \Gamma \Rightarrow \Delta}{\exists x A, \Gamma \Rightarrow \Delta}$$

$$(R\exists) \frac{\Gamma \Rightarrow \Delta, A(x/t)}{\Gamma \Rightarrow \Delta, \exists x A}$$



## Regras Estruturais

$$(LW) \frac{\Gamma \Rightarrow \Delta}{A, \Gamma \Rightarrow \Delta}$$

$$(LP) \frac{\Gamma_1, A, B, \Gamma_2 \Rightarrow \Delta}{\Gamma_1, B, A, \Gamma_2 \Rightarrow \Delta}$$

$$(LC) \frac{A, A, \Gamma \Rightarrow \Delta}{A, \Gamma \Rightarrow \Delta}$$

$$(RW) \frac{\Gamma \Rightarrow \Delta}{\Gamma \Rightarrow \Delta, A}$$

$$(RP) \frac{\Gamma \Rightarrow \Delta_1, A, B, \Delta_2}{\Gamma \Rightarrow \Delta_1, B, A, \Delta_2}$$

$$(RC) \frac{\Gamma \Rightarrow \Delta, A, A}{\Gamma \Rightarrow \Delta, A}$$

### Legenda

LW/RW: Weakening Left/Right

LP/RP: Permutation Left/Right

LC/RC: Contraction Left/Right

[dR10, Med03, Pfe99, Wik13]

# Cálculo de Sequentes para ALC

## Motivação

- Extração de conteúdo computacional de provas ALC (*Attributive concept Language with Complements*).
- Permitir o uso de linguagem natural para representar prova de sistema de dedução natural.  
[Rad10, RAH07]

# Cálculo de Sequentes para ALC

## ALC e $S_{ALC}$

- ALC é uma DL básica que obedece a sintaxe:

$$\phi_c ::= \perp \mid A \mid \neg\phi_c \mid \phi_c \sqcap \phi_c \mid \phi_c \sqcup \phi_c \mid \exists R.\phi_c \mid \forall R.\phi_c$$

- $S_{ALC}$  é baseado na extensão de ALC para conceitos rotulados.
- Rótulos são uma lista de funções com quantificadores existenciais ou universais. Sua sintaxe é dada por:

$$L \rightarrow \forall R, L \mid \exists R, L \mid \emptyset$$

$$\phi_{lc} \rightarrow L\phi_c$$

- $\exists R_2.\forall Q_2.\exists R_1.\forall Q_1.\alpha$  é equivalente a  $\exists R_2.\forall Q_2.\exists R_1.\forall Q_1.\alpha$ .

[Rad10]

# Cálculo de Sequentes para ALC

$\frac{}{\alpha \Rightarrow \alpha}$	$\frac{}{\perp \Rightarrow \alpha}$
$\frac{\Delta \Rightarrow \Gamma}{\Delta, \delta \Rightarrow \Gamma} \text{ weak-l}$	$\frac{\Delta \Rightarrow \Gamma}{\Delta \Rightarrow \Gamma, \gamma} \text{ weak-r}$
$\frac{\Delta, \delta, \delta \Rightarrow \Gamma}{\Delta, \delta \Rightarrow \Gamma} \text{ contraction-l}$	$\frac{\Delta \Rightarrow \Gamma, \gamma, \gamma}{\Delta \Rightarrow \Gamma, \gamma} \text{ contraction-r}$
$\frac{\Delta_1, \delta_1, \delta_2, \Delta_2 \Rightarrow \Gamma}{\Delta_1, \delta_2, \delta_1, \Delta_2 \Rightarrow \Gamma} \text{ perm-l}$	$\frac{\Delta \Rightarrow \Gamma_1, \gamma_1, \gamma_2, \Gamma_2}{\Delta \Rightarrow \Gamma_1, \gamma_2, \gamma_1, \Gamma_2} \text{ perm-r}$
$\frac{\Delta_1 \Rightarrow \Gamma_1, L\alpha \quad L\alpha, \Delta_2 \Rightarrow \Gamma_2}{\Delta_1, \Delta_2 \Rightarrow \Gamma_1, \Gamma_2} \text{ cut}$	

The System  $SC_{ALC}$ : structural rules

[Rad10]

# Cálculo de Sequentes para ALC

$\frac{\Delta, {}^{L,VR}\alpha \Rightarrow \Gamma}{\Delta, {}^L(\forall R.\alpha) \Rightarrow \Gamma} \forall\text{-l}$	$\frac{\Delta \Rightarrow \Gamma, {}^{L,VR}\alpha}{\Delta \Rightarrow \Gamma, {}^L(\forall R.\alpha)} \forall\text{-r}$
$\frac{\Delta, {}^{L,\exists R}\alpha \Rightarrow \Gamma}{\Delta, {}^L(\exists R.\alpha) \Rightarrow \Gamma} \exists\text{-l}$	$\frac{\Delta \Rightarrow \Gamma, {}^{L,\exists R}\alpha}{\Delta \Rightarrow \Gamma, {}^L(\exists R.\alpha)} \exists\text{-r}$
$\frac{\Delta, {}^{\forall L}\alpha, {}^{\forall L}\beta \Rightarrow \Gamma}{\Delta, {}^{\forall L}(\alpha \sqcap \beta) \Rightarrow \Gamma} \sqcap\text{-l}$	$\frac{\Delta \Rightarrow \Gamma, {}^{\forall L}\alpha \quad \Delta \Rightarrow \Gamma, {}^{\forall L}\beta}{\Delta \Rightarrow \Gamma, {}^{\forall L}(\alpha \sqcap \beta)} \sqcap\text{-r}$
$\frac{\Delta, {}^{\exists L}\alpha \Rightarrow \Gamma \quad \Delta, {}^{\exists L}\beta \Rightarrow \Gamma}{\Delta, {}^{\exists L}(\alpha \sqcup \beta) \Rightarrow \Gamma} \sqcup\text{-l}$	$\frac{\Delta \Rightarrow \Gamma, {}^{\exists L}\alpha, {}^{\exists L}\beta}{\Delta \Rightarrow \Gamma, {}^{\exists L}(\alpha \sqcup \beta)} \sqcup\text{-r}$
$\frac{\Delta \Rightarrow \Gamma, {}^{\neg L}\alpha}{\Delta, {}^L\neg\alpha \Rightarrow \Gamma} \neg\text{-l}$	$\frac{\Delta, {}^{\neg L}\alpha \Rightarrow \Gamma}{\Delta \Rightarrow \Gamma, {}^L\neg\alpha} \neg\text{-r}$
$\frac{\delta \Rightarrow \Gamma}{+\exists R\delta \Rightarrow +\exists R\Gamma} \text{prom-}\exists$	$\frac{\Delta \Rightarrow \gamma}{+\forall R\Delta \Rightarrow +\forall R\gamma} \text{prom-}\forall$

The System  $SC_{ALC}$ : logical rules

[Rad10]

# Cálculo de Sequentes para ALC

$$\exists child. \top \sqcap \forall child. \neg(\exists child. \neg Doctor) \sqsubseteq \exists child. \forall child. Doctor \quad (1)$$

$$\begin{array}{c}
 \frac{Doctor \Rightarrow Doctor}{\forall child \, Doctor \Rightarrow \forall child \, Doctor} \text{prom-}\forall \\
 \frac{\forall child \, Doctor \Rightarrow \forall child \, Doctor}{\top, \forall child \, Doctor \Rightarrow \forall child \, Doctor} \text{weak-}l \\
 \frac{\top, \forall child \, Doctor \Rightarrow \forall child \, Doctor}{\top \Rightarrow \exists child \, \neg Doctor, \forall child \, Doctor} \neg\text{-}r \\
 \frac{\top \Rightarrow \exists child \, \neg Doctor, \forall child \, Doctor}{\top \Rightarrow \exists child. \neg Doctor, \forall child \, Doctor} \exists\text{-}r \\
 \frac{\top \Rightarrow \exists child. \neg Doctor, \forall child \, Doctor}{\exists child \, \top \Rightarrow \exists child (\exists child. \neg Doctor), \exists child, \forall child \, Doctor} \text{prom-}\exists \\
 \frac{\exists child \, \top, \forall child \, \neg(\exists child. \neg Doctor) \Rightarrow \exists child, \forall child \, Doctor}{\exists child \, \top, \forall child \, \neg(\exists child. \neg Doctor) \Rightarrow \exists child \forall child \, Doctor} \forall\text{-}l \\
 \frac{\exists child \, \top, \forall child \, \neg(\exists child. \neg Doctor) \Rightarrow \exists child \forall child \, Doctor}{\exists child \, \top, \forall child \, \neg(\exists child. \neg Doctor) \Rightarrow \exists child. \forall child \, Doctor} \exists\text{-}r \\
 \frac{\exists child \, \top, \forall child \, \neg(\exists child. \neg Doctor) \Rightarrow \exists child. \forall child \, Doctor}{\exists child \, \top, \forall child. \neg(\exists child. \neg Doctor) \Rightarrow \exists child. \forall child \, Doctor} \forall\text{-}l \\
 \frac{\exists child \, \top, \forall child. \neg(\exists child. \neg Doctor) \Rightarrow \exists child. \forall child \, Doctor}{\exists child. \top, \forall child. \neg(\exists child. \neg Doctor) \Rightarrow \exists child. \forall child \, Doctor} \exists\text{-}l \\
 \frac{\exists child. \top, \forall child. \neg(\exists child. \neg Doctor) \Rightarrow \exists child. \forall child \, Doctor}{\exists child. \top \sqcap \forall child. \neg(\exists child. \neg Doctor) \Rightarrow \exists child. \forall child \, Doctor} \sqcap\text{-}l
 \end{array}$$

[Rad10]

# Cálculo de Sequentes para ALC

$$\exists child. \top \sqcap \forall child. \neg(\exists child. \neg Doctor) \sqsubseteq \exists child. \forall child. Doctor \quad (1)$$

$$\begin{array}{c}
 \frac{\frac{Doctor \Rightarrow Doctor}{\forall child \, Doctor \Rightarrow \forall child \, Doctor} \text{ prom-}\forall}{\top, \forall child \, Doctor \Rightarrow \forall child \, Doctor} \text{ weak-}\forall \\
 \hline
 \frac{\top \Rightarrow \exists child \, \neg Doctor, \forall child \, Doctor}{\top \Rightarrow \exists child. \neg Doctor, \forall child \, Doctor} \neg\text{-r} \\
 \hline
 \frac{\top \Rightarrow \exists child. \neg Doctor, \forall child \, Doctor}{\exists child \, \top \Rightarrow \exists child (\exists child. \neg Doctor), \exists child, \forall child \, Doctor} \exists\text{-r} \\
 \hline
 \frac{\exists child \, \top \Rightarrow \exists child (\exists child. \neg Doctor), \exists child, \forall child \, Doctor}{\exists child \, \top, \forall child \, \neg(\exists child. \neg Doctor) \Rightarrow \exists child, \forall child \, Doctor} \text{ prom-}\exists \\
 \hline
 \frac{\exists child \, \top, \forall child \, \neg(\exists child. \neg Doctor) \Rightarrow \exists child, \forall child \, Doctor}{\exists child \, \top, \forall child \, \neg(\exists child. \neg Doctor) \Rightarrow \exists child \forall child. Doctor} \neg\text{-l} \\
 \hline
 \frac{\exists child \, \top, \forall child \, \neg(\exists child. \neg Doctor) \Rightarrow \exists child \forall child. Doctor}{\exists child \, \top, \forall child \, \neg(\exists child. \neg Doctor) \Rightarrow \exists child \forall child. Doctor} \forall\text{-l} \\
 \hline
 \frac{\exists child \, \top, \forall child \, \neg(\exists child. \neg Doctor) \Rightarrow \exists child \forall child. Doctor}{\exists child \, \top, \forall child \, \neg(\exists child. \neg Doctor) \Rightarrow \exists child \forall child. Doctor} \exists\text{-r} \\
 \hline
 \frac{\exists child \, \top, \forall child \, \neg(\exists child. \neg Doctor) \Rightarrow \exists child \forall child. Doctor}{\exists child \, \top, \forall child. \neg(\exists child. \neg Doctor) \Rightarrow \exists child \forall child. Doctor} \forall\text{-l} \\
 \hline
 \frac{\exists child \, \top, \forall child. \neg(\exists child. \neg Doctor) \Rightarrow \exists child \forall child. Doctor}{\exists child. \top, \forall child. \neg(\exists child. \neg Doctor) \Rightarrow \exists child \forall child. Doctor} \exists\text{-l} \\
 \hline
 \frac{\exists child. \top, \forall child. \neg(\exists child. \neg Doctor) \Rightarrow \exists child \forall child. Doctor}{\exists child. \top \sqcap \forall child. \neg(\exists child. \neg Doctor) \Rightarrow \exists child \forall child. Doctor} \sqcap\text{-l}
 \end{array}$$

← vírgula deve ser embaixo  
 ← r

## Cálculo de Sequentes para ALC - Propriedades

O SC com as regras demonstradas é *correto* e *completo*.

### Lema: Corretude

Se um sequente é provável, então ele é válido.

Se  $\Gamma \models A$  então  $\Gamma \vdash A$

### Teorema: Completude

Cada sequente válido é provável.

$\Gamma \vdash A$  se, e somente se,  $\Gamma \models A$

[Gal85]



# Soluções de Visualização

Formas de representar descrições de conceito de uma forma amigável:

- Substituição de símbolos lógicos em DL por palavras-chave (Manchester OWL)
- Geração automática de paráfrases em linguagem natural de descrições conceito (ACE - Attempto Controlled English)
- Uso de representações com diagramas (GrOWL)

[Ama09]

## Exemplo

### Exemplo

Indivíduos que têm apenas os médicos e não-advogados como netos.

### DL

$$\begin{aligned} & \exists hasChild. \top \\ & \sqcap \forall hasChild. \\ & \quad \neg((\exists hasChild. \neg Doctor) \\ & \quad \sqcup (\exists hasChild. Lawyer)) \end{aligned}$$

### Leitura

*" Indivíduos que possuem um ou mais filhos, tal que estes filhos por sua vez não têm filhos que não são doutores e nem filhos que são advogados" .*

[Ama09]

# Modelos de Visualização

$\exists \text{hasChild}.\top$   
 $\square \forall \text{hasChild}.$   
 $\neg((\exists \text{hasChild}.\neg \text{Doctor})$   
 $\sqcup (\exists \text{hasChild}.\text{Lawyer}))$

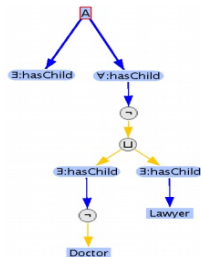
(a) DL

*(hasChild* **SOME** *Thing)* **AND**  
*hasChild* **ONLY NOT**  
 ((*hasChild* **SOME NOT** *Doctor*)  
**OR** (*hasChild* **SOME** *Lawyer*)))

(b) Manchester-OWL

*Every A hasChilds something. No A hasChilds something that hasChilds something that is not a Doctor or that hasChilds a Lawyer.*

(c) ACE



(d) GrOWL

# Model Outlines

## Definição

Framework de visualização para descrições conceituais em DL (*ALCN*), com mais ênfase sobre a semântica das descrições do que na sua sintaxe.

## Motivação

- Muitos usuários de ontologias formais não tem formação em lógica;
- Representação amigável das descrições conceituais;
- As soluções propostas focam mais na sintaxe de DL e oferecem pouca ajuda no entendimento semântico das descrições.

[Ama09]

# Model Outlines

## Justificativa

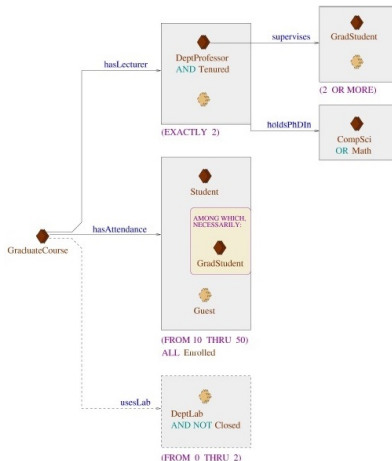
- Se afasta da tradição de diagramas baseados em sintaxe
- Utiliza a estratégia de visualização orientada a semântica
- Permite aos usuários obter uma percepção mais profunda sobre o significado das descrições, evitando erros de projeto ou de interpretação

## Modelo



[Ama09, Ama08]

# Model Outlines: Sintaxe e Semântica



- Grupo de diamantes: uma ou mais instâncias
- Único diamante: apenas uma instância
- Diamantes sólidos: instâncias que devem existir
- Diamantes tracejados: instâncias opcionais
- Setas: relações
- Diamantes sólidos: instâncias que devem existir
- Diamantes tracejados: instâncias opcionais
- Rótulos de caixa: conjunções ou disjunções de literais [Ama09]

# Algoritmo para Tradução de Descrições de Conceitos em ALCN para Model outlines



Figure 1: Correct Margherita pizza specification



Figure 2: Incorrect Margherita pizza specification



Figure 3: Incorrect Margherita pizza specification

[Ama08]

# Considerações Finais

## 1 Geral

- 1 Os usuários precisam confiar nas respostas fornecidas pelos sistemas;
- 2 A chave para a confiança é o entendimento. Entendimento pode ser obtido fornecendo: origem da informação, o que foi usado para deduzir, como foi deduzido e explicações em uma linguagem compreensível aos usuários. [MP04]

## 2 Model Outlines

- 1 Sintaxe abstrata;
- 2 Similaridade a de linguagens de programação;
- 3 Mantém parte de expressões de conceito nos rótulos e caixas;
- 4 Frágil clareza semântica que diferencia as linhas contínuas das tracejadas nos objetos e setas;
- 5 Pouco intuitivo ao público em geral;

## 3 Melhor Linguagem?



## Referências



Fernando Náufel Amaral.

Visualizing the semantics (not the syntax) of concept descriptions, 2008.



Fernando Náufel Amaral.

Model Outlines: a Visual Language for DL Concept Descriptions.  
*Semantic Web Journal*, 2009.



Ana Claudia de Jesus Golzio and Angela Pereira Rodrigues.

A Lógica TK em Dedução Natural, Cálculo de Sequentes e Tableaux.

*Kínesis*, II(04):285–311, 2010.



Jean H. Gallier.

*Logic for computer science: foundations of automatic theorem proving*.

Harper & Row Publishers, Philadelphia, 1985.



Maria da Paz Nunes Medeiros.

Teoria da Prova, 2003.



Deborah L McGuinness and Paulo Pinheiro Da Silva.

Explaining answers from the Semantic Web: the Inference Web approach.

*Web Semantics Science Services and Agents on the World Wide Web*, 1(4):397–413, 2004.



Frank Pfenning.

*Automated Theorem Proving*.

Carnegie Mellon University, 1999.



Alexandre Rademaker.

*A Proof Theory for Description Logics*.

PhD thesis, Pontifícia Universidade Católica do Rio de Janeiro - PUC Rio, 2010.



Alexandre Rademaker, Fernando N. do Amaral Amaral, and Edward Hermann Haeusler.

A Sequent Calculus for ALC. Monografia em Ciência da Computação.

Technical report, PUC-Rio, Rio de Janeiro, 2007.



Alexandre Rademaker and Edward Hermann Haeusler.

Toward Short and Structural ALC-Reasoning Explanations: A Sequent Calculus Approach, 2008.



Wikipedia.

Sequent Calculus, 2013.