Matemática Discreta

Miniprova 3 - 2015.1

Prof. Juliano Iyoda
Sistemas de Informação
16 de Junho de 2015

SUGESTÃO: **Faça a prova a lápis**

(Não é uma obrigação. É só uma sugestão.)

1. $\{1,0\ pt\}$ Use o Teorema Chinês do Resto para encontrar uma solução para o sistema de equações abaixo. **Exiba seus cálculos**. Sugestão: teste seu resultado para ter certeza que calculou corretamente.

$$\begin{aligned} x &\equiv 9\ (mod\ 7) \\ x &\equiv 6\ (mod\ 4) \\ x &\equiv 4\ (mod\ 3) \end{aligned}$$

Para sua ajuda, segue abaixo a fórmula do Teorema Chinês do Resto. Em um sistema de equações

$$\begin{aligned} x &\equiv a_1\ (mod\ m_1) \\ x &\equiv a_2\ (mod\ m_2) \\ &\vdots \\ x &\equiv a_n\ (mod\ m_n) \end{aligned}$$

A solução é $x = a_1M_1y_1 + a_2M_2y_2 + \ldots + a_nM_ny_n$. Onde, $m = m_1m_2\ldots m_n$, $M_k = m/m_k$ e y_k é o inverso de M_k módulo m_k.

Resposta: Sejam $m = 7 \cdot 4 \cdot 3 = 84$, $M_1 = 4 \cdot 3 = 12$, $M_2 = 7 \cdot 3 = 21$, $M_3 = 4 \cdot 7 = 28$, $m_1 = 7$, $m_2 = 4$, $m_3 = 3$.
Cálculo de y_1 (inverso de 12 módulo 7). Pelo algoritmo de Euclides, sabemos que $12 = 7 \cdot 1 + 5$, $7 = 5 \cdot 1 + 2$ e $5 = 2 \cdot 2 + 1$. Substituindo $2 = 7 - 5 \cdot 1$ em $1 = 5 - 2 \cdot 2$, temos $1 = 5 - (7 - 5 \cdot 1) \cdot 2$, que é equivalente a $1 = 3 \cdot 5 - 2 \cdot 7$. Substituindo $5 = 12 - 7 \cdot 1$ em $1 = 3 \cdot 5 - 2 \cdot 7$, temos $1 = 3 \cdot (12 - 7 \cdot 1) - 2 \cdot 7$, que é equivalente a $1 = 3 \cdot 12 - 5 \cdot 7$. Portanto, $y_1 = 3$.

Cálculo de y_2 (inverso de 21 módulo 4). Pelo algoritmo de Euclides, sabemos que $21 = 4 \cdot 5 + 1$. Temos que $1 = 21 - 4 \cdot 5$. Ou seja, $y_2 = 1$.

Cálculo de y_3 (inverso de 28 módulo 3). Pelo algoritmo de Euclides, sabemos que $28 = 3 \cdot 9 + 1$. Temos que $1 = 28 - 3 \cdot 9$. Portanto, $y_3 = 1$.

$x = 9 \cdot 12 \cdot 3 + 6 \cdot 21 \cdot 1 + 4 \cdot 28 \cdot 1 = 324 + 126 + 112 = 562$.

2. $\{1,0\ pt\}$ Prove por indução matemática que

$$6 \cdot 1^2 + 6 \cdot 2^2 + 6 \cdot 3^2 + \ldots + 6 \cdot n^2 = n(n+1)(2n+1)$$

para todo $n > 0$.

Justifique seus passos de prova com “Aritmética”, “Hipótese de Indução” ou [100], onde a equação [100] é dada de graça abaixo:

$$x(x+1)(2x+1) + 6(x+1)^2 = (x+1)(x+2)(2x+3) \quad [100]$$

Use, obrigatoriamente, a hipótese de indução.

Resposta:

Caso base.

$$\begin{array}{ll} 6 \cdot 1^2 & \\ = 6 & [\text{Aritmética}] \\ = 1 \cdot 2 \cdot 3 & [\text{Aritmética}] \\ = 1 \cdot (1+1) \cdot (2 \cdot 1 + 1) & [\text{Aritmética}] \end{array}$$

Passo indutivo.

$$\begin{array}{lr} 6 \cdot 1^2 + 6 \cdot 2^2 + 6 \cdot 3^2 + \ldots + 6 \cdot k^2 + 6 \cdot (k+1)^2 & \\ = k(k+1)(2k+1) + 6(k+1)^2 & [\text{Hipótese de Indução}] \\ = (k+1)(k+2)(2k+3) & [100] \\ = (k+1)(k+2)(2k+2+1) & [\text{Aritmética}] \\ = (k+1)((k+1)+1)(2 \cdot (k+1)+1) & [\text{Aritmética}] \end{array}$$

Rascunhos (opcional):

a) Qual o objetivo de prova do caso base?
Resposta: $6 \cdot 1^2 = 1 \cdot (1+1) \cdot (2 \cdot 1 + 1)$.

b) Prove o caso base.
Resposta:

$$\begin{array}{ll} 6 \cdot 1^2 & \\ = 6 & [\text{Aritmética}] \\ = 1 \cdot 2 \cdot 3 & [\text{Aritmética}] \\ = 1 \cdot (1+1) \cdot (2 \cdot 1 + 1) & [\text{Aritmética}] \end{array}$$

c) Qual o objetivo de prova do passo indutivo?
Resposta:
$6 \cdot 1^2 + 6 \cdot 2^2 + 6 \cdot 3^2 + \ldots + 6 \cdot k^2 + 6 \cdot (k+1)^2 = (k+1)((k+1)+1)(2 \cdot (k+1)+1)$

d) Qual a hipótese de indução?
Resposta:
$6 \cdot 1^2 + 6 \cdot 2^2 + 6 \cdot 3^2 + \ldots + 6 \cdot k^2 = k(k+1)(2k+1)$

e)$\{0,40\ pt\}$ Prove o passo indutivo.
Resposta:

$$\begin{array}{lr} 6 \cdot 1^2 + 6 \cdot 2^2 + 6 \cdot 3^2 + \ldots + 6 \cdot k^2 + 6 \cdot (k+1)^2 & \\ = k(k+1)(2k+1) + 6(k+1)^2 & [\text{Hipótese de Indução}] \\ = (k+1)(k+2)(2k+3) & [100] \\ = (k+1)(k+2)(2k+2+1) & [\text{Aritmética}] \\ = (k+1)((k+1)+1)(2 \cdot (k+1)+1) & [\text{Aritmética}] \end{array}$$