Matemática Discreta

Prova 2 - 2015.1

Prof. Juliano Iyoda
Sistemas de Informação
21 de Julho de 2015

SUGESTÃO: **Faça a prova a lápis**

(Não é uma obrigação. É só uma sugestão.)

1. $\{2,0\,pt\}$ Defina o conjunto $S = \{3, 13, 23, 33, 43, 53, 63, 73, 83, 93, 103, 113, 123, \ldots\}$ de forma recursiva.
   Resposta:
   Passo base. $3 \in S$.
   Passo recursivo. Se $x \in S$, então $(x + 10) \in S$.
   Regra da exclusão. Todos elementos de S são provenientes do passo base e passo recursivo.

2. $\{2,0\,pt\}$ Seja R uma relação em $A = \{a, b, c, d\}$ dada por

$$R = \{(a, c), (c, b), (c, d), (d, d)\}.$$

   Utilize matrizes para calcular o fecho transitivo de R.
   Resposta:
   Assumindo que a linha e a coluna representam os vértices a, b, c e d (nesta ordem):

$$\mathbf{M}_R = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{M}_R^{[2]} = \mathbf{M}_{R^2} = \mathbf{R}_{R \circ R} = \mathbf{M}_R \odot \mathbf{M}_R = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \odot \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{M}_R^{[3]} = \mathbf{M}_{R^3} = \mathbf{M}_{R^2 \circ R} = \mathbf{M}_R \odot \mathbf{M}_{R^2} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \odot \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{M}_R^{[4]} = \mathbf{M}_{R^4} = \mathbf{M}_{R^3 \circ R} = \mathbf{M}_R \odot \mathbf{M}_{R^3} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \odot \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{M}_R \vee \mathbf{M}_R^{[2]} \vee \mathbf{M}_R^{[3]} \vee \mathbf{M}_R^{[4]} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$R^* = \{(a,b), (a,c), (a,d), (c,b), (c,d), (d,d)\}$

3. $\{2,0\ pt\}$ Um avião tem 200 assentos. Quantos passageiros são necessários para que pelo menos 1 assento tenha pelo menos 5 passageiros para sentar neste mesmo assento?

   Use o Princípio da Casa de Pombos para realizar seus cálculos.

   Resposta:
   Seja N o número de passageiros, k o número de assentos e r o número de passageiros em um dos assentos.

$$N = k \cdot (r-1) + 1 = 200 \cdot 4 + 1 = 801.$$