Lógica de Predicados

Trazer à tona na representação simbólica, os objetos, os predicados e relações em cada sentença.

ESTRUTURA – Conjunto de Objetos, Lista de Relações, Lista de Funções, Lista de Destaques. As estruturas assumem o papel das valorações verdades para a lógica proposicional.

Estruturas - Situação

Estrutura	***Assinatura***
Domínio	
Relações	Simbolos de relação
Destaques	Simbolos de constante
Funções	Simbolos de funções

Subestruturas
Dados duas estruturas A e B como sabemos se
-> A é subestrutura de B ?
-> B é subestrutura de A ?
1) Mesma assinatura? -> Relações binárias, ternárias, funções ...
2) Mesma natureza de Domínio? $A \subseteq B$
3) "Tudo" é preservado?

Definição **-** Sejam A e B duas estruturas de MESMA ASSINATURA L.
Uma função entre os domínios de A e B, isto é, $h: dom(A) \rightarrow dom(B)$, "preserva os papéis" se:

(1) Para todo simbolo de **Constante** *c* de *L*
$h(c^A) = c^B$
(2) Para todo simbolo de **Relação** n-ária $(n > 0)$ *R* de *L*
$(x_1, x_2, \ldots, x_n) \in R^A \;\rightarrow\; (h(x_1), h(x_2), \ldots, h(x_n)) \in R^B$
(3) Para todo simbolo de **Função** n-ária $(n > 0)$, *f*
$h(f^A(x_1, x_2, \ldots, x_n)) \;=\; f^B(h(x_1), h(x_2), \ldots, h(x_n))$

As definições acima definem um ***HOMOMORFISMO***.
Para trazer um ***HOMOMORFISMO IMERSOR*** a função h deve ser **INJETIVA** e no lugar de SE temos SSE. Já para o caso de ***ISOMORFISMO***, além de ser **IMESOR** a função deve ser **BIJETIVA (IMERSÃO SOBREJETORA).**

Obs.:
Homomorfismo imersor: a função h é injetivo e satisfaz a seguinte versão mais forte de (2).
$(x_1, x_2, \ldots, x_n) \in R^A \;\Leftrightarrow\; (h(x_1), h(x_2), \ldots, h(x_n)) \in R^B$

Teorema. Seja L uma assinatura.
(a) Se A, B, C são L-estruturas e $f: A \rightarrow B$ e $g: B \rightarrow C$ são homomorfismo, então a função composta $g \circ f$ é um homomorfismo de *A* para *C*. Se, ainda mais, *f* e *g* são ambas imersões então $g \circ f$ também é.
(b) Se A, B, C são L-estruturas. Se $f: A \rightarrow B$ é um isormofismo então a função inversa $f^{-1}: dom(B) \rightarrow dom(A)$ existe e é um isomorfismo de *B* para *A*. Se $f: A \rightarrow B$ e $g: B \rightarrow C$ são isomorfismos então $g \circ f$ também é.

Definição de Subestrutura
Sejam A e B duas estruturas dizemos que $A \subseteq B$ sse há um HOMOMORFISMO IMERSOR de A para B e $dom(A) \subseteq dom(B)$.
Nesse caso dizemos que ***A é SUBESTRUTURA B*** ou que ***B é EXTESÃO de A***.

SINTAXE DA LÓGICA DE PREDICADOS

Qual é o formato das fórmulas da lógica de predicados?
-> Como é uma *FÓRMULA ATÔMICA*?
-> Como se monta *FÓRMULAS COMPOSTAS*?

Exemplos de Sentenças Atômicas:
3 é primo -> $P(s(s(b,b),b))$ onde $b=1$ e $s(x,y) = (x+y) mod 5$ e *P* é a relação "é primo".

TERMOS DE UMA ASSINATURA DE UMA LINGUAGEM

A grosso modo, os termos de uma assinatura são as expressões representadas a partir das ***constantes*** e ***símbolos das funções*** de L que representam elementos do domínio de uma estrutura de assinatura L.

Definição Formal

Seja L uma estrutura. O conjunto dos termos de L é definido indutivamente da seguinte forma:

(1) BASE

Toda CONSTANTE de L é um termo de L.
Toda VARIÁVEL é um termo de L.

(2) FUNÇÕES GERADORAS

Se $t_1, \dots, t_n$ forem termos de L e f for um símbolo de uma função n-ária de L então a expressão $f(t_1, \dots, t_n)$ é um termo de L.

(3) Nada mais é termo.

Um termo é dito FECHADO se NENHUMA VARIÁVEL ocorre nele.

FÓRMULAS ATÔMICAS DE UMA ESTRUTURA

Suponha que L seja uma assinatura. Uma fórmula atômica de L é:

(1) $t_1 = t_2$ onde t_1 e t_2 são termos de L.

(2) $R(t_1, \dots, t_n)$ onde *R* é um símbolo de relação n-ária de L e $t_1, \dots, t_n$ são termos de L.

SENTENÇA ATÔMICA

Uma sentença atômica de L é uma FÓRMULA ATÔMICA que NÃO CONTÉM VARIÁVEIS.

DEFINIÇÃO DE SUBSTITUIÇÃO

Suponha que φ seja uma fórmula atômica de L, na qual aparecem as variáveis $x_1, \dots, x_n$ (escrevendo explicitamente: $\varphi(x_1, \dots, x_n)$). A substituição dos termos $t_1, \dots, t_n$ pelos respectivos $x_1, \dots, x_n$ em φ resultana fórmula $\varphi(t_1, \dots, t_n)$.

FÓRMULA BEM-FORMADA

Seja L uma estrutura. O conjunto das fórmulas bem formadas de L é definido indutivamente da seguinte forma:

I. Toda FÓRMULA ATÔMICA é uma FBF. (CASO BASE)
II. Se φ é uma FBF, então $(\neg\varphi)$ também é FBF.
III. Se φ, ψ são uma FBF, então $(\varphi \;❑\; \psi)$ é FBF. Onde $❑ \in \{ \wedge , \vee , \rightarrow \}$
IV. Se φ é uma FBF, então $\forall x \;\; \varphi$ é FBF.
V. Se φ é uma FBF, então $\exists x \;\; \varphi$ é FBF.
VI. Nada mais é FBF.

DEFINIÇÃO DE VARIÁVEIS LIVRES

Seja φ uma fórmula da assinatura L. Vamos definir recursivamente o conjunto das variáveis livres(i.e. Sem qualificações) que ocorrem em φ.

VL: FBF de $L \rightarrow P$ (variáveis)

BASE:

$VL(\varphi) = \{x_1, \dots, x_n\}$ se φ é atômica e tem ocorrências de $x_1, \dots, x_n$

$VL(\neg\varphi) = VL(\varphi)$
$VL((\varphi \;\square\; \psi)) = VL(\varphi) \cup VL(\psi)$ Onde $\square \in \{ \wedge , \vee , \rightarrow \}$
$VL(\forall x \;\; \varphi) = VL(\varphi) - \{x\}$
$VL(\exists x \;\; \varphi) = VL(\varphi) - \{x\}$

DEFINIÇÃO DE SENTENÇA
Uma sentença de uma assinatura L é uma FBF de L cujo conjunto de variáveis livres é vazio.

SEMÂNTICA

INTERPRETAÇÃO DE UMA ASSINATURA NUMA ESTRUTURA

DEFINIÇÃO
Suponha que L seja uma assinatura e A seja uma L-estrutura. Uma interpretação de L em A é uma associação de :

I. Cada simbolo *c* de constante de L há um elemento destacado c^A do domínio de A
II. Cada simbolo *R* de relação n-ária de L, há uma relação n-ária R^A de A $(n > 0)$
III. Cada simbolo *f* de função n-ária, há f^A de A.

SEMÂNTICA DE TERMOS
DEFINIÇÃO
Suponha que L seja uma assinatura e *t* seja um termo fechado. O "significado" de *t* na L-estrutura A, denotado por t^A é o elemento resultante de se calcular a expressão correspodente a *t* na estrutura A, conforme a interpretação dada aos símbolos de constantes e de função. Assim:

I. t^A é o elemento destacado c^A se *t* for um termo atômico constituido apenas do simbolo de constante *c*.
II. t^A é o elemento resultante do cálculo de $f^A(t_1^A, t_2^A, \ldots, t_n^A)$ se *t* é a expressão $f(t_1, t_2, \ldots, t_n)$, onde *f* é o símbolo da função n-ária de L e $t_1, t_2, \ldots, t_n$ são termos fechados de L.

Exemplo: Seja a seguinte interpretação:
$a^A = 1 \qquad b^A = 3$
$R^A = Divide \qquad S^A = Menor\,Que$
$f^A = Sucessor - mod - 7 \qquad h^A = Quadrado - mod - 7 \qquad g^A = Soma - mod - 7$

$(f(a))^A = f^A(a^A)$ é o mesmo que $Sucessor - mod - 7(1) = 2$
$(g(h(a), f(b)))^A = g^A((h(a))^A, (f(b))^A) = g^A(h^A(a^A), f^A(b^A)) = 5$

ATRIBUIÇÃO DE ELEMENTOS A VARIÁVEIS
DEFINIÇÃO
Suponha que *t* seja um termo de assinatura L no qual ocorrem as variáveis $x_1, x_2, \ldots, x_n$. Uma atribuição de elementos $a_1, a_2, \ldots, a_n$ do domínio de uma L-estrutura A às variáveis $x_1, x_2, \ldots, x_n$ respectivamente nos deverá permitir calcular t^A .

Exemplo: Seja *t* o termo $g(h(x), f(y))$. Poderiamos escrever *t* como $t(x, y)$. Agora, tomemos a atribuição:
3 no lugar de *x*
2 no lugar de *y*
Em símbolos $t(x, y)[3/x][2/y]$
Agora vamos calcular $(t(x, y)[3/x][2/y])^A$
$(g(h(x), f(y))[3/x][2/y])^A = (g(h(3), f(2)))^A = g^A((h(3))^A, (f(2))^A)$
$g^A(h^A(3), f^A(2)) = 5$

SEMÂNTICA DE SENTENÇAS ATÔMICAS
DEFINIÇÃO

Suponha que φ seja uma sentença atômica de L e A seja uma L-estrutura.

Dada uma interpretação de L em A, o ***significado de*** φ ***em A*** conforme tal interpretação é dado por:

I. Se φ é da forma $R(t_1,\ldots,t_n)$ onde *R* é um símbolo de uma relação n-ária de L, e $t_1,\ldots,t_n$ são termos fechados de L então φ^A, ou seja $R^A(t_1^A,\ldots,t_n^A)$ é verdadeira *sse* a n-tupla $(t_1^A,\ldots,t_n^A)$ pertence à relação R^A.

II. Se φ é da forma $t_1=t_2$ tal que t_1 e t_2 são termos fechados de L então φ^A, ou seja $(t_1=t_2)^A$ isto é $t_1^A=t_2^A$ é verdadeira se t_1^A é o mesmo elemento que t_2^A.

MODELO E CONTRA-MODELO
DEFINIÇÃO

Seja L uma assinatura, A uma L-estrutura, i uma interpretação de L em A, e φ uma sentença atômica de L.

A é um ***MODELO*** de φ se φ^A, conforme i, é **VERDADEIRA**.

A é um ***CONTRA-MODELO*** de φ se φ^A, conforme i, é **FALSA**.

SEMÂNTICA DE SENTENÇAS
DEFINIÇÃO

Suponha que φ seja uma sentença de L, e A seja uma L-estrutura. Dada uma interpretação de L em A, dizemos que φ^A é verdadeira em A da seguinte forma:

I. Se φ for atômica, volte à definição anterior

II. Se φ é da forma $(\neg\psi)$, φ^A é verdadeira *sse* ψ^A é não é *verdadeira*.

III. Se φ é da forma $(\psi\wedge\theta)$, φ^A é verdadeira *sse* ψ^A E θ^A são *verdadeiras*.

IV. Se φ é da forma $(\psi\vee\theta)$, φ^A é verdadeira *sse* ψ^A OU θ^A são *verdadeiras*.

V. Se φ é da forma $(\psi\rightarrow\theta)$, φ^A é verdadeira *sse* $(\neg\psi^A \vee \theta^A)$ é *verdadeira*.

VI. Se φ é da forma $\forall x\ \psi$, φ^A é verdadeira *sse* $(\psi(x)[a/x])^A$ é *verdadeira* para todo elemento *a* do domínio de A.

VII. Se φ é da forma $\exists x\ \psi$, φ^A é verdadeira *sse* $(\psi(x)[a/x])^A$ é *verdadeira* para algum elemento *a* do domínio de A.

SATISFATIBILIDADE
DEFINIÇÃO

Seja $\varphi(\bar{x})$ uma fórmula da lógica de predicados numa assinatura L.

(1) Dizemos que $\varphi(\bar{x})$ é ***SATISFATÍVEL*** se existe uma L-estrutura A, uma interpretação de L em A, uma n-upla $a_0,a_1,\ldots,a_n$ de elementos do domínio de A, tal que $\varphi^A(\bar{a})$ é verdadeira.

(2) Dizemos que $\varphi(\bar{x})$ é ***REFUTÁVEL*** se existe uma L-estrutura A, uma interpretação de L em A, uma n-upla $a_0,a_1,\ldots,a_n$ de elementos do domínio de A, tal que $\varphi^A(\bar{a})$ é falsa.

(3) Dizemos que $\varphi(\bar{x})$ é ***VÁLIDA*** se para toda L-estrutura A, toda interpretação de L em A, toda n-upla de elementos $a_0,a_1,\ldots,a_n$ do domínio de A, tem-se que $\varphi^A(\bar{a})$ é verdadeira.

(4) Dizemos que $\varphi(\bar{x})$ é ***INSATISFATÍVEL*** se para toda L-estrutura A, toda interpretação de L em A, toda n-upla de elementos $a_0,a_1,\ldots,a_n$ do domínio de A, tem-se que $\varphi^A(\bar{a})$ é falsa.

Seja φ uma SENTENÇA da lógica de predicados numa assinatura L.

(1) Dizemos que φ é ***SATISFATÍVEL*** se existe uma L-estrutura A, uma interpretação de L em A tal que φ^A é verdadeira (ou seja φ tem MODELO).

(2) Dizemos que φ é ***REFUTÁVEL*** se φ tem CONTRA-MODELO.

(3) Dizemos que φ é ***VÁLIDA*** se φ não tem CONTRA-MODELO.

(4) Dizemos que φ é ***INSATISFATÍVEL*** se φ não tem MODELO.

DE ESTRUTURAS PARA SENTENÇAS ATÔMICAS

Dado uma L-estrutura A, e uma interpretação de L em A, podemos gerar sentenças atômicas a partir dessa interpretação. Exemplo: 3 é primo em símbolos, $P(s(s(b,b),b))$.

DE SENTENÇAS ATÔMICAS PARA ESTRUTURAS

DIAGRAMA POSITIVO DE UMA ESTRUTURA

Suponha que L seja uma assinatura e que A seja uma L-estrutura. O DIAGRAMA POSITIVO de A é o conjunto de ***todas as SENTENÇAS ATÔMICAS DE L*** que são ***VERDADEIRAS em A***.

Ex.: Definir uma estrutura B tal que o seu diagrama positivo seja:

$S(a,b)$	$R(g(f(a),b))$	$g(b,a)=a$
$S(f(b),a)$	$R(g(b,a))$	$g(b,b)=b$
$S(g(a,b),a)$	$f(a)=b$	$g(f(b),f(a))=a$
$S(b,f(b))$	$f(f(b))=b$	$g(b,f(b))=a$
$R(f(a))$	$g(a,a)=b$	$g(a,b)=a$

I. ***Assinatura L***

S(-,-) *a* *f(-)*
R(-) *b* *g(-,-)*

II. Definir uma estrutura B a mais genérica possível (REFERENCIAL) tal que qualquer que tenha sido a estrutura C que tenha gerado o DIAGRAMA POSITIVO dado seja possível definir um HOMOMORFISMO de B para C. Chamamos de ***MODELO CANÔNICO***.

DOMÍNIO DE B – Termos fechados de L $a, b, f(a), f(b), g(a,a), g(a,b), g(b,a), \ldots$

Daí surge o problema: se o domínioda estrutura original fosse menor do que o definido acima? Para resolver isso nós agrupamos os termos semelhantes:

$b \quad g(b,b) \quad f(f(b)) \quad f(a) \quad g(a,a)$

$a \quad g(b,a) \quad g(a,b) \quad g(f(b),f(a))$

CLASSES DE EQUIVALÊNCIA!

Logo DOMÍNIO: $[t]$ para $t \in TERMOS\ FECHADOS\ de\ L$

III. ***DESTAQUES***: basta listar.

$a^A - a \quad b^A - b$

IV. ***RELAÇÕES*** e ***PREDICADOS***

$S(a,b) \ \backslash \ S^B([a],[b])$

$S(f(b),a) \ \backslash \ S^B([f(b)],[a])$

$S(g(a,b),a) \ \backslash \ S^B([g(a,b)],[a])$

$S(b,f(b)) \ \backslash \ S^B([b],[f(b)])$

Logo: $S^B = \{[a],[b],[f(b)],[g(a,b)]\}$

Então para R^B : $R^B = \{[f(a)],[g(f(a),b)],[g(b,a)]\}$

V. ***FUNÇÕES***

$f^B([t]) = [f(t)]$

$g^B([t_1],[t_2]) = [g(t_1,t_2)]$

Agora precisamos provar que há um HOMOMORFISMO de B para C. $h([t]) = t^C$

CONSTANTES: $h([a]) = a^C$

RELAÇÕES e PREDICADOS:

$([a],[b],[f(b)],[g(a,b)]) \in S^B \rightarrow (h([a]), h([b]), h([f(b)]), h([g(a,b)])) \in S^C$

E assim por diante.

SATISFATIBILIDADE

Dado um conjunto Γ de sentenças, pergunta-se: "Γ é SATISFATÍVEL?"

Se Γ é um conjunto de SENTENÇAS ATÔMICAS, então a resposta é SIM pois podemos montar o "MODELO CANÔNICO" de Γ.

Senão vamos tentar decompor sentenças de Γ em sentenças "pequenas", preferivelmente, atômicas.

Exemplo: $\Delta=\{\forall x(P(x,b)\vee Q(x)), \forall y(P(f(y),b)\rightarrow Q(y)), \neg\forall y(Q(y)\vee Q(f(y)))\}$ é INSATISFATÍVEL? Seria fácil responder se Δ fosse composto apenas por sentenças atômicas. Logo o nosso problema se resume no seguinte: é possível criar um conjunto de sentenças atômicas que representa Δ.

Assinatura

P(-,-) *F(-,-)*

Q(-) *b*

O primeiro passo par isso é eliminar os quantificadores.

ELIMINAÇÃO DE QUANTIFICADORES

Dada uma sentença φ queremos encontrar φ' tal que:

(1) φ' seja logicamente equivalente a φ.

(2) φ' não contenha quantificadores.

FÓRMULA PRENEX

DEFINIÇÃO

Uma fórmula da lógica de predicados está na forma PRENEX (Prefixed Normal Expression) se ela tem o seguinte formato:

$Q_1 x_1 \ Q_2 x_2 \ \ldots \ Q_n x_n \quad \psi(x_1, x_2, \ldots, x_n)$

Onde $Q_i (1 \leq i \leq n)$ é $\forall$ ou $\exists$ e ψ não tem quantificadores.

TEOREMA

Para toda fórmula φ da lógica de predicados numa dada assinatura L, existe φ' de L tal que:

(1) φ' é logicamente equivalente a φ.

(2) φ' está na forma PRENEX.

EXEMPLOS DE EQUIVALÊNCIA

I. $\neg\forall x P(x) \equiv \exists x \neg P(x)$

II. $\neg\exists x P(x) \equiv \forall x \neg P(x)$

III. $\forall x P(x) \wedge \forall x Q(x) \equiv \forall x(P(x)\wedge Q(x))$

IV. $\exists x P(x) \vee \exists x Q(x) \equiv \exists x(P(x)\vee Q(x))$

V. $\forall x P(x) \vee \forall x Q(x) \equiv \forall x \forall z(P(x)\vee Q(z))$

VI. $\exists x P(x) \wedge \exists x Q(x) \equiv \exists x \exists z(P(x)\wedge Q(z))$

VII. $\forall x P(x) \rightarrow \forall x Q(x) \equiv \exists x \forall z(\neg P(x)\vee Q(z))$

VIII. $\exists x P(x) \rightarrow \exists x Q(x) \equiv \forall x \exists z(\neg P(x)\vee Q(z))$

Obs.:

III. $\forall x P(x) \wedge \forall x Q(x) \equiv \forall x(P(x)\wedge Q(x))$

$P(a_1)\wedge P(a_2)\wedge\ldots\wedge P(a_n) \ \wedge \ Q(a_1)\wedge Q(a_2)\wedge\ldots\wedge Q(a_n)$

$(P(a_1)\wedge Q(a_1))\wedge(P(a_2)\wedge Q(a_2))\wedge\ldots\wedge(P(a_n)\wedge Q(a_n)) \quad \therefore \quad \forall x(P(x)\wedge Q(x))$

V. $\forall x P(x) \vee \forall x Q(x) \equiv \forall x \forall z(P(x)\vee Q(z))$

$\forall x P(x)\vee\forall z Q(z)$

$\forall x P(x)\vee\psi \quad \therefore \quad (P(a_1)\wedge P(a_2)\wedge\ldots\wedge P(a_n))\vee\psi \quad \therefore \quad \forall x(P(x)\vee\psi)$

$\theta\vee\forall Q(z)$ Aplicando o mesmo raciocinio nós obtemos: $\forall z(\theta\vee Q(z))$

$\forall x \forall z(P(x)\vee Q(z))$

VII. $\forall x P(x) \rightarrow \forall x Q(x) \equiv \exists x \forall z(\neg P(x)\vee Q(z))$

$\neg\forall x P(x)\vee\forall z Q(z) \quad \therefore \quad \exists x\neg P(x)\vee\forall z Q(z) \quad \therefore \quad \exists x(\neg P(x)\vee\forall z Q(z)) \quad \therefore$

$\exists x \forall z(\neg P(x)\vee Q(z))$

Agora sabemos como transformar uma fórmula φ na sua ***PRENEX*** vamos começar a eliminar os quantificadores.

ELIMINAR OS QUANTIFICADORES EXISTENCIAIS

TÉCNICA: Skolenização por Thoralf Skolen (1915-1920)
INÍCIO: Artigo de 1915 com Lowenheim

Exemplo: $\forall x \exists y R(x, y)$

Considere uma estrutura A tal que $dom(A)=\mathbb{N}$ e que $R^A = Menor Que$. Para eliminarmos o " $\exists$ " nós temos que substituir o valor de "*y*". Para isso criamos uma estrutura B que difere de A por ter uma função ***f(-)***.

$\forall x \exists y R(x, y) \rightarrow \forall x R(f(x))$

f** ^{B}**(-) pode ser "Soma 5", "Soma 1", "Multiplicar...". Enfim, qualquer função que se adapte a relação R^A.

Outros exemplos: $\forall x \forall y \exists z P(x, y, z) \quad \therefore \quad \forall x \forall y P(x, y, f(x, y))$

(Não tem " $\forall$ " antes) $\exists x \forall y Q(x, y) \quad \therefore \quad \forall y Q(b, y)$

FORMA NORMAL DE SKOLEM
DEFINIÇÃO

Suponha que φ seja uma fórmula da lógica de predicados na assinatura L. Assuma que φ está na forma PRENEX.

A fórmula φ' é a ***FORMA NORMAL DE SKOLEM*** de φ é obtida a partir de φ ***eliminando-se cada QUANTIFICADOR EXISTENCIAL*** do tipo $\exists x_i$, e substituindo-se todas as ocorrências de x_i por uma expressão da forma $f(x_{j_1}, \ldots, x_{j_k})$ onde:

I. f é um símbolo novo de função.
II. $x_{j_1}, \ldots, x_{j_k}$ são variáveis quantificadas UNIVERSALMENTE na frente do $\exists x_i$ i.e. $j_1 < i, j_2 < i, \ldots, j_k < i$.

TEOREMA DE SKOLEN

Seja φ e φ' como na definição anterior. Nessas circunstâncias, se A é um modelo de φ, então existe uma estrutura A' de assinatura $L \cup \{Todos\ os\ Simbolos\ de\ Constantes\ e\ de\ Função\ que\ foram\ acrescentadas\ a\ \varphi\}$ tal que A' é modelo de φ'.

TERCEIRO PASSO

Agora que temos uma fórmula na FORMA NORMAL DE SKOLEM, basta simplesmente ***apagar os quantificadores universais***.

QUARTO PASSO

Converta todas as fórmulas na ***FORMA NORMAL CONJUNTIVA*** e aplique o ***MÉTODO DA RESOLUÇÃO***.

Agora podemos resolver o problema anterior: descobrir se o conjunto Δ é insatisfatível.

$\forall x (P(x, b) \vee Q(x)) \quad \therefore \quad P(x, b) \vee Q(x)$

$\forall x (P(f(x), b) \rightarrow Q(x)) \quad \therefore \quad P(f(x), b) \rightarrow Q(x) \quad \therefore \quad \neg P(f(x), b) \vee Q(x)$

$\neg \forall x (Q(y) \vee Q(f(y))) \quad \therefore \quad \exists y \neg (Q(y) \vee Q(f(y)))$

PROBLEMA DA UNIFICAÇÃO DE TERMOS

Dados dois termos t_1 e t_2 numa assinatura L, obtenha se possivel uma lista de termos $s_1, s_2, \ldots, s_n$ que quando entrarem no lugar das variáveis $x_1, x_2, \ldots, x_n$ respectivamente em $t_1, t_2, \ldots, t_n$ tornam ambos os termos IDÊNTICOS.

Exemplo1:

TRIVIAL

$\{f(x,g(a,y))\stackrel{?}{=}f(x,g(y,x))\} \therefore \{x\stackrel{?}{=}x, g(a,y)\stackrel{?}{=}g(y,x)\} \therefore \{g(a,x)\stackrel{?}{=}g(y,x)\}$

$\{a\stackrel{?}{=}y, y\stackrel{?}{=}x\} \therefore \{y\stackrel{?}{=}x\} \therefore \{a\stackrel{?}{=}x\}$

Atribuição: $[a/y]$ Atribuição: $[a/x]$

Exemplo 2:

$S=\{f(g(z),x)\stackrel{?}{=}f(y,x),\ f(y,x)\stackrel{?}{=}f(y,h(a))\}$ *Decomposição*

$S_1=\{g(z)\stackrel{?}{=}y, x\stackrel{?}{=}x,\ f(y,x)\stackrel{?}{=}f(y,h(a))\}$ *Eliminar Trivial*

$S_2=\{g(z)\stackrel{?}{=}y,\ f(y,x)\stackrel{?}{=}f(y,h(a))\}$ *Decomposição* (Atribuição fica pro final)

$S_3=\{g(z)\stackrel{?}{=}y, y\stackrel{?}{=}y, x\stackrel{?}{=}h(a)\}$ *Eliminar Trivial*

$S_4=\{g(z)\stackrel{?}{=}y, x\stackrel{?}{=}h(a)\}$ *Atribuir*

$S_5=\{[h(a)/x],[g(z)/y],[z/z]\}$

Dizemos que S_5 é a SUBSTITUIÇÃO UNIFICADORA MAIS GERAL. Poderiamos ter $S_6=\{[h(a)/x],[g(f(a,h(a)))/y],[f(a,h(a))/z]\}$, mas S_6 não seria mais geral que S_5 . Essa é uma característica do método: quando há uma solução, o método nos dá a MAIS GERAL.

Exemplo3:

$S=\{g(f(x,x))\stackrel{?}{=}g(f(h(a),g(b)))\}$

$S_1=\{f(x,x)\stackrel{?}{=}f(h(a),g(b))\}$

$S_2=\{x\stackrel{?}{=}h(a), x\stackrel{?}{=}g(b)\}$

$S_3=\{x\stackrel{?}{=}h(a), h(a)\stackrel{?}{=}g(b)\}$

Como queremos ser o mais genérico possível, não podemos garantir que $h(a)=g(b)$. Pode até existir uma estrutura onde isso seja verdade, mas não podemos garantir para todas.

Exemplo4:

$S=\{f(x,g(x))\stackrel{?}{=}f(g(x),g(g(x)))\}$

$S_1=\{x\stackrel{?}{=}g(x), g(x)\stackrel{?}{=}g(g(x))\}$

$S_2=\{x\stackrel{?}{=}g(x), x\stackrel{?}{=}g(x)\}$

$S_3=\{x\stackrel{?}{=}g(x)\}$

$\cancel{S_4=\{[g(x),x]\}}$

Nesse caso o programa entraria num LOOP INFINITO.

Exemplo5:

$S=\{g(f(x,y))\stackrel{?}{=}g(f(h(y),g(z)))\}$

$S_1=\{f(x,y)\stackrel{?}{=}f(h(y),g(z))\}$

$S_2=\{x\stackrel{?}{=}h(y), y\stackrel{?}{=}g(z)\}$

Perceba, devemos substituir primeiramente o “*y*”. Nesse caso dizemos que “*x*” é uma ***VARIÁVEL RESOLVIDA*** pois *y* aparece em outra equação.

$S_3=\{[h(g(z))/x],[g(z)/y],[z/z]\}$

EQUAÇÃO NA FORMA RESOLVIDA
DEFINIÇÃO

Suponha que S seja um conjunto de equações. Uma equação de S da forma $x\stackrel{?}{=}t$ está na forma resolvida (e, nesse caso, *x* seria uma VARIÁVEL RESOLVIDA) se *x* NÃO OCORRE MAIS EM QUALQUER OUTRO LUGAR EM S, NEM MESMO EM *t*.

O sistema S está na forma resolvida se TODAS AS SUAS EQUAÇÕES ESTIVEREM NA FORMA

RESOLVIDA.

MÉTODO DA UNIFICAÇÃO DE TERMOS POR TRANSFORMAÇÕES DE SISTEMAS DE EQUAÇÕES

Jacques Herbrand, 1930

Seja S um sistema de equações. Para encontrar a ***SUBSTITUIÇÃO UNIFICADORA MAIS GERAL*** para S, caso exista, aplique as seguintes regras de transformação sobre S até obter, se possível, um sistema S' na forma resolvida.

(1) ***ELIMINAÇÃO DE EQUAÇÕES TRIVIAIS***

$\{x \stackrel{?}{=} x\} \cup S \;\Rightarrow\; S$

(2) ***DECOMPOSIÇÃO DE TERMOS***. Para qualquer simbolo de função f de aridade $n \geq 0$ temos:

$\{f(t_1,\ldots,t_n) \stackrel{?}{=} f(s_1,\ldots,s_n)\} \cup S \;\Rightarrow\; S \cup \{t_1 \stackrel{?}{=} s_1,\ldots,t_n \stackrel{?}{=} s_n\}$

(3) ***ELIMINAÇÃO DE VARIÁVEIS***

$\{x \stackrel{?}{=} t\} \cup S \;\Rightarrow\; \{x \stackrel{?}{=} t\} \cup \{[t/x]\}$

TEOREMA DE HERBRAND

Seja S um conjunto de cláusulas. S é INSATISFATÍVEL se e somente se existe um CONJUNTO FINITO de INSTÂNCIAS BÁSICAS das cláusulas de S é INSATISFATÍVEL.

TEOREMA DA COMPACCIDADE

Seja Γ um conjunto de fórmulas da lógica proposicional, Γ é SATISFATÍVEL se e somente se TODO SUBCONJUNTO FINITO DE T É INSATISFATÍVEL. O teorema é válido mesmo que Γ seja infinito.

PROVA:

I. IDA

Assuma que Γ seja satisfatível. Então existe uma valoração v que satisfaz Γ. Tome S como sendo um subconjunto finito qualquer de Γ. Tome v como valoração. Como v satisfaz ao conjunto todo Γ, v satisfaz cada uma das partes. Logo, v satisfaz S. Logo, S é satisfatível.

II. VOLTA

Assuma que todo subconjunto finito Γ é satisfatível (nesse caso dizemos que Γ é FINITAMENTE SATISFATÍVEL). Temos que provar que Γ é satisfatível, ou seja, que existe uma valoração v que satisfaz Γ.

Vamos aumentar Γ de forma consistente até quando esse processo chegue em um CONJUNTO MAXIMALMENTE CONSISTENTE, isto é, um conjunto Δ tal que:

(1) Para toda fórmula θ, $\theta \in \Delta$ ou $\neg\theta \in \Delta$.

(2) Para nenhuma fórmula δ, $\delta \in \Delta$ e $\neg\delta \in \Delta$.

Seja $\alpha_0, \alpha_1, \ldots$ uma enumeração do conjunto de fórmulas PROP.

Agora tome:

$\Delta_0 = \Gamma$

$\Delta_{n+1} = \{\alpha_n\} \cup \Delta_n$ se α_n é consistente com Δ_n .

Γ caso contrário

Faça: $\Delta = \bigcup_{i=0} \Delta_i$

Afirmação: Δ é FINITAMENTE SATISFATÍVEL.

Seja a seguinte valoração: $v(x) = 1 \; sse \; x \in \Delta$

Claramente v satisfaz a todas as fórmulas atômicas de Δ. Porém, precisamos mostrar que v satisfaz a TODAS as fórmulas em Δ. Ou seja, precisamos provar que PARA TODA $\alpha \in$*PROP* $v(\alpha) = 1 \; sse \; \alpha \in \Delta$.

PROVA: Por indução sobre a complexidade de α.

(1) CASO BASE: α é atômica.

Trivial, pois a própria definição de v atesta que v satisfaz α quando α é atômica e pertence a Δ.

(2) CASOS INDUTIVOS:

I. α é da forma $\neg\theta$

II. α é da forma $(\psi \wedge \theta)$

III. α é da forma $(\psi \vee \theta)$
IV. α é da forma $(\psi \rightarrow \theta)$

I. H.I.: $v(\theta)=1 \; sse \; \theta \in \Delta$
TESE: $v(\neg\theta)=1 \; sse \; \neg\theta \in \Delta$
IDA: Se $v(\neg\theta)=1$ então $\neg\theta \in \Delta$. Suponha que $\neg\theta \notin \Delta$. Como Δ é M.C., então $\theta \in \Delta$. Logo pela H.I., $v(\theta)=1$. Daí $v(\neg\theta)=0$. Portanto $v(\neg\theta)\neq 1$.
VOLTA: Se $\neg\theta \in \Delta$ então $v(\neg\theta)=1$. Assuma que $\neg\theta \in \Delta$. Como Δ é M.C., $\theta \notin \Delta$. Da H.I. $v(\theta)\neq 1$. Logo $v(\theta)=0$. Daí, $v(\neg\theta)=1$.
II. H.I.: $v(\psi)=1 \; sse \; \psi \in \Delta$, $v(\theta)=1 \; sse \; \theta \in \Delta$
TESE: $v(\psi \wedge \theta)=1 \; sse \; (\psi \wedge \theta) \in \Delta$

TEOREMA DA COMPACCIDADE

Seja Γ um conjunto de fórmulas

(1) Γ é SATISFATÍVEL sse TODO SUBCONJUNTO FINITO de Γ é SATISFATÍVEL.

(2) Γ é INSATISFATÍVEL sse existe PELO MENOS UM SUBCONJUNTO FINITO de Γ que é INSATISFATÍVEL.

TEOREMA DE HERBRAND

Seja Γ um conjunto de cláusulas. Γ é INSATISFATÍVEL sse existe um CONJUNTO FINITO de INSTÂNCIAS BÁSICAS de Γ que é INSATISFATÍVEL.

INSTÂNCIA BÁSICA

DEFINIÇÃO

Seja C uma cláusula numa assinatura L tal que contém ocorrências das variáveis $x_1, x_2, \ldots, x_n$. Uma INSTÂNCIA BÁSICA de C é uma cláusula resultante da substituição $[t_1/x_1], \ldots, [t_n/x_n]$ em C, tal que $t_1, t_2, \ldots, t_n$ são termos fechados de L.