Matemática Discreta

Prova 2 - 2014.2

Prof. Juliano Iyoda
Engenharia da Computação
20 de Fevereiro de 2015

SUGESTÃO: **Faça a prova a lápis**

(Não é uma obrigação. É só uma sugestão.)

1. $\{2,0\ pt\}$ Seja $A = \{$"a","b","c","d","e",...,"z"$\}$ (A tem 26 elementos). Seja $R = \{(x,y) \in A^2 \mid$ x vem antes de y na ordem alfabética$\}$. Quantos elementos R tem? Calcule usando uma das técnicas de contagem ensinadas (Regra de Produto, Regra da Soma ou Princípio da Casa de Pombos).
   Resposta:
   Regra da soma. A letra "a" tem 25 sucessores, a letra "b" tem 24, "c" tem 23, ..., e a letra "z" tem 0. $|R| = 25 + 24 + 23 + \ldots + 0 = 325$.

2. $\{2,0\ pt\}$ Use o Teorema Chinês do Resto para encontrar uma solução para o sistema de equações abaixo. **Exiba seus cálculos**. Sugestão: teste seu resultado para ter certeza que calculou corretamente.

$$x \equiv 4\ (mod\ 3)$$
$$x \equiv 3\ (mod\ 4)$$
$$x \equiv 2\ (mod\ 5)$$

   Para sua ajuda, segue abaixo a fórmula do Teorema Chinês do Resto. Em um sistema de equações

$$\begin{aligned} x &\equiv a_1\ (mod\ m_1) \\ x &\equiv a_2\ (mod\ m_2) \\ &\vdots \\ x &\equiv a_n\ (mod\ m_n) \end{aligned}$$

   A solução é $x = a_1M_1y_1 + a_2M_2y_2 + \ldots + a_nM_ny_n$. Onde, $m = m_1m_2\ldots m_n$, $M_k = m/m_k$ e y_k é o inverso de M_k módulo m_k.

   Resposta: Sejam $m = 3 \cdot 4 \cdot 5 = 60$, $M_1 = 4 \cdot 5 = 20$, $M_2 = 3 \cdot 5 = 15$, $M_3 = 3 \cdot 4 = 12$, $m_1 = 3$, $m_2 = 4$, $m_5 = 5$.
   Cálculo de y_1 (inverso de 20 módulo 3). Pelo algoritmo de Euclides, sabemos que $20 = 3 \cdot 6 + 2$ e $3 = 2 \cdot 1 + 1$. Substituindo a primeira equação na segunda, temos que $1 = 4 \cdot 3 + (-1) \cdot 20$. Ou seja, $y_1 = -1$.
   Cálculo de y_2 (inverso de 15 módulo 4). Pelo algoritmo de Euclides, sabemos que $15 = 4 \cdot 3 + 3$ e $4 = 3 \cdot 1 + 1$. Substituindo a primeira equação na segunda, temos que $1 = 4 \cdot 4 + (-1) \cdot 15$. Ou seja, $y_2 = -1$.
   Cálculo de y_3 (inverso de 12 módulo 5). Pelo algoritmo de Euclides, sabemos que $12 = 5 \cdot 2 + 2$ e $5 = 2 \cdot 2 + 1$. Substituindo a primeira equação na segunda,

temos que $1 = 5 \cdot 5 + (-2) \cdot 12$. Ou seja, $y_3 = -2$.
Aplicando a fórmula, temos que $x = 4 \cdot (-1) \cdot 20 + 3 \cdot (-1) \cdot 15 + 2 \cdot (-2) \cdot 12 = -173$.

3. $\{2,0\ pt\}$ Defina o conjunto $\mathbb{N}$ de forma recursiva.
   Resposta:
   Passo base. $0 \in \mathbb{N}$.

   Passo recursivo. Se $x \in S$, então $(x+1) \in \mathbb{N}$.

   Regra da exclusão. Todos elementos de $\mathbb{N}$ são provenientes do passo base e dos passos recursivos.

4. $\{1,0\ pt\ extra\}$ Descubra outra solução para o Quesito 2 que seja maior que 60. Exiba seus cálculos.
   Resposta:
   Temos que achar qualquer número x que seja $(x \equiv -173\ (mod\ 60))$ e $x > 60$. Note que, se somarmos $-173 + (60 \cdot n)$, obtemos sempre valores novos de x para $n = 1, 2, 3, \ldots$, pois estamos dando n voltas em um relógio de 60 posições. Fazendo, em particular, $n = 4$, temos que $-173 + 60 \cdot 4 = -173 + 240 = 67$ é uma solução maior que 60.