

Matemática Discreta

Prova Final / Segunda Chamada - 2015.1

Prof. Juliano Iyoda
Sistemas de Informação
28 de Julho de 2015

SUGESTÃO: Faça a prova a lápis

(Não é uma obrigação. É só uma sugestão.)

1. Sejam $A = \{3, 5\}$ e $B = \{x \mid \sqrt{x} \in A\}$.

a) $\{1, 7 \text{ pt}\}$ Calcule $A \times B$.

Resposta:

$$B = \{9, 25\} \text{ e } A \times B = \{(3, 9), (3, 25), (5, 9), (5, 25)\}.$$

b) $\{1, 7 \text{ pt}\}$ Calcule $\mathcal{P}(A \times B)$, o conjunto das partes de $A \times B$.

Resposta:

$$\begin{aligned} \mathcal{P}(A \times B) = & \{\emptyset, \\ & \{(3, 9)\}, \{(3, 25)\}, \{(5, 9)\}, \{(5, 25)\}, \\ & \{(3, 9), (3, 25)\}, \{(3, 9), (5, 9)\}, \{(3, 9), (5, 25)\} \\ & \{(3, 25), (5, 9)\}, \{(3, 25), (5, 25)\}, \\ & \{(5, 9), (5, 25)\}, \\ & \{(3, 9), (3, 25), (5, 9)\}, \{(3, 9), (3, 25), (5, 25)\}, \\ & \{(3, 9), (5, 9), (5, 25)\}, \{(3, 25), (5, 9), (5, 25)\}, \\ & \{(3, 9), (3, 25), (5, 9), (5, 25)\} \\ & \} \end{aligned}$$

2. $\{3, 3 \text{ pt}\}$ Dada a premissa $x \notin \bar{A}$. Conclua que $x \in (A \cup \emptyset)$. Justifique cada passo de prova com exatamente 1 equação da lista em anexo. A única exceção a esta regra é o uso de comutatividade e associatividade. Ou seja, as equações (10), (11), (12), (13), (73), (74), (75) e (76) podem ser usadas simultaneamente em 1 passo de prova.

Resposta:

- | | |
|-------------------------------|------------|
| 1. $x \notin \bar{A}$ | [Premissa] |
| 2. $x \in \overline{\bar{A}}$ | [65 em 1] |
| 3. $x \in A$ | [72 em 2] |
| 4. $x \in (A \cup \emptyset)$ | [66 em 5] |

3. $\{3, 3 \text{ pt}\}$ Prove por indução matemática que

$$3 \cdot 2^0 + 3 \cdot 2^1 + 3 \cdot 2^2 + \dots + 3 \cdot 2^n = 3 \cdot 2^{n+1} - 3$$

para todo $n \geq 0$.

Justifique seus passos de prova com “Aritmética”, “Hipótese de Indução” ou [100], onde a equação [100] é dada de graça abaixo:

$$3 \cdot 2^{k+1} + 3 \cdot 2^{k+1} = 3 \cdot 2^1 \cdot 2^{k+1} \quad [100]$$

Use, obrigatoriamente, a hipótese de indução.

Resposta:

Caso base.

$$\begin{aligned} & 3 \cdot 2^0 \\ &= 3 \cdot 1 \quad \text{[Aritmética]} \\ &= 3 \cdot (2 - 1) \quad \text{[Aritmética]} \\ &= 3 \cdot 2 - 3 \quad \text{[Aritmética]} \\ &= 3 \cdot 2^{0+1} - 3 \quad \text{[Aritmética]} \end{aligned}$$

Passo indutivo.

$$\begin{aligned} & 3 \cdot 2^0 + 3 \cdot 2^1 + 3 \cdot 2^2 + \dots + 3 \cdot 2^k + 3 \cdot 2^{k+1} \\ &= 3 \cdot 2^{k+1} - 3 + 3 \cdot 2^{k+1} \quad \text{[Hipótese de Indução]} \\ &= 3 \cdot 2^1 \cdot 2^{k+1} - 3 \quad \text{[100]} \\ &= 3 \cdot 2^{(k+1)+1} - 3 \quad \text{[Aritmética]} \end{aligned}$$

Rascunhos (opcional):

a) Qual o objetivo de prova do caso base?

Resposta: $3 \cdot 2^0 = 3 \cdot 2^{0+1} - 3$.

b) Prove o caso base.

Resposta:

$$\begin{aligned} & 3 \cdot 2^0 \\ &= 3 \cdot 1 \quad \text{[Aritmética]} \\ &= 3 \cdot (2 - 1) \quad \text{[Aritmética]} \\ &= 3 \cdot 2 - 3 \quad \text{[Aritmética]} \\ &= 3 \cdot 2^{0+1} - 3 \quad \text{[Aritmética]} \end{aligned}$$

c) Qual o objetivo de prova do passo indutivo?

Resposta:

$$3 \cdot 2^0 + 3 \cdot 2^1 + 3 \cdot 2^2 + \dots + 3 \cdot 2^k + 3 \cdot 2^{k+1} = 3 \cdot 2^{(k+1)+1} - 3$$

d) Qual a hipótese de indução?

Resposta:

$$3 \cdot 2^0 + 3 \cdot 2^1 + 3 \cdot 2^2 + \dots + 3 \cdot 2^k = 3 \cdot 2^{k+1} - 3$$

e) Prove o passo indutivo.

Resposta:

$$\begin{aligned} & 3 \cdot 2^0 + 3 \cdot 2^1 + 3 \cdot 2^2 + \dots + 3 \cdot 2^k + 3 \cdot 2^{k+1} \\ &= 3 \cdot 2^{k+1} - 3 + 3 \cdot 2^{k+1} \quad \text{[Hipótese de Indução]} \\ &= 3 \cdot 2^1 \cdot 2^{k+1} - 3 \quad \text{[100]} \\ &= 3 \cdot 2^{(k+1)+1} - 3 \quad \text{[Aritmética]} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \top &\equiv \neg\text{F} & (1) \\ \neg\top &\equiv \text{F} & (2) \\ p \wedge \top &\equiv p & (3) \\ p \vee \text{F} &\equiv p & (4) \\ p \vee \top &\equiv \top & (5) \\ p \wedge \text{F} &\equiv \text{F} & (6) \\ p \vee p &\equiv p & (7) \\ p \wedge p &\equiv p & (8) \\ \neg(\neg p) &\equiv p & (9) \\ p \vee q &\equiv q \vee p & (10) \\ p \wedge q &\equiv q \wedge p & (11) \\ (p \vee q) \vee r &\equiv p \vee (q \vee r) & (12) \\ (p \wedge q) \wedge r &\equiv p \wedge (q \wedge r) & (13) \\ p \vee (q \wedge r) &\equiv (p \vee q) \wedge (p \vee r) & (14) \\ p \wedge (q \vee r) &\equiv (p \wedge q) \vee (p \wedge r) & (15) \\ \neg(p \wedge q) &\equiv \neg p \vee \neg q & (16) \\ \neg(p \vee q) &\equiv \neg p \wedge \neg q & (17) \\ p \vee (p \wedge q) &\equiv p & (18) \\ p \wedge (p \vee q) &\equiv p & (19) \\ p \vee \neg p &\equiv \top & (20) \\ p \wedge \neg p &\equiv \text{F} & (21) \\ p \rightarrow q &\equiv \neg p \vee q & (22) \\ p \rightarrow q &\equiv \neg q \rightarrow \neg p & (23) \\ p \vee q &\equiv \neg p \rightarrow q & (24) \\ p \wedge q &\equiv \neg(p \rightarrow \neg q) & (25) \\ \neg(p \rightarrow q) &\equiv p \wedge \neg q & (26) \\ (p \rightarrow q) \wedge (p \rightarrow r) &\equiv p \rightarrow (q \wedge r) & (27) \\ (p \rightarrow r) \wedge (q \rightarrow r) &\equiv (p \vee q) \rightarrow r & (28) \\ (p \rightarrow q) \vee (p \rightarrow r) &\equiv p \rightarrow (q \vee r) & (29) \\ (p \rightarrow r) \vee (q \rightarrow r) &\equiv (p \wedge q) \rightarrow r & (30) \\ p \leftrightarrow q &\equiv (p \rightarrow q) \wedge (q \rightarrow p) & (31) \\ p \leftrightarrow q &\equiv \neg p \leftrightarrow \neg q & (32) \\ p \leftrightarrow q &\equiv (p \wedge q) \vee (\neg p \wedge \neg q) & (33) \\ \neg(p \leftrightarrow q) &\equiv p \leftrightarrow \neg q & (34) \\ \neg\exists x P(x) &\equiv \forall x \neg P(x) & (35) \\ \neg\forall x P(x) &\equiv \exists x \neg P(x) & (36) \\ \frac{p}{p \rightarrow q} & & (37) \\ \therefore q & & \\ \frac{\neg q}{p \rightarrow q} & & (38) \\ \therefore \neg p & & \\ \frac{p \rightarrow q}{q \rightarrow r} & & (39) \\ \therefore p \rightarrow r & & \\ \frac{p \vee q}{\neg p} & \quad \frac{p \vee q}{\neg q} & (40) \\ \therefore q & \quad \therefore p & \\ \frac{p}{\therefore p \vee q} & \quad \frac{p}{\therefore q \vee p} & (41) \end{aligned}$$

$$\frac{p \wedge q}{\therefore p} \quad \frac{p \wedge q}{\therefore q} \quad (42)$$

$$\frac{p}{q} \quad (43)$$

$$\therefore p \wedge q$$

$$\frac{p \rightarrow q}{\therefore \neg q \rightarrow \neg p} \quad (44)$$

$$\frac{p \vee q}{\neg p \vee r} \quad (45)$$

$$\therefore q \vee r$$

$$a \notin A \equiv \neg(a \in A) \quad (46)$$

$$\{x \mid x \in A\} = A \quad (47)$$

$$P(a) \equiv a \in \{x \mid P(x)\} \quad (48)$$

$$(A = B) \equiv \forall x(x \in A \leftrightarrow x \in B) \quad (49)$$

$$(A \subseteq B) \equiv \forall x(x \in A \rightarrow x \in B) \quad (50)$$

$$(A \subset B) \equiv \forall x(x \in A \rightarrow x \in B) \wedge \exists x(x \in B \wedge x \notin A) \quad (51)$$

$$\emptyset \subseteq S, \text{ para todo } S \quad (52)$$

$$\emptyset = \{x \mid \text{F}\} \quad (53)$$

$$x \in \emptyset \equiv \text{F} \quad (54)$$

$$S \subseteq S, \text{ para todo } S \quad (55)$$

$$(A \times \emptyset) = (\emptyset \times A) = \emptyset \quad (56)$$

$$A \cup B = \{x \mid x \in A \vee x \in B\} \quad (57)$$

$$(x \in A \vee x \in B) \equiv (x \in (A \cup B)) \quad (58)$$

$$A \cap B = \{x \mid (x \in A) \wedge (x \in B)\} \quad (59)$$

$$(x \in A \wedge x \in B) \equiv (x \in (A \cap B)) \quad (60)$$

$$|A \cup B| = |A| + |B| - |A \cap B| \quad (61)$$

$$A - B = \{x \mid x \in A \wedge x \notin B\} \quad (62)$$

$$(x \in A \wedge x \notin B) \equiv (x \in (A - B)) \quad (63)$$

$$\overline{A} = \{x \mid x \notin A\} \quad (64)$$

$$(x \notin A) \equiv (x \in \overline{A}) \quad (65)$$

$$A \cup \emptyset = A \quad (66)$$

$$A \cap U = A \quad (67)$$

$$A \cup U = U \quad (68)$$

$$A \cap \emptyset = \emptyset \quad (69)$$

$$A \cup A = A \quad (70)$$

$$A \cap A = A \quad (71)$$

$$\overline{(\overline{A})} = A \quad (72)$$

$$A \cup B = B \cup A \quad (73)$$

$$A \cap B = B \cap A \quad (74)$$

$$A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap C \quad (75)$$

$$A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup C \quad (76)$$

$$A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C) \quad (77)$$

$$A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C) \quad (78)$$

$$\overline{A \cup B} = \overline{A} \cap \overline{B} \quad (79)$$

$$\overline{A \cap B} = \overline{A} \cup \overline{B} \quad (80)$$

$$A \cup (A \cap B) = A \quad (81)$$

$$A \cap (A \cup B) = A \quad (82)$$

$$A \cup \overline{A} = U \quad (83)$$

$$A \cap \overline{A} = \emptyset \quad (84)$$