# Matemática Discreta

## Miniprova 4 - 2014.2

Prof. Juliano Iyoda
Engenharia da Computação
04 de Fevereiro de 2015

## SUGESTÃO: **Faça a prova a lápis**

(Não é uma obrigação. É só uma sugestão.)

1. $\{1,3\ pt\}$ Prove por indução matemática que

$$1 \cdot 3 + 2 \cdot 4 + \ldots + n(n+2) \ = \ \frac{n(n+1)(2n+7)}{6}$$

para todo $n > 0$.

Justifique cada passo de prova com os termos [Aritmética], [Hipótese de Indução] ou a equação [100] dada abaixo:

$$\frac{k(k+1)(2k+7)+6(k+1)((k+1)+2)}{6} = \frac{(k+1)((k+1)+1)(2(k+1)+7)}{6} \quad [100]$$

Use, obrigatoriamente, a hipótese de indução.

**Resposta:**
Caso base.

$$\begin{array}{ll} 1 \cdot 3 & \\ = 3 & \text{[Aritmética]} \\ = \frac{18}{6} & \text{[Aritmética]} \\ = \frac{2(2 \cdot 1+7)}{6} & \text{[Aritmética]} \\ = \frac{1 \cdot (1+1)(2 \cdot 1+7)}{6} & \text{[Aritmética]} \end{array}$$

Passo Indutivo.

$$\begin{array}{ll} 1 \cdot 3 + 2 \cdot 4 + \ldots + k(k+2) + (k+1)((k+1)+2) & \\ = \frac{k(k+1)(2k+7)}{6} + (k+1)((k+1)+2) & \text{[Hipótese de Indução]} \\ = \frac{k(k+1)(2k+7)+6(k+1)((k+1)+2)}{6} & \text{[Aritmética]} \\ = \frac{(k+1)((k+1)+1)(2(k+1)+7)}{6} & [100] \end{array}$$

Rascunho (opcional)

**a)** Qual o objetivo de prova do caso base?
**Resposta:** $1 \cdot 3 = \frac{1(1+1)(2 \cdot 1+7)}{6}$

**b)** Prove o caso base.

**Resposta:**

$$\begin{aligned}
&1 \cdot 3 \\
&= 3 && \text{[Aritmética]} \\
&= \tfrac{18}{6} && \text{[Aritmética]} \\
&= \tfrac{2(2\cdot 1+7)}{6} && \text{[Aritmética]} \\
&= \tfrac{1\cdot(1+1)(2\cdot 1+7)}{6} && \text{[Aritmética]}
\end{aligned}$$

**c)** Qual o objetivo de prova do passo indutivo?

**Resposta:**

$1 \cdot 3 + 2 \cdot 4 + \ldots + k(k+2) + (k+1)((k+1)+2) = \frac{(k+1)((k+1)+1)(2(k+1)+7)}{6}$

**d)** Qual a hipótese de indução?

**Resposta:** $1 \cdot 3 + 2 \cdot 4 + \ldots + k(k+2) \ = \ \frac{k(k+1)(2k+7)}{6}$

**e)** Prove o passo indutivo.

**Resposta:**

$$\begin{aligned}
&1 \cdot 3 + 2 \cdot 4 + \ldots + k(k+2) + (k+1)((k+1)+2) \\
&= \tfrac{k(k+1)(2k+7)}{6} + (k+1)((k+1)+2) && \text{[Hipótese de Indução]} \\
&= \tfrac{k(k+1)(2k+7)+6(k+1)((k+1)+2)}{6} && \text{[Aritmética]} \\
&= \tfrac{(k+1)((k+1)+1)(2(k+1)+7)}{6} && \text{[100]}
\end{aligned}$$

2. $\{0,7\ pt\}$ Defina o conjunto

$$\begin{aligned}
S = \{&1, 10, 100, 1.000, 10.000, \ldots, \\
&2, 20, 200, 2.000, 20.000, \ldots, \\
&4, 40, 400, 4.000, 40.000, \ldots, \\
&8, 80, 800, 8.000, 80.000, \ldots, \\
&16, 160, 1.600, 16.000, 160.000, \ldots, \\
&32, 320, 3.200, 32.000, 320.000, \ldots, \\
&\ldots\}
\end{aligned}$$

de forma recursiva.

**Resposta:**

Passo base. $1 \in S$.

Passo recursivo 1. Se $x \in S$, então $2x \in S$.

Passo recursivo 2. Se $x \in S$, então $10x \in S$.

Regra da exclusão. Todos elementos de $S$ são provenientes do passo base e dos passos recursivos.