

Fundamentos: Algoritmos, Inteiros e Matrizes

Centro de Informática
UFPE

1 Inteiros e Algoritmos

Representação dos Inteiros

- $5263 = 5000 + 200 + 60 + 3$

Representação dos Inteiros

- $5263 = 5000 + 200 + 60 + 3$
- $5263 = 5 \cdot 10^3 + 2 \cdot 10^2 + 6 \cdot 10^1 + 3 \cdot 10^0$

Representação dos Inteiros

Teorema

- Sejam $b > 1$ e $n > 0$ números inteiros.
- É possível expressar n de forma única como:

$$n = a_k b^k + a_{k-1} b^{k-1} + \dots + a_1 b^1 + a_0 b^0,$$

onde $k \geq 0$, a_0, a_1, \dots, a_k são maiores ou iguais a zero e menores que b , e $a_k \neq 0$.

- Exemplo. $5263 = 5 \cdot 10^3 + 2 \cdot 10^2 + 6 \cdot 10^1 + 3 \cdot 10^0$

Representação dos Inteiros

- $n = a_k b^k + a_{k-1} b^{k-1} + \dots + a_1 b^1 + a_0 b^0$
- Esta representação é a *expansão de n na base b* .
- Notação: $(a_k a_{k-1} \dots a_1 a_0)_b$
- Exemplo. $(5263)_{10} = 5263$
- Exercício. Qual a expansão de $(39.283)_{10}$?

Representação dos Inteiros

- $n = a_k b^k + a_{k-1} b^{k-1} + \dots + a_1 b^1 + a_0 b^0$
- Esta representação é a *expansão de n na base b* .
- Notação: $(a_k a_{k-1} \dots a_1 a_0)_b$
- Exemplo. $(5263)_{10} = 5263$
- Exercício. Qual a expansão de $(39.283)_{10}$?
- Resposta. $3 \cdot 10^4 + 9 \cdot 10^3 + 2 \cdot 10^2 + 8 \cdot 10^1 + 3 \cdot 10^0$

Representação dos Inteiros

- Computadores usam a base 2 ou base binária.
- Ou seja, apenas 2 símbolos são usados para representar os números: 0 e 1.
- Cada dígito é chamado de um *bit* (*Binary digIT*).

Representação dos Inteiros

- Computadores usam a base 2 ou base binária.
- Ou seja, apenas 2 símbolos são usados para representar os números: 0 e 1.
- Cada dígito é chamado de um *bit* (*Binary digIT*).
- Exemplo. $(110)_2 = 1 \cdot 2^2 + 1 \cdot 2^1 + 0 \cdot 2^0 = 4 + 2 + 0 = 6$

Representação dos Inteiros

- Computadores usam a base 2 ou base binária.
- Ou seja, apenas 2 símbolos são usados para representar os números: 0 e 1.
- Cada dígito é chamado de um *bit* (*Binary digIT*).
- Exemplo. $(110)_2 = 1 \cdot 2^2 + 1 \cdot 2^1 + 0 \cdot 2^0 = 4 + 2 + 0 = 6$
- Exercício. Qual o valor de $(11010)_2$?

Representação dos Inteiros

- Computadores usam a base 2 ou base binária.
- Ou seja, apenas 2 símbolos são usados para representar os números: 0 e 1.
- Cada dígito é chamado de um *bit* (*Binary digIT*).
- Exemplo. $(110)_2 = 1 \cdot 2^2 + 1 \cdot 2^1 + 0 \cdot 2^0 = 4 + 2 + 0 = 6$
- Exercício. Qual o valor de $(11010)_2$?
- Resposta.
 $1 \cdot 2^4 + 1 \cdot 2^3 + 0 \cdot 2^2 + 1 \cdot 2^1 + 0 \cdot 2^0 = 16 + 8 + 0 + 2 + 0 = 26$

Representação dos Inteiros

Exercício. Qual o valor na base 10 do número

- $(101)_2$?
- $(1010)_2$?
- $(1110101)_2$?

Representação dos Inteiros

- A base 16 ou hexadecimal também é bastante usada em Computação.
- Temos que utilizar 16 símbolos para os dígitos: 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, A, B, C, D, E e F.
- A representa o 10
- B representa o 11
- C representa o 12
- D representa o 13
- E representa o 14
- F representa o 15

Representação dos Inteiros

- $(A)_{16} = 10 \cdot 16^0 = 10$
- $(B)_{16} = 11 \cdot 16^0 = 11$
- $(B05)_{16} = 11 \cdot 16^2 + 0 \cdot 16^1 + 5 \cdot 16^0 = 2816 + 5 = 2821$
- Exercício. Qual o número $(9AF)_{16}$?

Representação dos Inteiros

- Sabemos converter de uma base para decimal.
- E o contrário?
- Por exemplo, qual a representação binária de $(18)_{10}$?

Representação dos Inteiros

- Sabemos converter de uma base para decimal.
- E o contrário?
- Por exemplo, qual a representação binária de $(18)_{10}$?
- Temos que achar valores 0 e 1 para a_0, a_1, \dots, a_k tal que $a_k 2^k + \dots + a_1 2^1 + a_0 2^0 = 18$

Representação dos Inteiros

Qual a representação binária de 18?

- $18 \cdot 2^0 = 18$

Representação dos Inteiros

Qual a representação binária de 18?

- $18 \cdot 2^0 = 18$
- Ok, mas... 18 não é nem 0 nem 1. O truque: dividir 18 por 2.
Temos: $18 = 9 \cdot 2 + 0$

Representação dos Inteiros

Qual a representação binária de 18?

- $18 \cdot 2^0 = 18$
- Ok, mas... 18 não é nem 0 nem 1. O truque: dividir 18 por 2.
Temos: $18 = 9 \cdot 2 + 0$
- Substituindo: $(9 \cdot 2 + 0) \cdot 2^0 = 9 \cdot 2^1 + 0 \cdot 2^0$

Representação dos Inteiros

Qual a representação binária de 18?

- $18 \cdot 2^0 = 18$
- Ok, mas... 18 não é nem 0 nem 1. O truque: dividir 18 por 2. Temos: $18 = 9 \cdot 2 + 0$
- Substituindo: $(9 \cdot 2 + 0) \cdot 2^0 = 9 \cdot 2^1 + 0 \cdot 2^0$
- Ok, mas... 9 não é nem 0 nem 1. O truque: dividir 9 por 2 de novo. Temos: $9 = 4 \cdot 2 + 1$

Representação dos Inteiros

Qual a representação binária de 18?

- $18 \cdot 2^0 = 18$
- Ok, mas... 18 não é nem 0 nem 1. O truque: dividir 18 por 2. Temos: $18 = 9 \cdot 2 + 0$
- Substituindo: $(9 \cdot 2 + 0) \cdot 2^0 = 9 \cdot 2^1 + 0 \cdot 2^0$
- Ok, mas... 9 não é nem 0 nem 1. O truque: dividir 9 por 2 de novo. Temos: $9 = 4 \cdot 2 + 1$
- $(4 \cdot 2 + 1) \cdot 2^1 + 0 \cdot 2^0 = 4 \cdot 2^2 + 1 \cdot 2^1 + 0 \cdot 2^0$

Representação dos Inteiros

Qual a representação binária de 18?

- $18 \cdot 2^0 = 18$
- Ok, mas... 18 não é nem 0 nem 1. O truque: dividir 18 por 2. Temos: $18 = 9 \cdot 2 + 0$
- Substituindo: $(9 \cdot 2 + 0) \cdot 2^0 = 9 \cdot 2^1 + 0 \cdot 2^0$
- Ok, mas... 9 não é nem 0 nem 1. O truque: dividir 9 por 2 de novo. Temos: $9 = 4 \cdot 2 + 1$
- $(4 \cdot 2 + 1) \cdot 2^1 + 0 \cdot 2^0 = 4 \cdot 2^2 + 1 \cdot 2^1 + 0 \cdot 2^0$
- Ok, mas... 4 não é nem 0 nem 1. Dividindo o 4 por 2 novamente, temos:
 $4 = 2 \cdot 2 + 0$.

Representação dos Inteiros

Qual a representação binária de 18?

- $18 \cdot 2^0 = 18$
- Ok, mas... 18 não é nem 0 nem 1. O truque: dividir 18 por 2.
Temos: $18 = 9 \cdot 2 + 0$
- Substituindo: $(9 \cdot 2 + 0) \cdot 2^0 = 9 \cdot 2^1 + 0 \cdot 2^0$
- Ok, mas... 9 não é nem 0 nem 1. O truque: dividir 9 por 2 de novo. Temos: $9 = 4 \cdot 2 + 1$
- $(4 \cdot 2 + 1) \cdot 2^1 + 0 \cdot 2^0 = 4 \cdot 2^2 + 1 \cdot 2^1 + 0 \cdot 2^0$
- Ok, mas... 9 não é nem 0 nem 1. Dividindo o 4 por 2 novamente, temos:
 $4 = 2 \cdot 2 + 0$.
- Substituindo:
 $(2 \cdot 2 + 0) \cdot 2^2 + 1 \cdot 2^1 + 0 \cdot 2^0 = 2 \cdot 2^3 + 0 \cdot 2^2 + 1 \cdot 2^1 + 0 \cdot 2^0$

Representação dos Inteiros

Qual a representação binária de 18?

- $18 \cdot 2^0 = 18$
- Ok, mas... 18 não é nem 0 nem 1. O truque: dividir 18 por 2. Temos: $18 = 9 \cdot 2 + 0$
- Substituindo: $(9 \cdot 2 + 0) \cdot 2^0 = 9 \cdot 2^1 + 0 \cdot 2^0$
- Ok, mas... 9 não é nem 0 nem 1. O truque: dividir 9 por 2 de novo. Temos: $9 = 4 \cdot 2 + 1$
- $(4 \cdot 2 + 1) \cdot 2^1 + 0 \cdot 2^0 = 4 \cdot 2^2 + 1 \cdot 2^1 + 0 \cdot 2^0$
- Ok, mas... 9 não é nem 0 nem 1. Dividindo o 4 por 2 novamente, temos:
 $4 = 2 \cdot 2 + 0$.
- Substituindo:
 $(2 \cdot 2 + 0) \cdot 2^2 + 1 \cdot 2^1 + 0 \cdot 2^0 = 2 \cdot 2^3 + 0 \cdot 2^2 + 1 \cdot 2^1 + 0 \cdot 2^0$
- Por fim: $2 = 1 \cdot 2 + 0$. Substituindo:
 $(1 \cdot 2 + 0) \cdot 2^2 + 0 \cdot 2^2 + 1 \cdot 2^1 + 0 \cdot 2^0 = 1 \cdot 2^4 + 0 \cdot 2^3 + 0 \cdot 2^2 + 1 \cdot 2^1 + 0 \cdot 2^0$

Representação dos Inteiros

- Qual a representação binária de 18?
- Resposta: 10010

Representação dos Inteiros

Algoritmo de conversão de $(n)_{10}$ para a base b

- Divida n por b . Obtenha $n = bq_0 + a_0$
 a_0 é o dígito mais à direita.
- Divida q_0 por b . Obtenha $q_0 = bq_1 + a_1$
 a_1 é o 2o dígito da direita para esquerda.
- Divida q_1 por b . Obtenha $q_1 = bq_2 + a_2$
 a_2 é o 3o dígito da direita para esquerda.
- Divida q_2 por b . Obtenha $q_2 = bq_3 + a_3$
 a_3 é o 4o dígito da direita para esquerda.
- ...

Pare quando o quociente for zero.

Representação dos Inteiros

Exemplo. Seja $n = (18)_{10}$.

- $18 = 2 \cdot 9 + 0$
- $9 = 2 \cdot 4 + 1$
- $4 = 2 \cdot 2 + 0$
- $2 = 2 \cdot 1 + 0$
- $1 = 2 \cdot 0 + 1$

Resultado: $(18)_{10} = (10010)_2$.

Note que $(10010)_2 = 1 \cdot 2^4 + 0 \cdot 2^3 + 0 \cdot 2^2 + 1 \cdot 2^1 + 0 \cdot 2^0 = 18$.

Representação dos Inteiros

Exemplo. Seja $n = (18)_{10}$.

- $18 = 2 \cdot 9 + 0$
- $9 = 2 \cdot 4 + 1$
- $4 = 2 \cdot 2 + 0$
- $2 = 2 \cdot 1 + 0$
- $1 = 2 \cdot 0 + 1$

Resultado: $(18)_{10} = (10010)_2$.

Note que $(10010)_2 = 1 \cdot 2^4 + 0 \cdot 2^3 + 0 \cdot 2^2 + 1 \cdot 2^1 + 0 \cdot 2^0 = 18$.

Representação dos Inteiros

Exercício. Qual a representação de $(326)_{10}$

- na base 2?
- na base 16?

Representação dos Inteiros

- É fácil converter da base **binária** para a **hexadecimal** e vice-versa.
- Basta convertermos cada grupo de 4 bits para 1 dígito hexadecimal.
- Exemplo. 0101 1101 0001
 5 D 1
- Exercício. Converta $(1010110110)_2$ para hexadecimal e $(ABCD)_{16}$ para binário.

Exercícios recomendados

- Seção 3.6: do 1 ao 10
- Discrete Mathematics and Its Applications
Kenneth Rosen, 6a edição